2. Doğal Sayılar Yapısı

Bölüm 1C'de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 sayılarını tanımladık. Ama, her sayıyı teker teker tanımlamaya zamanımız yok. Bu yaklaşımla sayıların sonunu getiremeyiz... Demek ki başka bir yaklaşım gerekiyor...

Bütün sayıları bir kalemde tanımlayabiliriz miyiz? Evet. Bu bölümde doğal sayıları teker teker değil, bir bütün olarak tanımlayacağız, yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tek bir hamlede tanımlayacağız.

Dikkat edilirse şimdilik sonsuz elemanı olan bir kümenin varlığını bilmiyoruz. Öyle bir küme olabilir de olmayabilir de, ama bu aşamada ne böyle bir kümenin olduğunu ne de olmadığını kanıtlayabiliriz[1]. Sonsuz kümelerin varlığını kanıtlamak için bir aksiyoma daha ihtiyacımız olacak. Önce bir tanım:

Tanımlar. $0 = \emptyset$ *olsun. Eğer bir* z *kümesi*,

i. $0 \in z$

ii. $y \in z \to Sy \in z$

koşullarını sağlıyorsa, z *kümesine* ***tümevarımsal*** *denir*.

1 Öte yandan, bu aşamada, yani yukardaki aksiyomlarla sonsuz elemanı olan bir kümenin varlığını kanıtlayamayacağımızı kanıtlayabiliriz. Bunu Bölüm 1B'de, Bileşim Aksiyomu'ndan hemen sonra kanıtladık.

Yani bir kümenin tümevarımsal olması için 0 (yani boşküme) o kümenin bir elemanı olmalı ve, kümenin her y elemanı için, Sy de kümenin bir elemanı olmalı.

Demek ki, eğer z tümevarımsal bir kümeyse, 0 ve ardılları, yani

$$0, S0, SS0, SSS0, \ldots$$

elemanları yani

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

"doğal sayıları" da z'nin elemanları olmalı. Tümevarımsal bir kümenin sonsuz olması gerektiği burdan belli. Yaratacağımız doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ de tümevarımsal olmalı. Ayrıca biraz düşününce (örneğin $\mathbb{N}$'de tümevarımla kanıtın geçerli olmasını istediğimiz göz önüne alınınca) $\mathbb{N}$'nin en küçük tümevarımsal küme olması gerektiği anlaşılıyor. Demek ki en küçük tümevarımsal kümenin varlığını kanıtlayıp $\mathbb{N}$'yi bu küme olarak tanımlamalıyız. Ancak bu aşamaya kadar yazdığımız aksiyomlardan sonsuz bir kümenin varlığı kanıtlanamayacağından, tümevarımsal bir kümenin varlığı da kanıtlanamaz. Bunun için yepyeni bir aksiyoma ihtiyacımız var.

A7. Tümevarımsal Küme Aksiyomu. *Tümevarımsal bir küme vardır.*

Önsav 2.1. $x \neq \emptyset$, *elemanları tümevarımsal kümeler olan ve boş olmayan bir küme olsun. O zaman* $\cap x$ *tümevarımsal bir kümedir.*

Kanıt: x'in her elemanı tümevarımsal olduğundan, 0, x'in her elemanının bir elemanıdır. Yani $0 \in \cap x$. Demek ki $\cap x$ kümesi tümevarımsal küme tanımının (i) koşulunu sağlıyor.

Şimdi $\cap x$ kümesinin ikinci koşulu sağladığını gösterelim.

$$y \in \cap x$$

olsun. Demek ki y, x'in her elemanının bir elemanı. x'in her elemanı tümevarımsal olduğundan, Sy de x'in her elemanının bir elemanıdır, yani $Sy \in \cap x$ olur. □

Şimdi artık doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin tanımını verebiliriz. Ama önce $\mathbb{N}$'nin ne olması gerektiği üzerine biraz daha düşünelim.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, her şeyden önce tümevarımsal bir küme olmalı. Çünkü 0 bir doğal sayı. Ayrıca, eğer y bir doğal sayıysa, $y + 1$ anlamına gelecek olan Sy de bir doğal sayı olmalı.

Dahası, $\mathbb{N}$ elbette en küçük tümevarımsal küme olmalı, yani $\mathbb{N}$, tüm tümevarımsal kümelerin bir altkümesi olmalı, çünkü $\mathbb{N}$, 0'dan ve 0'a S işlemini tekrar tekrar (ama sonlu kez, "sonlu" her ne demekse!) uygulayarak elde ettiğimiz elemanlardan oluşmalı. Yani

$$\mathbb{N} = \{0, S0, SS0, SSS0, ...\}$$

olmalı. (Bu yazılım her ne demekse!)

Ne kadar açıklayıcı olduğunu pek anlayamadığım bu satırlardan sonra $\mathbb{N}$'nin tanımına geçelim.

Teorem 2.2. *En küçük bir tümevarımsal küme vardır, yani tüm tümevarımsal kümelerin altkümesi olduğu tümevarımsal bir küme vardır.*

Kanıt: Tümevarımsal Küme Aksiyomu'ndan dolayı en az bir tümevarımsal küme olduğunu biliyoruz. Adına a diyeceğimiz tümevarımsal bir küme alalım. a'nın tümevarımsal tüm altkümelerini kesiştireceğiz ve elde ettiğimiz nesne bir küme olacak ve üstelik en küçük tümevarımsal küme olacak.

$x = \wp(a)$ olsun. Altkümeler Kümesi Aksiyomu'ndan (A6) x'in bir küme olduğunu biliyoruz. $\varphi(z)$ özelliği,

$$0 \in z \wedge \forall u\ (u \in z \rightarrow Su \in z)$$

olsun. Belli ki φ özelliğini sağlayan her küme tümevarımsaldır ve her tümevarımsal küme bu özelliği sağlar. Şimdi, Tanımlı Altküme Aksiyomu'ndan (A3),

$$\{z \in x : \varphi(z)\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu biliyoruz. Bu kümeye y adını verelim. Demek ki,

$$y = \{z \in x : \varphi(z)\} = \{z \subseteq a : z \text{ tümevarımsal}\}.$$

$a \in y$ olduğundan $y \neq \emptyset$ olur. Ve şimdi,

$$\mathbb{N} = \cap y$$

olsun. Önsav 1.1 sayesinde $\mathbb{N}$ bir kümedir. y'nin elemanları tümevarımsal küme olduklarından, Teorem 2.1'e göre $\mathbb{N}$ tümevarımsal bir kümedir.

Şimdi $\mathbb{N}$'nin en küçük tümevarımsal küme olduğunu yani tüm tümevarımsal kümelerin bir altkümesi olduğunu kanıtlayalım. t, herhangi bir tümevarımsal küme olsun. $\mathbb{N}$'nin t'nin bir altkümesi olduğunu kanıtlayacağız. Hem t hem de a tümevarımsal olduklarından, Önsav 2.1'e göre $a \cap t$ kümesi a'nın tümevarımsal bir altkümesidir. Demek ki $a \cap t$, y'nin bir elemanıdır. Dolayısıyla $\mathbb{N}$'yi elde etmek için kesişimini aldığımız kümelerden biridir. Bundan da $\mathbb{N} \subseteq a \cap t$ çıkar. Öte yandan $a \cap t \subseteq t$. Demek ki $\mathbb{N} \subseteq t$. □

Yukarda varlığı kanıtlanan kümeye ***doğal sayılar kümesi*** adını vereceğiz ve bu kümeyi $\mathbb{N}$ simgesiyle göstereceğiz. $\mathbb{N}$'nin elemanlarına ***doğal sayı*** denir. Şimdi artık "doğal sayı"nın matematiksel anlamını biliyoruz.

Dikkat ederseniz doğal sayıları teker teker değil, hepsini birden aynı anda tanımladık, yani doğal sayılar kümesini tanımladık. Daha önceki bölümlerdeki yöntemle bu yöntem arasında radikal bir fark var.

$\mathbb{N}$ tümevarımsal bir küme olduğundan, $0 \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $Sn \in \mathbb{N}$. S'nin $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Daha biçimsel şekliyle,

$$G = \{(x, Sx) : x \in \mathbb{N}\}$$

ise, $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, G)$ üçlüsünün Bölüm 1.5'te verilen tanımıyla bir fonksiyon olduğunu göstermek istiyoruz. Bu üçlünün bir fonksiyon olduğunu kanıtlamak için, G topluluğunun bir küme olduğunu ve G'nin $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kartezyen çarpımının bir grafiği olduğunu kanıtlamak yeterli. Birincisi doğruysa ikincisi bariz olduğundan, G'nin bir küme olduğunu kanıtlamak yeterli. Bu topluluk aynen şu topluluğa eşittir:

$$\{\alpha \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists x\ (x \in \mathbb{N} \wedge \alpha = (x, Sx))\}.$$

Eğer "$\exists x\ x \in \mathbb{N} \wedge \alpha = (x, Sx)$" dizisinin bir formül olduğuna ikna olmuşsanız (olun ya da Bölüm 4A'yı okuyun!), bu topluluğun $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'nin bir altkümesi olduğu A3'ten çıkar.

($\mathbb{N}$, 0, S) üçlüsünü tanımladık. 0, $\mathbb{N}$'nin bir elemanı ve S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon. Şimdi bu sistemin (ya da yapının), Bölüm 1B'de sözünü ettiğimiz şu iki özelliği sağladığını kanıtlayacağız:

P1. S, 0 *değerini almayan birebir bir fonksiyondur.*

P2. *Eğer* $A \subseteq \mathbb{N}$,

(i) $0 \in A$, *ve*

(ii) *Her* $x \in \mathbb{N}$ *için* $x \in A$ *ise* $Sx \in A$

özelliklerini sağlıyorsa $A = \mathbb{N}$ *olur.*

P2'nin doğru olduğu çok belli, çünkü $\mathbb{N}$ en küçük tümevarımsal küme. P1'i kanıtlamamız gerekiyor.

Teorem 2.3. S, 0 *değerini almayan birebir bir fonksiyondur.*

S'nin neden 0 değerini almadığı çok belli: $x \in Sx$ olduğundan, Sx boşküme, yani 0 olamaz. Birebirliği kanıtlamak için önce bir önsava ihtiyacımız var:

Önsav 2.4. *Bir doğal sayının her elemanı o doğal sayının bir altkümesidir. Yani* n, $m \in \mathbb{N}$ *olsun; eğer* $n \in m$ *ise* $n \subseteq m$ *dir.*

Kanıt: Kanıtımızı m üzerine tümevarımla yapacağız.

Birinci Adım: Önce $m = 0 = \varnothing$ olsun. Boşkümenin her elemanının boşkümenin bir altkümesi (yani boşküme) olduğunu kanıtlamamız lazım. Buna benzer kanıtları daha önce yapmıştık. Boşkümenin her elemanı istediğimiz her özelliği sağlar: Boşkümenin her elemanı boşkümenin bir altkümesi olmasaydı, o zaman boşkümede boşkümenin bir altkümesi olmayan bir eleman olurdu, ki boşkümede hiç eleman olmadığından bu imkânsızdır.

Tümevarım Adımı. Önsavı m için doğru varsayıp (tümevarım varsayımı), Sm, yani $m \cup \{m\}$ için kanıtlayalım. Yani m'nin her elemanının m'nin bir altkümesi olduğunu varsayıp (tümevarım varsayımı), Sm'nin her elemanının Sm'nin bir altkümesi olduğunu kanıtlayalım. $n \in Sm = m \cup \{m\}$ olsun. Madem ki $n \in m \cup \{m\}$, iki şık beliriyor önümüzde: Ya $n \in m$ ya da $n \in \{m\}$.

Birinci şıkta, $n \in m$ olduğundan, tümevarım varsayımına göre, $n \subseteq m$. İkinci şıkta da $n = m$. Demek ker her iki şıkta da $n \subseteq m$. Öte yandan m'nin $m \cup \{m\}$'nin, yani Sm'nin bir altkümesi olduğu belli. Demek ki $n \subseteq Sm$. □

Teorem 2.3'ün Kanıtı. n ve m iki doğal sayı olsunlar.

$$Sn = Sm$$

eşitliğini varsayalım. $n = m$ eşitliğini kanıtlayacağız. Durum simetrik olduğundan $n \subseteq m$ ilişkisini kanıtlamak yeterli, $m \subseteq n$ ilişkisi de aynı biçimde kanıtlanır. Şu ilişkileri biliyoruz:

$$n \in \{n\} \subseteq n \cup \{n\} = Sn = Sm = m \cup \{m\}.$$

Demek ki $n \in m \cup \{m\}$. Bundan da $n \in m$ ya da $n \in \{m\}$ çıkar. Birinci şıkta, yukardaki önsava göre $n \subseteq m$. İkinci şıkta $n = m$ olmalı. Bu durumda da $n \subseteq m$. □

Daha ileri gitmeden alışık olduğumuz tümevarımla kanıtın doğal sayılarda neden geçerli olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 2.5. $\varphi(n)$, *n doğal sayısıyla ilgili bir formül olsun. Eğer* $\varphi(0)$ *doğruysa ve her n doğal sayısı için*, $\varphi(n)$ *doğru olduğunda* $\varphi(Sn)$ *de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için* $\varphi(n)$ *doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$(\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \to \varphi(Sn))) \to \forall n\ \varphi(n)$$

önermesi $\mathbb{N}$*'de doğrudur.*

Okur formülün ne demek olduğu konusuna takılmasın şimdilik. Özellikle belirtmiyoruz. İlerde her şey açıklığa kavuşacak.

Teorem 2.5'in Kanıtı: $A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \text{ doğru}\}$ olsun, yani A, φ'yi sağlayan doğal sayılardan oluşsun. Varsayıma göre $0 \in A$. Gene varsayıma göre, eğer $n \in A$ ise, $Sn \in A$. Demek ki A tümevarımsal bir küme. Ama $\mathbb{N}$ tümevarımsal her kümenin bir altkümesidir, dolayısıyla A'nın da bir altkümesidir, yani $\mathbb{N} \subseteq A$. Demek ki her doğal sayı A'da, yani φ önermesi her doğal sayı için doğru. □

Teorem 2.5'i kullanmak için, 0'nın φ özelliğini sağladığını göstermeye ***başlangıç adımı*** adı verilir. Eğer $x \in \mathbb{N}$ doğal sayısı φ'yi sağlıyorsa, Sx'in de φ'yi sağladığını göstermeye ***tümevarım adımı*** denir. Eğer bu iki kanıt yapılırsa, o zaman her $x \in \mathbb{N}$ doğal sayısının φ'nin sağlandığı gösterilmiş olur.

P1 ve P2'den S'nin nerdeyse örten olduğunu da gösterebiliriz. Bölüm 1B'de de göstermiştik bunu. Ama bu sefer P2'yi değil, Teorem 2.5'i kullanacağız.

Önsav 2.6. *S fonksiyonu, 0 dışında tüm değerleri alır, yani $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olur.*

Kanıt: Teorem 2.5'te $\varphi(n)$ formülünü

$$n = 0 \vee \exists m\ n = Sm$$

olarak alalım. Teorem 2.5'in her iki koşulu da φ formülü için bariz biçimde sağlandığından, her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ sağlanır. P1'de söylenen $0 \notin S(\mathbb{N})$ ile birlikte istediğimizi elde ederiz. □

Not 1. Önsav 2.4 doğal sayıların "özü"yle ilgili değildir. Eğer doğal sayıları başka türlü tanımlasaydık bu önsav doğru olmayabilirdi. Ama Teorem 2.3 ya da Teorem 2.5 doğal sayıların özüyle ilgilidir. Bu teoremlerin doğru olmadığı bir yapıya doğal sayılar yapısı adını vermek absürd olurdu, gerçeklikle ilgili tüm sezgilerimizle çelişirdi.

Not 2. Böylece P1 ve P2 aksiyom sisteminin de doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı bulmuş olduk. Bölüm 3'te N'de toplama, çarpma ve sıralamayı tanımlayacağız ve başat özelliklerini kanıtlayacağız. Bölüm 4'te, adına Peano Aksiyomları denen, P1 ve P2'den değişik bir aksiyom sistemini tanıtacağız ve kitabın sonrasında P1 ve P2'yi (ve kümeler kuramını) tamamıyla unutup bu yeni aksiyom sisteminde çalışacağız.Öte yandan [AKK] ders notlarımızda P1'e ve P2'ye ve hatta $\mathbb{N}$, S ve 0'ın tanımlarını anımsamak zorunda kalacağız.

Not 3. Doğal sayıları P1 ve P2 önermeleriyle (ya da aksiyomlarıyla) tanımlamak Dedekind'in fikridir ama daha çok Peano'nun olarak bilinir. Fikri Dedekind'de bulduğunu Peano'nun kendisi ifade etmiştir.

Not 4. Teorem 2.5'i kanıtlamak için P2'yi kullandık (ve başka bir şey de kullanmadık). Bunun diğer istikameti de doğrudur: Eğer Teorem 2.5 doğruysa P2 de doğrudur. Nitekim P2'nin varsayımını sağlayan bir A kümesi için Teorem 2.5'i

$$n \in A$$

formülüne uygularsak, P2'nin sonucunun da doğru olduğunu, yani $A = \mathbb{N}$ eşitliğini görürüz. (Arife not: Açıkça söylemedik ama formüllerimizde parametre kullanabileceğimizi varsayıyoruz, Teorem 2.5 bu durumda da doğru. Ayrıca formüllerimiz kümeler kuramının formülleri, yani $\in$ simgesine izin var.)

2A. Kümeler Kuramının Kullandığımız Aksiyomları

Daha önceki bölümlerde kümeler kuramının birkaç aksiyomunu verdik. O aksiyomları (metinde yer aldığı sırayla değil, bir başka sırayla) yazalım:

A1. Boşküme Aksiyomu. Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.

A2. Eşitlik Aksiyomu. Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.

A3. Tanımlı Altküme Aksiyomu. Eğer φ bir özellikse ve x bir kümeyse, x'in sadece ve sadece φ özelliğini sağlayan elemanlarını eleman olarak içeren ve bunlardan başka bir eleman içermeyen bir küme vardır.

A4. Bileşim Aksiyomu. Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.

A5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu. Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.

A6. Altkümeler Kümesi Aksiyomu. Eğer x bir kümeyse, eleman olarak sadece ve sadece x'in altkümelerini içeren bir küme vardır.

A7. Tümevarımsal Küme Aksiyomu. Tümevarımsal bir küme vardır.

A8. Temellendirme Aksiyomu. Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'te $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.

A3 bir tek aksiyom değildir. O aksiyom her φ özelliği için bize ayrı bir aksiyom verir. Yani üçüncü aksiyom, aksiyomdan ziyade bir "aksiyom şeması"dır. A8'i isterseniz yok sayabilirsiniz. Hiç kullanmayacağız. Standart matematikte de pek kullanılmaz. Daha çok kümeler teorisinde kullanılır.

İlk dört aksiyomla $\emptyset$'den başka bir küme olduğu kanıtlanamaz.

A7 olmadan sonsuz elemanlı bir kümenin olduğu kanıtlanamaz.

Kümeler kuramının başka aksiyomları da vardır. O aksiyomları ve ne işe yaradıklarını [AKK]'da göreceğiz. Bu ders notlarının sonuna kadar A1-A7 aksiyomları bize yetecek.

A3 ve A7'den A1 çıkar.

Bir sonraki kitapta ([AKK]'da) sunacağımız Yerleştirme Aksiyomu'ndan yararlanarak A5 kanıtlanabilir.

2B. Ernst Zermelo
(1871-1953)

Alman matematikçi. Aksiyomatik kümeler kuramının en önemli kurucularından biridir. Babası üniversitede öğretim üyesi olduğundan, akademik kariyere yönelmesi ailesi tarafından teşvik edilmiştir. Üniversitede matematik, fizik ve felsefe okumuştur.

Akademik yaşamına analizle başlamış, uygulamalı matematiğe ve fiziğe yönelmiş, daha sonra o zamanlar matematiğin hiç kuşkusuz en önemli merkezi olan Göttingen'e geçince, Hilbert'in etkisiyle kümeler kuramına ilgi duymuş ve 1904'te her kümenin iyi sıralanacağını kanıtlamıştır, yani herhangi bir X kümesinde öyle bir $<$ ikili ilişkisi vardır ki,

(i) X'in herhangi iki x ve y elemanı karşılaştırılabilir, yani ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$.

(ii) Eğer $x, y, z \in X$ ise ve $x < y$ ve $y < z$ ise, o zaman $x < z$.

(iii) X'in boş olmayan herhangi bir altkümesinin $<$ ilişkisi için bir en küçük elemanı vardır.

Zermelo, Skolem ve Fraenkel'in aksiyom sisteminde (ZFC'de) sonsuz sayıda aksiyom vardır. Montague 1961'de bu sistemin sonlu sayıda aksiyoma indirgenemeyeceğini kanıtlamıştır. Gödel, Bernays ve von Neumann'ın bulduğu aksiyom sistemi (GB) sonludur ve her iki sistemde de kümelerle ilgili aynı sonuçların kanıtlanacağı biliniyor. Ancak GB siteminde küme olmkayan sınıflardan da söz edildiğinden, sonlu olmasına karşın, bir anlamda GB sistemi ZFC'den daha karmaşıktır diyebiliriz. Bir başka deyişle, ZFC sisteminin dili $\forall$, $\vee$, $=$ gibi standard matematik simgeleri dışında sadece $\in$ simgesini kulanırken, GB sistemi $\in$ simgesi dışında, küme olmayan topluluklardan sözedebilmek için ikinci bir simge daha kullanmaktadır.

Aslında Hilbert daha çok Cantor'un şu sorusuyla ilgileniyordu: Ne doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yle ne de gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yle arasında eşleşme olan sonsuz bir gerçel sayı kümesi var mıdır? Hilbert bu soruyu o kadar önemli buluyordu ki, 1900'de Paris'te yaptığı ünlü konuşmada, bu soruyu sorular

listesinin en başına almıştı. Bu soruya yaklaşabilmek için de, daha kolay bir soru olarak addettiği, Zermelo'ya yukardaki soruyu sormuştu. Hilbert haklıydı, Cantor'un sorusu çok daha zordur. Kurt Gödel 1940'ta Cantor'un sorusunun olumsuz yanıtı olduğunu varsaymanın (eğer matematik çelişkisizse) matematiği ayrıca çelişkiye götürmeyeceğini kanıtladı. 1963'te Paul Cohen, Cantor'un sorusunun olumlu yanıtı olduğunu varsaymanın da matematiği çelişkiye götürmeyeceğini kanıtladı. Dolayısıyla Cantor'un sorusu ne olumlu ne de olumsuz olarak kanıtlanamaz; kümeler kuramının kimi evreninde (modelinde) doğru, kimindeyse yanlıştır.

Zermelo'nun kanıtının bugün Seçim Aksiyomu [bkz. SKK] diye adlandırılan bir aksiyoma dayanması matematik dünyasında hiç hoş karşılanmadı. 1908'de yoğun eleştirilere yanıt olarak aynı teoremin bir başka kanıtını yayımladığı makalesinde Zermelo, hem kanıtını daha kabul edilir bir biçimde sunuyor hem de başkalarının da farkına varmadan Seçim Aksiyomu'nu kullandığını gösteriyordu.

Zermelo, Russell paradoksuna benzer paradokslar keşfetmesiyle, kümeler kuramını aksiyomatik olarak inşa etmek istedi. Uzun uğraşlarına karşın bulduğu sistemin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamadı (bunu kanıtlamanın imkânsız olduğunu bugün Gödel sayesinde biliyoruz), gene de bulgularını 1908'de yayımladı. Zermelo'nun aksiyomları, bugün kabul edilen kümeler kuramı aksiyomlarının çoğunluğunu teşkil eder. Skolem ve Fraenkel 1922'de bu aksiyomlara ek yaparak bugün matematikçilerin çoğunluğu tarafından kabul edilen kümeler kuramını kurmuşlardır.

Zermelo 1935'te Hitler rejimine tepki olarak akademik yaşamdan çekilmiştir. Savaştan sonra tekrar profesörlüğe getirilmesini istemiş ve kendisine 1946'da onursal profesör unvanı verilmiştir.