Math 152
Süreklilik Üzerine Ara Sınav
Ali Nesin
6 Nisan 2008

$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in (a - \delta, a + \delta)$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna ***a* noktasında sürekli** denir.

1. $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $(a - \alpha, a + \alpha) \cap X = \{a\}$ eşitliğini sağlayan bir $\alpha > 0$ sayısı varsa, her $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonun a noktasında sürekli olduğunu gösterin. (3 puan.)

2. X kümesi $\mathbb{R}$'nin sonlu bir altkümesi olsun. Her $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun X'in her noktasında sürekli olduğunu gösterin. (3 puan.)

3. $X = \{1/n : n = 1, 2, ...\}$ olsun. X'ten $\mathbb{R}$'ye giden tüm sürekli fonksiyonları bulun. (5 puan.)

4. Aşağıdaki gibi tanımlanan

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{3 - 2x + x^3}$$

fonksiyonunun $3 - 2a + a^3 \neq 0$ kuralını sağlayan her $a \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olduğunu gösterin. (10 puan.)

5. exp fonksiyonunun her yerde sürekli olduğunu gösterin. (15 puan.)

6. $a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f, g : X \to \mathbb{R}$ a noktasında sürekli fonksiyonlar olsun. $f + g$ ve fg fonksiyonlarının da a noktasında sürekli olduklarını gösterin. (3 + 4 puan.)

7. $a \in X$, $Y \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ a noktasında sürekli ve $g : Y \to \mathbb{R}$ $f(a)$ noktasında sürekli fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ fonksiyonunun da a noktasında sürekli olduğunu gösterin. (10 puan.)

8. $a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ a noktasında sürekli olsun. f ' in $[a - \alpha, a + \alpha]$ kapalı aralığı üzerinde sınırlı olduğu pozitif bir α reel sayısının var olduğunu gösterin . (8 puan.)

9. $a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a noktasında sürekli olsun. $1/f$ fonksiyonunun da a noktasında sürekli olduğunu gösterin. (7 puan.)

10. $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun 0' da sürekli olduğunu gösterin. (7 puan.)

11. $a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise, f 'nin a'da sürekli olması için yeter ve gerek koşulun, $f(a)$'yı içeren her I açık aralığı için, a'yı içeren ve $J \cap X \subseteq f^{-1}(I)$ ilişkisini sağlayan bir J açık aralığının varlığı olduğunu kanıtlayın. (10 puan.)

12. $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f 'nin her yerde sürekli olması için yeter ve gerek koşulun, "açık aralıkların bileşimi olan her U altkümesi için, $f^{-1}(U)$ altkümesi de açık aralıkların bileşimidir" olduğunu kanıtlayın. (15 puan.)