

Math 151 Final (2)

Ali Nesin
Ocak, 2005

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ (reel ve ya rasyonel farketmez) ve her $x \in \mathbb{R}$ için $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna **a noktasında sürekli** denir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ her $a \in \mathbb{R}$ için a noktasında sürekliyse, f fonksiyonuna **sürekli** denir.

1. Sabit fonksiyonların sürekli olduklarını gösterin. (3 puan.)
2. Birim fonksiyonun sürekli olduğunu gösterin. (3 puan.)
3. Aşağıda tanımlanan f fonksiyonu sürekli midir?

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

Cevabınızı ispatlayın. (4 puan.)

4. f fonksiyonu şu şekilde tanımlansın:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ rasyonel ise} \\ 1 & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

f' in sürekli olduğu noktalar var mıdır? Cevabınızı ispatlayın. (5 puan.)

5. f ve g süreklilerse toplamları olan $f + g$ fonksiyonunun da sürekli olduğunu gösterin. (6 puan.)
6. f ve g süreklilerse çarpımları olan $f \cdot g$ fonksiyonunun da sürekli olduğunu gösterin. (7 puan.)
7. Önceki soruları kullanarak aşağıdaki fonksiyonun sürekli olduğunu gösterin. (5 puan.)

$$f(x) = x^2 - 4x + \sqrt{2}$$

8. Sürekliliğin tanımını kullanarak $f(x) = x^2 - 4x + \sqrt{2}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin. (7 puan.)

9. f ve g iki fonksiyon olsun. f fonksiyonu a noktasında ve g fonksiyonu $f(a)$ noktasında süreklilerse $g \circ f$ fonksiyonunun a noktasında sürekli olduğunu gösterin. (10 pts.)

10. $\exp x = \sum_{n \geq 0} x^n/n!$ olmak üzere \exp fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin. (15 puan.)

11. f fonksiyonu a noktasında sürekli ve $f(a) > 0$ olsun. f' in mutlak artan olduğu ve a' yi içeren bir aralık olduğunu gösterin. (15 puan.)

12. f sürekli olsun. $f(a) < 0$ ve $f(b) > 0$ ise a ile b arasında $f(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir c sayısının olduğunu gösterin. (15 puan.)

13. Sürekli fonksiyon kavramını metrik uzaylar üzerine genelleştirin. (10 puan.)