

Reel Analiz Final Soruları
Ali Nesin
26 Ocak 2000

1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ olsun. Bir $a > 1$ için $f(\ln a) = 6$ eşitliğini gösterin.
2. $\cos(15^\circ)$ 'in değerini bulun.
3. $\sin(4x)$ ve $\cos(4x)$ 'i $\sin x$ ve $\cos x$ cinsinden ifade ediniz. (Yazdığınız ifadeyi kanıtlayın).
4. $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$ fonksiyonun grafiğini mümkün olduğunca çiziniz.
5. Limit tanımını kullanarak $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x + 5) = 15$ olduğunu gösterin.
6. Sürekliliğin tanımını kullanarak $f(x) = \frac{x}{x-1}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgede sürekli olduğunu gösterin.
7. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu 0 da sürekli midir? (Cevabınızı kanıtlayın).
8. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ olduğunu gösterin.
9. $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ olsun.
 - 9a. $A = \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_n \text{ yakınsar}\}$ kümesini bulunuz.
 $x \in A$ için $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ olsun.
 - 9b. f nedir?
 - 9c. $(f_n)_n$ dizisi düzgün yakınsak mıdır?
 - 9d. $(f_n)_n$ dizisinin A 'yı içeren (açık veya kapalı) aralıklarda düzgün yakınsaklığı hakkında ne söyleyebiliriz?
10. Değişik α değerleri için,
$$1 - 1/2^\alpha + 1/3^\alpha - 1/4^\alpha + \dots$$
alterne (işaret değiştiren) serisinin yakınsaklığı ve düzgün yakınsaklığı hakkında ne söylenebilir?
11. f ve g iki sayı değerli, sürekli fonksiyon olsun. $\max\{f(x), g(x)\}$ ın da sürekli olduğunu gösterin.
12. f , $[a, b]$ aralığında sürekli, sayı değerli fonksiyon olsun. x_1, \dots, x_n 'ler de $[a, b]$ aralığından herhangi noktalar olsun. Bir $x_0 \in [a, b]$ değeri için, $f(x_0) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n))$ eşitliğini gösterin.
- 13a. e^x 'in Taylor serisini bulun.
- 13b. $[0, 1]$ aralığında e^x 'i 10'uncu dereceden Taylor polinomuyla yer değiştirerek yapılan hata terimini hesaplayın.

13c. Hangi $[0, h]$ aralığında e^x fonksiyonu ile 10'uncu dereceden Taylor polinomu arasındaki fark en fazla 10^{-7} olur?

13d. Hangi n değerleri için $[0, 1]$ aralığında e^x fonksiyonu ile n 'inci dereceden Taylor polinomu arasındaki fark en fazla 10^{-7} olur?