Birinci Kısım:

Biraz Kümeler Kuramı ve Doğal Sayılar

0A. Gerçek Nedir Ne Değildir?

Gerçek nedir, var mıdır, varsa benden bağımsız mıdır ve ona nasıl ulaşılır? Doğru nedir? "Anlamak" ne demektir? Bir şeyi nasıl anlarız ve anladığımızı nasıl anlarız? Düşünmek ne demektir? Bazı verilerden bir başka sonuç nasıl, hangi kurallara göre çıkarılır? Kanıt nedir? Bu ve benzeri soruları sürekli sormadan, verilen yanıtları sürekli sorgulamadan tam anlamıyla aydın olunamaz.

Her aydın bu soruların yanıtlarını vermelidir demiyoruz, çünkü bunlar yanıtsız sorular da olabilir, biz sadece aydının bu konularda sürekli düşünmesi ve kendi kendine tartışması gerektiğini söylüyoruz.

Aydın, kendi çıkarlarını gözardı ederek ve toplumun çıkarlarını düşünerek toplumu yönlendirmek ve değiştirmek isteyen kişidir. Bizce... Aydın bu görevini yazarak, çizerek, çalıp söyleyerek, konuşarak yerine getirir, dolayısıyla aydın topluma mesaj iletir. Eğer sorumluluk sahibiyse, ki öyle olması gerekir, aydının topluma verdiği mesaj hakkında düşünmesi gerekir. Bu da ister istemez yukardaki soruları sordurtur.

Ahmet'in ya da Ayşe'nin gerçeği (ya da doğrusu) değişik olabilir, Ahmet ve Ayşe olayları değişik yaşayabilirler. Gerçek, kişiden kişiye değiştiği gibi coğrafyadan coğrafyaya da değişir:

Türkiye'nin gerçeğiyle ABD'nin gerçeği bir olamaz. Gerçek, kişiye ve coğrafyaya göre değiştiği gibi zamana göre de değişir: Ortaçağ'ın gerçeğiyle bugünün gerçeği bir değildir.

Bunlar herkesin bildiği, kahvede bile duyabileceğimiz beylik sözler. Herhalde bunlardan söz edeceğimi sanmıyorsunuz bir matematik kitabında!

Gerçeğin ve doğrunun kişiye, coğrafyaya ve tarihe göre değişeceğini söylerken, sözünü ettiğimiz gerçeğin ya da doğrunun ne olduğunu biliyor muyuz? Gerçek ya da doğru üzerine herhangi bir söz edebilmek için önce bu kavramların ne olduklarını bilmeliyiz. Tanımı bilinmeyen bir kavram üzerine ne söyleyebiliriz ki?

Demokrasi en iyi yönetim biçimidir tümcesini ele alalım. Bu tümce ne kadar doğrudur? Böyle bir ifadenin doğru olması için her şeyden önce "demokrasi"nin tanımlanması gerekir. Demokrasi tanımlandıktan sonra "yönetim biçimi" tanımlanmalı. Arkasından "en iyi" tamlaması tanımlanmalı. Ve tüm bu tanımlar yapıldıktan sonra "demokrasi en iyi yönetim biçimidir" tümcesi kanıtlanmalı. İşte ancak o zaman "demokrasi en iyi yönetim biçimidir" tümcesi doğru olabilir.

Tabii, bir başkası, "benim 'demokrasi', 'yönetim biçimi' ve 'en iyi' tanımlarım değişik" deyip sizin gerçek diye sunduğunuz önermeyi reddedebilir. Ama siz de buna karşı, "Bu kavramlara benim verdiğim tanımlarla önerme doğrudur" diyebilirsiniz. Eğer kanıtınız doğruysa kimse buna karşı çıkamaz. (Kanıtın ne olduğu, bir kanıtta hangi akıl yürütmelerin yapılabileceği de gerçeğin ne olduğu konusuyla yakından ilişkili bir sorudur.)

"Demokrasi"nin tanımı ne olmalıdır tartışması başka bir tartışmadır, "doğru/gerçek nedir?" tartışmasına dahil değildir, ya da çok ucundan, çok dolaylı olarak dahildir.

Yukarda tanımlardan ve kanıttan sözettik. Ancak kullanılan sözcüklerin tanımları verildikten ve tümcenin ya da önermenin anlamı iyice anlaşıldıktan sonra tümcenin kanıtlanması gerektiğini söyledik. Kanıt üzerine daha çok yoğunlaşmak için anlamı bilinen bir tümceyi ele alalım: *Ankara Türkiye'nin başkentidir*. Bu tümcenin doğru olduğundan kuşkumuz yok herhalde. Ankara'nın, Türkiye'nin ve "başkent"in tanımları belli. Peki nasıl kanıtlarsınız doğru olduğunu bildiğiniz bu tümceyi? "Anayasa'da öyle yazıyor" demeniz yeterli midir? Eğer "başkent"in tanımında böyle yazıyorsa yeterlidir elbet. Ben de size "Gösterin Anayasa'yı" derim. Diyelim Anayasa'yı buldunuz, doğru sayfayı açıp önüme koydunuz. "Nerden belli bunun gerçek Anayasa olduğu" diye sorabilirim size. O zaman birlikte Ankara'ya gideriz, TBMM tutanaklarına bakarız. Milletvekillerinin imzaları orada, hepsi Ankara'yı başkent ilan etmişler. Bu kez "Nerden belli bu imzaların sahte olmadığı?" diye sorarım size...

Hiçbir biçimde Ankara'nın Türkiye'nin başkenti olduğunu kanıtlayamazsınız. Tüm Türkiye tek ağızdan "Ankara Türkiye'nin başkentidir" diye bağırsa, gene de ikna olmam. Büyük bir olasılıkla öyledir, Ankara gerçekten Türkiye'nin başkentidir ama yüzde yüz ikna edilemem. Belki benim tuhaf bir hastalığım vardır, bu öyle bir hastalıktır ki, Türkiye'nin başkentinin Ankara olmadığını öğrendiğim anda öleceğim... Herkes bunu biliyor ama ben bilmiyorum. İsterseniz paranoya deyin, ama içime öyle bir kuşku düşüverdi birden. Öleceğimi bildiğinizden ve ölmemi istemediğinizden bana numara yapıyorsunuz, oyun oynuyorsunuz. Çocukluğumdan beri kandırılmışım... Benim için özel gazeteler basılmış, özel haritalar çizilmiş... Hâlâ daha kandırıyorsunuz... Yutmam!

Elinize bir elma alın. Bu elmayı bırakırsanız ne olur? Elma düşer. Öyle mi? Nerden biliyorsunuz elmanın düşeceğini?

Bırakırsınız elmayı, elma gerçekten düşer.

– İşte, dersiniz bana, elma düştü.

Gerçekten de elma düştü. Gözlerimle gördüm. Haklıymışsınız.

– Peki... Bir daha bıraksanız ne olur acaba?

– Gene düşer elbet!

– Nerden belli?

– Çünkü hep düştü!

– Biliyorum hep düştüğünü, ama bundan sonra ne olacak acaba?

– Gene düşecek...

– Nerden biliyorsunuz hep düşeceğini?

– Bugüne kadar hep düştü, bundan sonra da hep düşecek...

– Bugüne kadar elmanın hep düşmesi bundan sonra da elmanın hep düşeceği anlamına gelmez ki!

– Gelir...

– Neden?

– Çünkü aynı koşullarda tekrarlanan deneyler aynı sonuçları verir...

– Neden?

– Bu bir ilkedir, fizik ilkesi! Bunu da mı bilmiyorsun!

– Biliyorum ya da bilmiyorum... Ama siz nerden biliyorsunuz bu ilkeyi? Bu ilkeye göre ben hiç ölmeyeceğim, çünkü bugüne dek hiç ölmedim!

İşte burada çuvallarsınız. Aynı koşullarda tekrarlanan deneylerin aynı sonuçları verdiğini kanıtlayamazsınız. Dolayısıyla elmanın da hep yere düşeceğini kanıtlayamazsınız.

Bir gün bir içki masasında bu konulardan söz ederken, hatta önümüzdeki şişenin var olup olmadığından bile emin olamayacağımızı söylerken, bir arkadaşım,

– Şimdi, dedi, kafana geçiririm bu şişeyi, anlarsın şişenin gerçek olup olmadığını!

Çok komik! Ben dahil hepimiz güldük. Konunun derinliğine yakışan ciddiyete geçtiğimizde şöyle yanıtladım arkadaşımı:

– Kafama bir şey geçirmişsindir ve ben sersemlemişimdir. Bundan benim kuşkum olmayabilir. Ama, bir, kafama gerçekten şişe mi geçirdin? İki, kafama gerçekten bir şişe geçirmiş olsan bile, bunu başkalarına kanıtlayabilir miyiz? Senin bu eylemini filme alıp cümle âleme göstersek bile, filmin sahte olduğunu öne sürüp inanmayanlar olabilir. Saddam'ın yakalandığına bile inanmayanlar var, sahtesinin yakalanmış olacağını öne sürüyorlar! Başkasını ikna edemediğin bir önerme gerçek addedilebilir mi? Gerçek, başkasını ikna edebildiğin ölçüde gerçektir!

Bu son söylediğim gerçeğin bir tanımı olabilir mi? Felsefi anlamda bilmiyorum ama matematiksel anlamda "gerçek", istisnasız herkesi doğruluğuna yüzdeyüz ikna edebileceğimiz önermedir.

Bu anlamda tek bir gerçek vardır, o da matematiksel gerçektir. Bu anlamda başka gerçek yoktur, olamaz. Matematiksel gerçeği de sadece zihnimizde algılarız.

Bu kitapta, örneğin, 2 + 2 = 4 "gerçeği"nin matematiksel anlamda nasıl gerçek olduğunu göreceğiz, diğer tür gerçeklerle arasındaki farkı irdeleyeceğiz.

0B. Doğal Sayılar Ne Kadar Doğaldır?

Bu kitapta sayıları "anlayacağız." Mesela doğal sayıları anlayacağız. "Sayıları anlamak" deyince, sanki bizim dışımızda bir yerde, çok belirgin ve fiziksel bir biçimde sayılar var da biz onları anlamak istiyoruz gibi bir anlam çıkabilir.

"Anlamak" üzerine düşünelim biraz. Anlamak ne demektir? Neyi, nasıl ve ne dereceye kadar anlayabiliriz? Anlama çeşitleri nelerdir? Bu tür sorularla ilgileneceğiz bu bölümde. Derin felsefe... Daha derini yok! Ya da ben bilmiyorum.

"Sayıları anlamak"la "zürafaları anlamak" arasında bir ayrım var mı? Var gibi… Zürafalar orada. Karşımdalar. Otluyorlar, geziniyorlar, koşuşuyorlar. Görüyorum onları. Zürafaların sindirim sistemini anlamaya çalışabilirim örneğin. Çünkü o sindirim sistemi orada. Benden bağımsız bir biçimde var.

Oysa sayılar ortalıkta görünmüyorlar. Ben hiç beş görmedim hayatımda, bundan sonra da görmeyeceğim. Şimdiye kadar kimse "çok güzel bir beş geçti kapımın önünden" dememiştir, çünkü beş geçmez, beş yürümez, beş kırılmaz, beş uçmaz, beş susamaz, acıkmaz, yaşlanmaz, ölmez… Beş hiçbir şey yapmaz! Oysa zürafa bir şeyler yapar…

Zürafa orada. Bu çok belli. Oysa beş'in ne kadar orada olduğu pek belli değil.

Zürafayı alır karşıma incelerim, ama ya beş'i?

Her ne kadar "beş zürafa" bir anlam ifade ediyorsa da, tek başına "beş"in ne anlama geldiği o kadar belli değil.

"Beş zürafa" bir anlam ifade ediyor mu dedim? Yanıldım galiba... "Bir zürafa"nın anlamı ve hatta fiziksel varlığı bile tartışılabilir, çünkü o "bir zürafa" durmadan değişmektedir. O durmadan değişen zürafaya sanki hiç değişmezmiş, sanki sabit bir varlıkmış gibi "zürafa" denmesi tam gerçeği yansıtmaz. Her zürafa bir diğerinden değişiktir ve her zürafa her an değişir. "Bir zürafa" değil, durmadan değişen zürafalar vardır! Hatta daha doğmamış zürafalar bile vardır! Dolayısıyla aslında "zürafa" da bir kavramdır. "zürafa", "zürafa" adını verdiğimiz durmadan değişen varlıkların ortak adıdır. "Zürafa" sanıldığından daha soyut bir şeydir.

Peki zürafa bir kavramsa, "beş zürafa" ne demektir? Aynı kavramdan beş tane olur mu? Galiba "beş zürafa", "zürafa kavramının kapsamına giren varlıkların beşi" anlamına geliyor... O varlıklar da durmadan değiştiklerinden tümüyle kavrayamayacağımız, bütünüyle algılayamayacağımız şeyler. Birini bile kavrayamazken biz beşinden sözediyoruz...

Hayvan zürafa ölür, kavram zürafa ölmez. Hayvan zürafa durmadan değişir, kavram zürafa hiç değişmez. Hayvan zürafayla kavram zürafayı birbirine karıştırmamak lazım. Kavram zürafa beş'e çok daha yakın.

Konu gittikçe karmaşıklaşıyor ve içinden çıkılmaz bir hal alıyor.

Neyse ne!.. Sonuç olarak zürafa ne de olsa zürafadır. Oradadır. Yadsınamaz bir biçimde, ya da çok zor yadsınır bir biçimde... Oysa sayılar bir zürafa kadar orada değiller.

Sayıları göremiyoruz diye sayılar yok diyebilir miyiz? Belli ki sayılar var. Bakın, sözünü ediyorum şimdi ve anlaşıyoruz. Sayılar, hiçbir yerde olmasalar beynimizde varlar. Zihinsel bile olsalar varlar. Zürafalarla aynı düzlemde değil belki ama "beş" de var. Descartes yazsaydı bu satırları, "beş'i düşünüyorum demek ki beş var" derdi. Haklı olarak…

Çoğu insanın bir elinde beş parmak vardır. Bunu herkes bilir. Demek ki hepimizin uzlaştığı bir beş kavramı var. İçinde "beş" geçen bu önermeyi hepimiz anlıyoruz ve doğru buluyoruz. Demek ki "beş"e ortak bir anlam verebiliyoruz. Tüm insanların beş'e ortak bir anlam vermeleri, herhalde ancak beş'in bizden bağımsız bir biçimde var olmasıyla olabilir.

Kaldı ki, beş kavramı birbiriyle hiç ilişkisi olmamış uygarlıklar tarafından birbirinden bağımsız olarak da bulunmuştur. Demek ki bizim dışımızda bir yerde var bu "beş"… Öyle olmalı… Beş var ki, biraz düşünebilen her uygarlık belli bir seviyeye gelince beş'i kavrıyor ve kavram olarak benimsiyor.

Akıllı uzaylılar varsa, onlar da beş kavramını bir süre sonra yaratırlar/bulurlar. Mutlaka… Öyle sanıyorum. Beş kavramı sadece dünyamıza özgü değil. Tüm evrende, doğada, her yerde olan bir kavram.

Galiba "beş" salt zihinsel değil... O da orada, bizim dışımızda bir yerde. Tam nerede bilmiyorum ama oralarda bir yerlerde bir "beş" olmalı. Görmesek de, dokunmasak da o beş bizim beşimizdir. Beş'in kendisi olmasa ("beş'in kendisi" ne demekse!) bile beş kavramı benim dışımda bir yerde var. Sadece düşünce olarak var – başka türlü var olamaz – ama var… (Benden bağımsız düşünce olabilir mi doğada? Felsefi soruların şahı!) Var ki hepimiz anlaşıyoruz beş konusunda.

Belki de doğa bana "beş beş beş" diye fısıldıyor ve ben beynimi kullanarak o beş kavramını yaratıyorum/buluyorum.

Sayıları anlamak gibi son derece masum bir uğraş bizi varlık ve yokluk gibi çok derin felsefi sorulara götürdü…

Sorularıma tam yanıt veremedim. Birtakım çıkarımlarda bulunup sayıların orada bir yerde oldukları sonucunu çıkardım ama bu çıkarımlarımdan ben de pek emin değilim, yüzde yüz ikna olmadım, ben ikna olsam da sizi ikna edemiyor olabilirim.

Matematik dünyasından çok çıktık…

Yanıtını bulamadığımız sorularla zaman harcamayıp devam edelim…

Doğada var ya da yok, beş'i anlamak istiyorum. Beş'i anlamak için önce beş'in ne olduğunu bilmeliyim. Yani beş'i tanımlamalıyım.

Bir deneme yapalım: Beş'i bir elin parmak sayısı olarak tanımlayalım. Bir an için bu tanımı kabul edip beş'i anlamaya çalışalım…

Beş'i tanımladıktan sonra beş'i anlamak ne demektir sorusu geliyor akla. Beş'in nesini anlayacağım? Beş'i tek başına değil, beş'in öbür sayılarla olan ilişkisini anlamak istiyorum. Örneğin 5 + 3'ü bulmak istiyorum. "Üç parmak"ı da tanımladığımızı varsayarak, 5 + 3 sayısını beş parmağın yanına öbür elin üç parmağı daha geldiğinde elde edilen parmak sayısı olarak tanımlayabiliriz.

Nitekim beş parmağınızın yanına öbür elinizin üç parmağını getirseniz sekiz parmak elde edersiniz. Deneyin göreceksiniz. Tekrar tekrar deneyin, hep aynı sonucu, "sekiz parmak" sonucunu alacaksınız. Ancak bir sorun var burada. Deneyerek gördüğünüzü kanıtlayamazsınız. Beş elmayla üç elmayı yanyana koyduğunuzda sekiz elma elde edeceğinizi hiçbir zaman kanıtlayamazsınız. Çünkü önermeniz deneye bağlı. O deneyin sonsuza kadar aynı sonucu vereceğini kanıtlayamazsınız. Dikkatinizi çekerim: Beş elmayla üç elmayı yanyana koyarsanız sekiz elma elde etmezsiniz demiyorum, sadece bu önermenizi kanıtlayamazsınız diyorum. Fiziksel deneyler matematiksel anlamda kanıtlanamazlar. "Beş elmanın yanına üç elma daha koyarsam sekiz elma elde ederim" önermesi olsa olsa (yapılmış) her bir deney için kanıtlanır, tüm genelliğiyle, gelecekte yapılacak deneyler için kanıtlanamaz. "Böyle gelmiş böyle gider" geçerli bir kanıt yöntemi değildir. En azından matematikte...

Oysa matematik kanıtlar. 5 + 3 = 8 eşitliğini kanıtlamalıyız… Kanıtlamadan olmaz.

Ayrıca "beş"i bir eldeki parmak sayısı olarak tanımlasam, çok çok büyük sayıları nasıl tanımlayacağım? Hatta genel olarak "sayı" kavramının kendisini nasıl tanımlayacağım? Bir, iki, üç, dört, beş tanımlandı. Altıyı da tanımladık, yediyi de... Günün birinde durmam gerekecek, sonsuza kadar sayı tanımlayacak değilim ya... Sayıları teker teker tanımlamakla sayı kavramını tanımlamak arasında da bir ayrım vardır.

Ne yapacağız?

Önce şunu yapacağız: Günlük dilde kullandığımız ve aslında ne demek olduğunu bilmediğimiz beş'le daha sonraki yazılarda tanımlayacağımız beş'i birbirinden ayıracağız. İkincisi matematiksel beş olacak. Matematiksel beş'in sizin elinizin parmak sayısıyla hiçbir ilgisi olmayacak, ya da çok az ilgisi olacak.

Yepyeni bir beş kavramı tanımlayacağız. Matematiksel olarak…

Nasıl yapacağız bunu?

Nasıl yapacağımız hiç önemli değil! Beş'i nasıl tanımladığımızın hiç mi hiç önemi olmayacak. Beş'i, üç'ü, sekiz'i ve toplamayı öyle tanımlayacağız ki 5 + 3 = 8 eşitliği doğru olacak. Önemli olan, sayıları ve işlemleri nasıl tanımladığımız değil, tanımladığımız sayı ve işlemlerin istediğimiz özellikleri sağlamaları… İşte bu, matematiği matematik yapan niteliklerin en önemlilerinden biridir. Daha doğrusu modern matematiği modern matematik yapan budur. Matematikte kavramların nasıl tanımlandıkları değil, kavramların hangi özellikleri sağladıkları önemlidir.

Matematiğin bu bakış açısı sadece sayılar için değil, her kavram için geçerlidir. Noktaların, doğruların, düzlemlerin nasıl tanımlandıkları önemli değildir, nasıl tanımlanırlarsa tanımlansınlar, önemli olan bu kavramların istediğimiz özellikleri sağlamalarıdır.

İlk birkaç bölümde sıfır, bir, iki, üç gibi birkaç doğal sayıyı teker teker tanımladıktan sonra, ilerki bölümlerde genel olarak doğal sayı kümesini tanımlayacağız. Bu daha zor olacak.

İşte böyle... Doğal sayıları ve toplamayı tanımlayacağız. Tanımımız bize $2 + 2 = 4$ eşitliğini verecek. Ayrıca

$$x + y = y + x$$

eşitliğini de verecek. Çarpmayı da tanımlayacağız. Göreceğiz ki

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

eşitliği geçerli. Ayrıca $2 \times 2 = 4$ eşitliğini de kanıtlayacağız.

Görüldüğü gibi okurun bilmediği şeyler kanıtlanmayacak. Yani kanıtladığımız olgular değil bu ders notlarında önemli olan. Önemli olan yöntem, konuya yaklaşım, düşünme biçimi, tanımların ve kanıtların nasıl yapıldığı vs.

1A. Doğal Sayılardan Ne İstiyoruz?

Doğal sayıları, yani 0, 1, 2, 3, ... gibi sayıları anlamak istiyoruz. Elbette doğal sayıları anlamak için önce doğal sayıların matematiksel tanımını vermeliyiz. Ama matematiksel tanımı vermeden önce de doğal sayıların nesini anlamak istediğimizi bilmeliyiz. Çünkü tanımı ona göre yapacağız.

Herhalde, en azından bir doğal sayıdan sonra hangi doğal sayının geleceğini (verilen doğal sayının ***ardılını***) bilmek istiyoruz, yani x verilmişse $x + 1$ sayısını bulabilmek ve $x \mapsto x + 1$ fonksiyonunun özelliklerini bilmek istiyoruz. Sonra, sanırım doğal sayıları toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz. Toplamayı ve çarpmayı anlamadan olmaz. Ta ilkokuldan beri başımızın eti yendi toplama ve çarpma için... Örneğin

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

eşitliğini kanıtlayabilmek istiyoruz. Hatta belki 5^3 gibi bir sayının üssünü almayı da becerebilmeliyiz. Ayrıca hangi sayının küçük, hangi sayının büyük olduğunu da anlamalıyız, örneğin $x^2 \geq x$ eşitsizliğini kanıtlayabilmeliyiz.

Doğal sayılarla ilgili anlamak istediklerimizi yazalım: $x + 1$ işlemi, toplama, çarpma, üs alma işlemleri ve sıralama.

Sıralamadan başlayalım. Doğal sayılardaki $x \leq y$ eşitsizliğini toplama cinsinden yazabiliriz:

$x \le y$ ancak ve ancak $x + z = y$ eşitliğini sağlayan bir z doğal sayısı varsa

ya da daha matematiksel bir dille,

$$x \le y \Leftrightarrow \exists z\ (x + z = y).$$

Görüldüğü gibi eşitsizliği toplamadan hareketle bedavadan elde ettik. Dolayısıyla, eğer toplamayı anlarsak eşitsizliği de anlarız. Böylece anlamak istediklerimizin listesinden eşitsizliği silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini, toplamayı, çarpmayı ve üs almayı anlamak istiyoruz.

Şimdi üs almaya bakalım.

$$x^0 = 1 \text{ ve } x^{y+1} = x^y \times x$$

eşitliklerinden, çarpmayı ve $x + 1$ işlemini biliyorsak güç almayı da bildiğimizi anlarız. Nitekim bu eşitliklerden örneğin şu çıkar:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2^{2+1} = 2^2{\times}2 = 2^{1+1}{\times}2 = (2^1{\times}2){\times}2 = (2^{0+1}{\times}2){\times}2 \\ &= ((2^0{\times}2){\times}2){\times}2 = ((1{\times}2){\times}2){\times}2. \end{aligned}$$

Çarpmayı biliyorsak, sağ taraftaki çarpmayı hesaplayıp 2^3 işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki anlamak istediklerimizin listesinden üs almayı da silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini, toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz.

Sıra geldi çarpmaya... Çarpmayı da toplama cinsinden yazabiliriz:

$$x \times 0 = 0 \text{ ve } x \times (y + 1) = x \times y + x.$$

Nitekim, yukardaki eşitlikleri kullanarak ve toplamayı ve $x + 1$ işlemini bildiğimizi varsayarak, örneğin 2×3 işleminin sonucunu bulabiliriz:

$$\begin{aligned} 2 \times 3 &= 2 \times (2 + 1) = 2 \times 2 + 2 = 2 \times (1 + 1) + 2 \\ &= (2 \times 1 + 2) + 2 = (2 \times (0 + 1) + 2) + 2 \\ &= ((2 \times 0 + 2) + 2) + 2 = ((0 + 2) + 2) + 2. \end{aligned}$$

Toplamayı biliyorsak, en sağdaki işlemi hesaplayıp 2×3 işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki çarpmayı da bilmek istediklerimizin listesinden silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini ve toplamayı anlamak istiyoruz.

Şimdi de toplamaya bakalım. Eğer $x + 1$ işlemini yapabiliyorsak, toplamayı da yapabiliriz. Nitekim

$$x + 0 = x \text{ ve } x + (y + 1) = (x + y) + 1$$

eşitlikleri bize toplama yapmamızı sağlar. Örneğin,

$$\begin{aligned} 2 + 3 = 2 + (2 + 1) &= (2 + 2) + 1 \\ &= (2 + (1 + 1)) + 1 \\ &= ((2 + 1) + 1) + 1. \end{aligned}$$

Eğer x verildiğinde $x + 1$ işlemini yapabiliyorsak, o zaman sağdaki işlemi yapıp $2 + 3$ işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki toplamayı da bilmek istediklerim listesinden silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini anlamak istiyoruz.

Geriye fazla bir şey kalmadı. Toplamayı, çarpmayı, üs almayı, eşitsizliği anlamak için $x + 1$ işlemini anlamalıyız. $x + 1$ işleminin özellikleri bize toplamanın, çarpmanın, üs almanın, eşitsizliğin tüm özelliklerini verecek.

Toplamanın, çarpmanın, üs almanın ve eşitsizliğin özelliklerini kanıtlayabilmek için $x + 1$ işleminin hangi özelliklerini bilmeliyim? İşte önemli ve canalıcı soru bu. Ancak bu soruyu yanıtladıktan sonra tanımlara geçebiliriz. $x \mapsto x + 1$ işleminin hangi özelliklerine ihtiyacımız olduğunu bir sonraki bölümde söyleyeceğiz.

Bir nokta okurun dikkatinden kaçmış olabilir: $x + 1$ işlemini anlamak için 1 diye bir sayıyı anlamak gerekmiyor. Biz sadece "artı bir" işleminden sözediyoruz, 1 sayısından sözetmiyoruz. belki de "artı bir" değil, tek kelimeyle yazıp "artıbir" işleminden/fonksiyonundan sözetmeliydik. Bundan sonra $x + 1$ yerine $S(x)$, hatta Sx yazalım ve "artı bir" yerine "bir sayının ardılı" terimini kullanalım. Böylece kafa karıştıran 1'den kurtulmuş oluruz. Daha sonra, ilerde, toplamayı ve 1'i tanımladığımızda Sx'in gerçekten $x + 1$'e eşit olduğunu göreceğiz.

Derin Not: Yukarda söylediklerimiz, yani toplama, çarpma ve eşitsizliğin "artıbir" fonksiyonu kullanılanarak tanımlanabilmesi sadece bir anlamda doğrudur ve bir başka anlamda yanlıştır. Söylediklerimizin hangi anlamda doğru, hangi anlamda yanlış olduğu konusu bu kitabın kapsamına girmemesi gerekir, hele bu kadar erken bir bölüme hiç girmemeli, çünkü bu son derece ilginç ve derin konu bu ders notlarında hedeflenen okurun matematiksel düzeyini aşıyor olmalı. Ama biz gene de söylediklerimizin hangi anlamda doğru hangi anlamda yanlış olduğunu metin boyunca anlatmaya çalışacağız. Olumlu sonuçları kanıtlayacağız ama olumsuz sonuçları kanıtlamada yetersiz kalacağız. Okur ileride bu satırlara geri dönerse konunun biraz daha aydınlanacağını umuyoruz. Konuyla ilgilenenler çok daha ileri seviyede bir mantık kitabına başvurmalılar.

Toplama ve çarpmayı bir formülle tanımlamak için S (yani artıbir fonksiyonu) ve 0 terimleri yetmez, ayrıca kümeler kuramının tüm gücünü kullanmak gerekir. İleride bunu yapacağız.

Konuya biraz aşina olanlar için tanımlanabilme problemini biraz açalım. Presburger'ın bir teoremine göre, doğal sayılarda toplamayla ve (altkümelerle değil) doğal sayılarla (elemanlarla yani) ilgili her türlü sorunun doğru olup olmadığı bir bilgisayar programı yardımıyla anlaşılabilir. Eğer çarpma toplamadan hareketle tanımlanabilseydi, o zaman toplama ve çarpmayla ilgili tüm soruların da bir bilgisayarla yanıtlanabilir olması gerekirdi, ki Gödel'in ikinci eksiklik teoreminden bunun böyle olmadığını biliyoruz. Demek ki çarpma toplamadan hareketle, dolayısıyla S'den hareketle de tanımlanamaz.

S fonksiyonundan hareketle eşitsizliğin tanımlanamayacağı biraz model teorisi bilgisiyle oldukça kolay bir kanıtla gösterilebilir. (S'nin teorisinin bir modelini iki değişik biçimde (S, <)'in modeli olacak biçimde - örneğin $x < Sx$ olacak biçimde - tamsıralamak yeterli.)

Öte yandan eşitsizliğin toplama yardımıyla tanımlanabileceği bariz:

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists z\ x + z = y.$$

Verilmiş bir n doğal sayısıyla toplama, yani $f_n(x) = x + n$ fonksiyonu, "artıbir" fonksiyonuyla tanımlanabilir elbette, bunun için "artıbir" fonksiyonunu n defa uygulamak yeterlidir, yani $S^n = f_n$.

Ama her x ve y için $f(x, y) = x + y$ değerini veren bir fonksiyon S ve 0 ile tanımlanamadığı gibi, S, 0 ve eşitsizlikle de tanımlanamaz (bkz. Karlis Podnieks'in http://www.ltn.lv/gt3.html#BM3_1 sayfası). Bir başka deyişle, yaygın bir inancın tersine,

$$x + 0 = x \text{ ve } x + Sy = S(x + y)$$

formülleri ($\mathbb{N}$, 0, S) yapısında toplama fonksiyonunu tanımlamaz. Benzer sorun çarpmada da yaşanır.

Öte yandan S fonksiyonuyla yetinmeyip, kümeler kuramının tüm gücünü kullanma yetkisini alırsak, o zaman bu bölümde söylediklerimizin istisnasız her biri doğrudur ve elinizin altındaki ders notlarının birinci kısmında her şey kanıtlanacaktır.

Bu satırları hiç yazmamışız gibi devam ediyoruz.

1B. Doğal Sayılar Ne Olmalı?

Bir önceki bölümde, doğal sayılarda toplamayı, çarpmayı, üs almayı ve eşitsizliği anlayabilmek için

$$x \mapsto x + 1$$

kuralıyla tanımlanan "artı bir" ya da "ardılı" işlemini anlamamızın yeterli olduğunu gördük.

Burada, şu soruyu sorup yanıtlayacağız: "Ardılı" işleminin nesini bilmeliyiz ki doğal sayılarla ilgili anlamak istediğimiz "her şeyi" anlayalım? Bu soruyu birçok ünlü matematikçi, mantıkçı ve filozof sormuştur. Biz burada Dedekind ve Peano'nun izinden yürüyeceğiz.

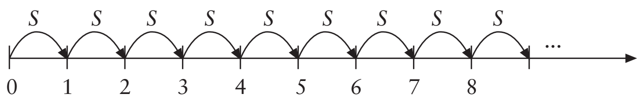
Bundan böyle $x + 1$ yerine Sx yazalım[1], ki $x + 1$ işleminin 1'le ilgili bir işlem olduğu gibi aslında pek de yanlış olmayan ama başlangıçta bizi yanlış yönlendirebilecek bir fikre saplanmayalım. Sx'e x'in ***ardılı*** adını vereceğiz.

Bu bölümde çnce doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin ne olduğunu bildiğimizi varsayıp, S fonksiyonunun başat özelliklerini bulacağız. "$\mathbb{N}$'nin ve S'nin ne olması gerektiğini" bölümün en sonunda göreceğiz.

---

1 Bu S, "sonraki" anlamına gelen İngilizce "successor" ve Fransızca "successeur" sözcüklerinin baş harfidir, rastlantı Türkçe "sonraki" sözcüğününün değ başharfidir!

İlk Özellik. Her şeyden önce S, doğal sayılar kümesinden gene doğal sayılar kümesine giden bir fonksiyondur[2], daha



doğrusu olmalıdır. S'nin doğal sayılara ne yaptığının resmini yukarda çizdik.

Ayrıca, S birebir bir fonksiyondur, yani eğer x ve y doğal sayıları için $Sx = Sy$ eşitliği geçerliyse $x = y$ eşitliği de geçerlidir[3]. Bir başka deyişle ardılları eşit olan sayılar eşittir.

Peki S, örten[4] midir, yani her doğal sayı, bir doğal sayının ardılı mıdır? Hayır değildir. 0 sayısı hiçbir doğal sayının ardılı değildir. (Ama S fonksiyonu neredeyse örtendir, örten olmasına ramak kalmıştır: 0 dışında her sayının bir öncesi vardır ve 0 dışında her sayı kendisinden hemen önce gelen sayının ardılıdır...) Yani S fonksiyonu $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden ve hiç 0 değerini almayan birebir bir fonksiyondur.

İkinci Özellik. S fonksiyonunun bir başka önemli özelliği daha vardır: A, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin bir altkümesi olsun. Eğer 0, A'nın bir elemanıysa ve A'daki her x elemanı için x'in ardılı olan Sx elemanı da A'daysa o zaman $A = \mathbb{N}$ olur. Bir başka deyişle, $\mathbb{N}$'nin, 0'ı içeren ve içerdiği her elemanın ardılını da içeren her A altkümesi $\mathbb{N}$'ye eşittir, yani,

(i) $0 \in A$, ve
(ii) her $x \in A$ için, $Sx \in A$

2 Henüz doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımlamadık. Bunu daha sonraki yazılarda yapacağız. Şimdilik, $\mathbb{N}$ diye bir kümemiz olduğunu varsayıp sezgisel takılıyoruz. Yani düşünüyoruz. Bölümün sonunda $\mathbb{N}$'nin ne olması gerektiğini göreceğiz. $\mathbb{N}$'nin ne olması gerektiğini gördükten sonra $\mathbb{N}$'nin varlığını kanıtlamalıyız. Bunu da daha sonraki bölümlerde yapacağız.

3 Eğer $x + 1 = y + 1$ ise $x = y$ eşitliği de doğrudur, bunu herkes bilir!

4 $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $y \in Y$ için $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa, f fonksiyonuna ***örten*** denir.

ise o zaman $A = \mathbb{N}$ olur. Nitekim, bu iki koşulu sağlayan bir A kümesi alalım. 0'ın A'da olduğunu (i)'den dolayı biliyoruz. (ii)'de x yerine 0 alırsak, $0 \in A$ olduğundan, 0'ın ardılı olan $S0$ sayısının, yani 1'in de A'da olduğunu anlarız. İkinci önermede bu kez x yerine 1 alalım; demek ki 1'in ardılı $S1$, yani 2 de A'da. Şimdi, ikinci önermede x yerine 2 alalım, böylece 3'ün de A'da olduğunu görürüz. Bunu böyle sürdürürsek, 4, 5, 6, ... sayılarının, yani her doğal sayının $\mathbb{N}$'de olduğunu anlarız.

Yukarda verdiğimiz bir kanıt değildir, sadece okuru ikna etmeye yarayan bir nevi akıl yürütmedir. Çünkü doğal sayıları matematiksel olarak henüz tanımlamadık ve tanımlamadığımız bir nesne hakkında herhangi bir şey kanıtlayamayız. Şimdilik sadece doğal sayılar kümesinin ve artıbir fonksiyonunun ne menem şeyler olması gerektiğini anlamaya çalışıyoruz.

Bu iki özellik doğal sayıları, toplamayı, çarpmayı, üs almayı ve eşitsizliği (kümeler kuramında) tanımlamamız için yeterlidir. Bunu ilerki bölümlerde göreceğiz.

Şimdi doğal sayılar yapısının kümeler kuramında genel kabul gören tanımını verelim.

Doğal sayılar yapısı (ya da sistemi) sadece bir küme değildir. Tanımda $\mathbb{N}$ adı verilen bir küme vardır, ama bir de ayrıca 0 adı verilen bir eleman ve S adı verilen bir fonksiyon da vardır. Yani aslında "doğal sayılar kümesi" $\mathbb{N}$ değil, ***doğal sayılar yapısı*** $(\mathbb{N}, 0, S)$ tanımlanmalıdır.

Doğal sayıları sadece bir küme olarak tanımlamak çocuk oyuncağıdır. Mesele, doğal sayılarla ilgili gerçekleri bünyesinde barındıran bir aksiyom sistemi ve bu aksiyomların doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ evreni ya da daha yaygın tabiriyle modeli yaratmaktır. (Konu şimdilik karmaşık gibi görünse de birkaç bölüm sonra açıklığa kavuşacağına inanıyoruz; okumaya devam edin.)

Doğal sayılar "yapısı" (kümesi değil), hemen aşağıda açıklayacağımız P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsüdür. Buradaki $\mathbb{N}$ bir kümedir. 0, $\mathbb{N}$'nin bir elemanıdır. S ise, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyondur.

P1. S, 0 *değerini almayan birebir bir fonksiyondur.*

P2. A, *doğal sayılar kümesi* $\mathbb{N}$*'nin,*

(i) $0 \in A$, *ve*

(ii) $x \in A$ ise $Sx \in A$

özelliklerini sağlayan bir altkümesiyse o zaman $A = \mathbb{N}$ *olur.*

Biçimsel dilde P1 şöyle yazılır:

$$\forall x\ \forall y\ (Sx = Sy \to x = y) \wedge \forall x\ Sx \neq 0.$$

Formülün ilk kısmı S'nin birebir olduğunu, ikinci kısmı ise 0 değerini almadığını söyler.

P2 ise biçimsel dilde şöyle yazılır:

$$\forall A\ ((A \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in A \wedge \forall x\ (x \in A \to Sx \in A)) \to A = \mathbb{N}).$$

Yukardaki özelliklerden S'nin nerdeyse örten olması gerektiği oldukça kolay biçimde çıkar:

Önsav. P1 *ve* P2 *özelliklerini sağlayan bir* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *fonksiyonu,* 0 *dışında tüm değerleri alır, yani* $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *olur.*

Kanıt: P2'de $A = \{0\} \cup S(\mathbb{N})$ alalım. P2'nin her iki önkoşulu da A için bariz biçimde sağlandığından, $A = \mathbb{N}$ olur. P1'de söylenen $0 \notin S(\mathbb{N})$ ile birlikte istediğimizi elde ederiz. □

Her şeyi kümeler kuramında yapacağımızdan, tam ne istediğimizi daha doğru biçimde şöyle ifade edelim: Öyle bir

a) $\mathbb{N}$ kümesi,

b) $\mathbb{N}$'nin 0 adını vereceğimiz bir elemanını ve

c) Kümeler kuramının dilinde yazılmış iki değişkenli bir $\sigma(x, y)$ formülü[5]

bulacağız ki, her $x \in \mathbb{N}$ için, $\sigma(x, y)$'nin doğru olduğu bir ve bir tek $y \in \mathbb{N}$ olacak ve eğer bu $y \in \mathbb{N}$ elemanına Sx adını verirsek (ki verilmiş bir $x \in \mathbb{N}$ için y biricik olduğundan buna hakkımız

5 Standart mantıksal simgeler dışında $\in$ simgesini de kullanan sonlu uzunlukta ve "anlamlı" simge dizisi. Bkz. Bölüm 4A.

var ve bu durumda S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon olur), elde edilen $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı P1 ve P2 özelliklerini sağlayacak.

Geliştireceğimiz ve aksiyomlarını yazacağımız kümeler kuramında, P1 ve P2 özelliklerini sağlayan $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısında toplama, çarpma ve üs alma gibi işlemler tanımlanabilir ve bu işlemler tahmin edilen özellikleri sağlarlar. Ayrıca böyle bir yapıda bir sıralama da tanımlayabiliriz. Bütün bunları önümüzdeki birkaç bölümde yapacağız. Ama önce çok daha temel bir soru soralım: Yukardaki P1 ve P2 özelliklerini sağlayan $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsü var mıdır?

Evet vardır! İstenirse (ama ancak istenirse) bulunur.

Vardır da nerdedir?

Bu ilk kısmın bundan sonraki bölümlerinde bunun öyküsünü okuyacaksınız. Yukardaki özellikleri sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısını hep birlikte var edeceğiz. Sabırla. Ardından, doğal sayılarda toplamayı, çarpmayı, sıralamayı tanımlayıp bunların çok bilinen temel özellikleri sağladığını kanıtlayacağız.

Plan Program. Bir sonraki bölümde kümeler kuramının en temel, en basit aksiyomlarından yararlanarak birkaç doğal sayı ve bu doğal sayıları toplayıp çarpmayı öğreneceğiz. Bu bölümü ısınma hareketleri olarak kabul etmek gerekir. Asıl konu daha sonra başlayacak.

Daha sonra Bölüm 1'de biçimsel matematikte uzunca bir geziye çıkacağız. Basit birkaç aksiyom kullanarak, kümeler kuramının en temel ve en başat kavramlarını tanımlayacağız.

Bölüm 2'de P1 ve P2 özellikleri sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı inşa edeceğiz. Bölüm 3'te bu yapıda toplama ve çarpma işlemlerini ve sıralamayı tanımlayacağız ve temel özelliklerini ortaya koyacağız.

Bölüm 3B*'da, P1 ve P2 özelliklerini sağlayan iki doğal sayı yapısının bir anlamda biricik olduğunu göstereceğiz, yani P1 ve P2 özelliklerini sağlayan iki doğal sayı yapısının elemanlarının adları dışında birinin diğerinden farkı olmadığını göstereceğiz. (Tam tanımları yeri geldiğinde vereceğiz.) Böylece doğal sayılar yapısının bir anlamda doğal bir yapı olduğu, P1 ve P2'nin doğal sayılara pek fazla hareket sahası tanımadığı anlaşılacak.

Yolumuz uzun yani.

Şöyle bir benzetme yaparak sorunu anlamaya çalışabiliriz: Diyelim evlenmek istiyorsunuz ve evinizde masa başında ideal eşinizin özelliklerini bir liste halinde yazdınız: Zeki, çalışkan, namuslu, saygılı, şefkatli, hoş görünümlü, hoşgörülü, hoşsohbet, esprili, kültürlü, zevk sahibi ve hali vakti yerinde olacak ve elbette size tapacak... Bu liste bir teoridir, bir arzular listesidir. Bu listeyi herkes hazırlar... Bundan kolay ne var! Önemli olan bu teoride (yani arzular listesinde) yazan özellikleri sağlayan birinin varlığını kanıtlamak, hatta mümkünse bulmak! İstediğiniz özelliklere sahip kişiye de teorinin modeli denir! (Model sözcüğü cuk oturdu!)

Yukardaki P1 ve P2 bir teoridir, bir arzular listesidir. $\mathbb{N}$'nin varlığını vermez, sadece müstakbel $\mathbb{N}$'lerden beklentilerimizi listeler.

Dikkat ederseniz, P2, altkümelerle ilgili bir önermedir. (Ama P1 elemanlarla ilgilidir.) Mantıkçılar kendilerine göre haklı nedenlerden altkümelerden sözeden teorilerden hoşlanmazlar, altkümeler yerine elemanlarla ilgili önermelerden oluşan teorileri tercih ederler. Bölüm 4'te P1 ve P2'yi, $\in$ simgesini ve kümeler kuramını tamamıyla terkedip sadece elemanlardan sözeden ve 0, S, + ve × simgelerini kullanan Peano Aksiyomları'yla çalışacağız.

Tarihçe. Doğal sayılarla ilgili birçok olgunun "artıbir" işlemi ve "tümevarım"la kanıtlanabildiğini ilk olarak 1860'larda Hermann Grassman farketmiştir. 1888'de Richard Dedekind doğal sayıları aşağı yukarı bu bölümde yaptığımız gibi aksiyomlaştırmıştır. 1889'da bu aksiyomların biraz daha rafine bir versiyonu İtalyan matematikçi Giuseppe Peano tarafından **Yeni Bir Yöntemle Aritmetiğin İlkeleri** adlı kitabında yayımlanmıştır. Ama daha sonra Peano Aksiyomları adı ileride sözünü edeceğimiz (Bölüm 4) bir başka aksiyom sistemine verilmiştir. Bu bölümdeki aksiyomlara ***Dedekind-Peano Aksiyomları*** adı verilebilir.

1C. Biraz Kümeler Kuramı ve Birkaç Doğal Sayı

Her topluluğu küme sanmanın matematikte çelişki doğurduğunu okur biliyor olmalı (Bkz. [SKK], Russell Paradoksu yazısı). Demek ki daha dikkatli olmalıyız, önümüze çıkan her topluluğa küme dememeliyiz. Neyin küme olduğuna aksiyomlarla karar vereceğiz. Bu bölümde kümeler kuramının kolay birkaç aksiyomunu sunacağız.

Asıl amacımız kümeler kuramı değil. Asıl amacımız doğal sayılar. Doğal sayıları matematiksel olarak tanımlamak istiyoruz. Bu ve sonraki birkaç bölümde, doğal sayıları tanımlamak için ne kadar kümeler kuramı gerekiyorsa o kadar kümeler kuramı sunacağız. Kümeler kuramının diğer aksiyomlarını [AKK] adlı ders notlarımızda bulabilirsiniz.

Doğal sayılar dışında ayrıca toplamayı ve çarpmayı tanımlayıp $2 + 2 = 4$ ve $2 \times 2 = 4$ eşitliklerini kanıtlayacağız.

Başlıyoruz... Matematiğin daha en başındayız... Elimizde hiç küme yok... Kümeleri yavaş yavaş var edeceğiz.

Kümeler nasıl var olacaklar? Kümelere "var olun!" diyeceğiz ve kümeler var olacaklar. Kümelere "var olun!" emrini aksiyomlarla vereceğiz. Ama bunu yaparken bütün kümeleri içeren bir kümenin varlığının da kanıtlanamamasına dikkat edeceğiz, çünkü böyle bir kümenin bizi çelişkiye (paradoksa) götürdüğünü [SKK]'dan biliyoruz.

1. Boşküme Aksiyomu. *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*

Yukardaki aksiyomu okuyan okur, "eleman" ne demektir, "elemanı var ya da yok" ne demektir, "küme" ne demektir diye sorabilir... Ne de olsa ilk bölümde (Bölüm 0A'da!) aynen bundan sözettik. Ama bu sorular sorulabilecek sorular olsa da yanıtlanamayacak sorulardır. "Küme" ve "elemanı olmak" kavramlarını tanımlamayacağız. Bu kavramları tanımlamadan kabul edeceğiz. Matematikte mutlaka tanımlanmamış kavramlar olmalıdır. İşte "küme" ve "elemanı olmak" kavramları matematiğin tanımlanmayan iki kavramıdır. Diğer tüm kavramları tanımlayacağız.

"Küme" adını vereceğimiz bazı soyut, anlamsız ve tanımlanmamış nesnelerin "elemanları" olacak. Sezgisel kümeler kuramında [SKK] "küme" ve "elemanı olmak" kavramlarına **sezgisel** bir anlam yüklemiştik ama burada sadece matematik hükmedecek.

Okurun şaşıracağını sandığımız bir şey söyleyelim şimdi: Elemanlar da bir küme olacaklar[1]. Her şey küme olacak... Elemanlar da, 0, 1, 2, $\sqrt{2}$, π gibi sayılar da, fonksiyonlar da, toplama ve çarpma da, $\leq$ ilişkisi de... Kümeler kuramının tüm nesneleri kümedir, en azından bu ders notlarında açıklayacağımız kümeler kuramında.

Bazı kümeler bazı kümelerin elemanları olacaklar, "elemanı olmak" ne demekse...

Eğer x ve y kümeyseler ve y kümesi x kümesinin bir elemanıysa, o zaman bunu

$$y \in x$$

yazılımıyla gösteririz. Eğer, tam tersine, y kümesi x kümesinin bir elemanı değilse bunu,

1 İlk ve orta öğretimde elemanların da küme oldukları öğretilmez. Ama öyledir. Kümeler kuramının (en azından bu ders notlarında sözedeceğimiz kümeler kuramının) tüm nesneleri kümedir.

$$y \notin x$$

olarak gösteririz.

"Küme" ve "elemanı olmak" kavramlarının hiçbir anlamı olmayacak ama bu kavramları siz gene de sezgisel olarak istediğiniz gibi yorumlayabilirsiniz. Yorum serbest... İsterseniz "elemanı olmak"ı "çocuğu olmak" olarak yorumlayın, yani "$y \in x$" tümcesini "y, x'in çocuğu" olarak yorumlayın, bu size kalmış bir şey... Biz yorum yapmıyoruz.

Bütün bunları yazıyoruz ama, daha elimizde bir tek küme var ve o kümenin de hiç elemanı yok… Şimdilik başka küme var mı yok mu bilmiyoruz. Bir tek küme üzerine, üstelik hiç elemanı olmayan bir küme üzerine koca bir sayfa yazdık...

Yukardaki aksiyom, hiç elemanı olmayan bir kümenin varlığını söylüyor. Yani öyle bir x kümesi vardır ki, y hangi küme olursa olsun, $y \notin x$ diyor...

Şimdi soru şu: Hiç elemanı olmayan kaç küme vardır? Bir? İki? Üç? Sonsuz tane? Ya da böyle bir soru sormaya hakkımız var mı? Hiç elemanı olmayan kümelerden bir ya da birkaç tane olması bizim elimizde mi? Yoksa bu doğanın bir gereği mi?

Hiç elemanı olmayan tek bir küme olduğunu kanıtlamaya çalışalım, bakalım başaracak mıyız? Bence başaramayacağız... Deneyelim ama:

2. Teorem. *Hiç elemanı olmayan tek bir küme vardır.*

Kanıt: x ve x_1 hiç elemanı olmayan iki küme olsun. x'in x_1'e eşit olduğunu göstermek istiyoruz...

Ama şimdiye kadar iki kümenin ne zaman birbirine eşit olduklarına dair herhangi bir şey söylemedik... Kümenin ne demek olduğunu bilmiyoruz ki iki kümenin eşitliği hakkında bir şey bilebilelim...

Eğer iki küme birbirine eşitse o iki kümenin aynı elemanları vardır, yani birinde olan bir eleman diğerinindedir de; yani, her x, x_1 ve y kümeleri için,

$$x = x_1 \Rightarrow (y \in x \Leftrightarrow y \in x_1)$$

önermesi ya da her x ve x_1 kümeleri için,

$$x = x_1 \Rightarrow \forall y\ (y \in x \Leftrightarrow y \in x_1)$$

doğrudur. Bu, matematiğin dayanağı ve temeli olan matematiksel mantığın kolay bir sonucudur: $x = x_1$ ise, x'le ilgili her doğru önerme (örneğimizde $y \in x$ önermesi) x yerine x_1 alırsak da doğrudur (örneğimizde $y \in x_1$ önermesi).

Bir sonraki aksiyom eşitlik için **gerekli olan bu** koşulun aynı zamanda **yeterli** olduğunu söylüyor:

3. Küme Eşitliği Aksiyomu. *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Bu, her x, x_1 ve y kümeleri için,

$$(\forall y\ (y \in x \Leftrightarrow y \in x_1)) \Rightarrow x = x_1$$

demektedir, yani

$$\forall x\ \forall x_1\ ((\forall y\ (y \in x \Leftrightarrow y \in x_1)) \Rightarrow x = x_1)$$

demektedir. (Yukardaki önermelerde parantezlerin rastgele serpiştirilmediğine dikkatinizi çekeriz!) Şimdi Teorem 2'nin kanıtına devam edebiliriz:

Teorem 2'nin kanıtının devamı: Hiç elemanı olmayan iki küme aldık, x ve x_1. Bu iki kümenin birbirine eşit olduklarını kanıtlamak istiyoruz. Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre her ikisinin de aynı elemanlara sahip olduklarını göstermek gerekiyor, yani birinin elemanının diğerinde de olduğunu göstermeliyiz. Bu doğru olmasaydı, yani iki kümeden birinde diğerinde olmayan bir eleman olsaydı, o zaman iki kümeden birinde (diğerinde olmayan) bir eleman olacaktı. Oysa kümelerde eleman yok… Bir çelişki. Demek ki hiç elemanı olmayan tek bir küme var. □

Madem ki hiç elemanı olmayan **tek** bir küme var, o zaman bu kümeye bir ad verebiliriz. Hiç elemanı olmayan kümeye ***boşküme*** adını verelim. Boşküme $\emptyset$ simgesiyle gösterilir.

Buraya kadar sadece bir tek kümenin varlığını gösterebildik, $\emptyset$, onu da bir aksiyomun yardımıyla yaptık. Başka kümeler de vardır belki evrende, ama bundan şimdilik hiçbir biçimde emin olamayız.

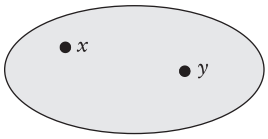
Şimdi ilk sayımız olan 0'ı tanımlayalım:

4. Tanım. $0 = \emptyset$.

Bu tanımladığımız 0 matematiksel 0'dır, günlük yaşamda kullandığımız 0 değil. Örneğin, "0'ın 0 elemanı vardır" tümcesindeki birinci 0 matematiksel 0'dır, ikincisiyse Türkçe 0'dır.

1'i $\{0\}$ olarak tanımlamak istiyoruz ama böyle bir kümenin varlığından emin değiliz. Hemen bu sorunumuzu halledelim:

5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu. *Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*



$\{x, y\}$ kümesinin temsili şekli

Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre sadece ve sadece x ve y kümelerini eleman olarak içeren sadece bir tane küme vardır. Eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bu kümeyi

$$\{x, y\}$$

olarak yazarız. Eğer $x = y$ ise, $\{x, y\}$ yerine $\{x\}$ yazarız, iki defa x yazmanın ne anlamı olabilir ki?

Yukarıdaki aksiyomda $x = y = 0$ alırsak, $\{0\}$ kümesinin varlığını göstermiş oluruz ve böylece 1'i de $\{0\}$ kümesi olarak tanımlama hakkını elde ederiz.

6. Tanım. $1 = \{0\}$.

Eğer $x = 0$, $y = 1$ alırsak, o zaman İki Elemanlı Küme Aksiyomu'ndan $\{0, 1\}$ kümesinin varlığı anlaşılır ve 2'yi de bu küme olarak tanımlayabiliriz.

7. Tanım. $2 = \{0, 1\}$.

Aynı aksiyomdan $\{0, 2\}$ ve $\{1, 2\}$ kümelerinin de varlığı anlaşılır. Bundan da $\{\{0, 2\}, \{1, 2\}\}$ kümesinin varlığı çıkar. Bu aksiyom sayesinde 1 ve 2 elemanlı sonsuz sayıda küme yaratabiliriz.

Daha önce $\{\{0, 2\}, \{1, 2\}\}$ diye bir şey vardı, yok değildi, ama adına küme denmeye hak kazanmamıştı. İki Elemanlı Küme Aksiyomu bu şeye küme payesini veriyor. Kolay değildir küme olmak.

0'ın sıfır, 1'in de bir elemanı olduğundan, $0 \neq 1$. Ne mutlu bize! Dolayısıyla 2'nin iki elemanı var ve $0 \neq 2$, $1 \neq 2$. Bütün bu eşitsizlikler Eşitlik Aksiyomu'nun yardımıyla kanıtlanabilir.

İki Elemanlı Küme Aksiyomu sayesinde elde edilen tüm kümelerin en fazla iki elemanı olduğundan, yukarda verdiğimiz üç aksiyom $\{0, 1, 2\}$ kümesinin varlığını kanıtlamaya yeterli değildir. Böyle bir kümenin varlığını kanıtlamak için yeni bir aksiyoma ihtiyacımız var. Ama önce biraz edebiyat yapalım.

[SKK]'da iki ya da daha çok kümenin bileşimini almayı öğrendik. Yalnız kümelerinin bileşimini alırken daha dikkatli olmak gerekir, yanlış bir bileşim bizi çelişkiye götürebilir.

Genellikle, bileşim alırken sokaktaki öğrencinin gözden kaçırdığı ince bir nokta vardır: Kümelerin bileşiminin bir küme olması için bileşimi alınacak kümelerin bir küme oluşturması gerekmektedir, yoksa bileşim küme olmayabilir. Örneğin a, b, c kümelerinin bileşiminden bir **küme** olarak söz edebilmek için

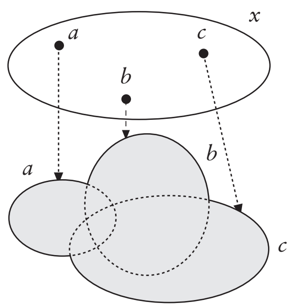
$$\{a, b, c\}$$

diye bir küme olmalıdır. Eğer $\{a, b, c\}$ diye bir küme yoksa,

$$a \cup b \cup c$$

bir küme olmayabilir, bir şey olur ama bu şey başka bir şey olabilir, küme adını almaya daha hak kazanmamış bir şey olur. Eğer bileşimi dikkatsizce alırsak bir çelişki elde ederiz ve şık olmaz.

Bir sonraki aksiyomla, bir kümenin elemanlarının bileşimini alıp yeni bir küme elde etmemize olanak sağlayacağız. Aksiyomu yazmadan önce tam ne istediğimizi biraz daha açık bir biçimde açıklayalım.



{a, b, c} kümesinin öğelerinin bileşimi

x, yukardaki resimdeki gibi bir küme olsun. x'in birtakım elemanları var, diyelim x'in üç elemanı var: a, b ve c. Eleman sayısı sonsuz da olabilir, biz sadece üç elemanlı bir küme aldık. Her eleman gibi bu a, b, c elemanları da birer küme. Yukardaki resimde a, b ve c hem bir eleman olarak (bir nokta), hem de bir küme olarak resmedilmiş (gri yumurtalar). İşte bir sonraki aksiyomla, x kümesini oluşturan bu a, b, c elemanlarının bileşimini alarak yeni bir küme elde etmenin yolunu açacağız. Bu bileşim, x'in elemanlarının (a, b ve c'nin yani) elemanlarından oluşacak.

Yani aksiyom şunu diyecek: x hangi küme olursa olsun, öyle bir y **kümesi** vardır ki, her z kümesi için, $z \in y$ ancak ve ancak $z \in t \in x$ koşullarını sağlayan bir t varsa.

Eğer bir kümenin elemanlarını o kümenin çocukları olarak yorumlarsak, bir kümenin elemanlarının bileşiminin elemanları, bileşimi alınan kümenin torunları olur. Resimde, a, x'in bir çocuğu; z de a'nın bir çocuğu. Yani z, x'in bir torunu. Bu metaforla, x'in elemanlarının bileşimi x'in torunlarından oluşan küme demektir.

8. Bileşim Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Bu kümeye x'in (elemanlarının) ***bileşimi*** adı verilir. Küme Eşitliği Aksiyomundan dolayı bu bileşim biriciktir. x'in bileşimi $\cup x$ ya da

$$\bigcup_{t \in x} t$$

olarak yazılır. Eğer x'in sonlu sayıda elemanı varsa, daha alışık olduğumuz yazılımı kullanabiliriz:

$\cup\{a, b, c\} = a \cup b \cup c$,

$\cup\{\{0, 1\} \{0, 2\}, \{1, 2\}\} = \{0, 1\} \cup \{0, 2\} \cup \{1, 2\} = \{0, 1, 2\}$,

$\cup\{a\} = a$.

Şimdi, yukardaki aksiyomları kullanarak $\{0, 1, 2\}$ diye bir kümenin varlığını kanıtlayabiliriz:

i. $0 = \emptyset$ olduğundan, 0 bir kümedir.

ii. $1 = \{0\}$ olduğundan, Aksiyom 5'e ve i'e göre 1 bir kümedir.

iii. $2 = \{0, 1\}$ olduğundan, Aksiyom 5'e, i ve ii'ye göre 2 bir kümedir.

iv. Aksiyom 5'e ve iii'e göre $\{2\}$ bir kümedir.

v. Aksiyom 5'e, iii'e ve iv'e göre $\{2, \{2\}\}$ bir kümedir.

vi. Aksiyom 8'e göre, $\cup\{2, \{2\}\}$, yani

$$2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$$

bir kümedir.

Bundan böyle 3'ü $\{0, 1, 2\}$ kümesi olarak tanımlıyoruz.

Okur alıştırma olarak $\{0, 1, 2, 3\}$'ün de bir küme olduğunu kanıtlayabilir.

Doğal sayıları tanımlamaya devam edelim:

9. Tanım. $3 = \{0, 1, 2\}$
10. Tanım. $4 = \{0, 1, 2, 3\}$
11. Tanım. $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Bu tanımları sürdürüp 6'yı, 7'yi, 8'i tanımlayabiliriz. Ama sayıları tek tek sonsuza dek tanımlamaya zamanımız olmadığına göre, durup, genel bir tanım vermenin yollarını aramalıyız.

Bu tanımlara bir kez daha dikkatlice bakalım:

$5 =^{11} \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} =^{10} 4 \cup \{4\}$,
$4 =^{10} \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} =^{9} 3 \cup \{3\}$,
$3 =^{9} \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} =^{7} 2 \cup \{2\}$,
$2 =^{7} \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} =^{6} 1 \cup \{1\}$,
$1 =^{6} \{0\} = \varnothing \cup \{0\} =^{4} 0 \cup \{0\}$.

Özetle:

$$\begin{aligned} 5 &= 4 \cup \{4\},\\ 4 &= 3 \cup \{3\},\\ 3 &= 2 \cup \{2\},\\ 2 &= 1 \cup \{1\},\\ 1 &= 0 \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi "bir sayının ardılı" (her ne demekse!), o sayıyla sadece o sayıdan oluşan kümenin bileşimi. Örneğin, 5, 4 kümesiyle sadece 4 elemanından oluşan $\{4\}$ kümesinin bileşimi.

Yukardaki yöntemi 5'e uygulayıp 6'yı tanımlayalım:

12. Tanım. $6 = 5 \cup \{5\}$.

Bakalım elemanlarıyla yazınca 6 ne oluyor?

$6 =^{12} 5 \cup \{5\} =^{11} \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

yani

$$6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. \tag{12.1}$$

6 da kendisinden önce gelen sayılar kümesi oldu.

Eğer x bir kümeyse, Sx'i şöyle tanımlayalım:

13. Tanım. $Sx = x \cup \{x\}$.

Her şey küme olmak zorunda olduğundan, x bir kümeyse, $S(x)$ de bir küme olmalı. Hemen kanıtlayalım bunu:

Teorem. *x bir kümeyse Sx de bir kümedir.*

Kanıt: Üç adımda kanıtlayacağız:

a. x bir küme olduğundan İki Elemanlı Küme Aksiyomu'na göre $\{x\}$ bir kümedir.

b. x ve $\{x\}$ birer küme olduğundan, gene İki Elemanlı Küme Aksiyomu'na göre $\{x, \{x\}\}$ bir kümedir.

c. Bileşim Aksiyomu'na ve (b)'ye göre $\bigcup\{x, \{x\}\}$ topluluğu, yani $x \cup \{x\}$, yani Sx bir kümedir. □

Eğer n bir tanımlanmış bir "doğal sayıysa", Sn'ye ***n'nin ardılı*** adını verelim. Yukarda da görüldüğü üzere, 6, 5'in ardılı.

6'nın ardılı, tanımı gereği $S(6)$'dır:

$$S6 =^{13} 6 \cup \{6\} =^{12.1} \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6\}$$
$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Bundan böyle S(6)'ya 7 adını verelim.

Görüldüğü gibi,

$$S0 = 1, \tag{13.1}$$
$$S1 = 2, \tag{13.2}$$
$$S2 = 3, \tag{13.3}$$
$$S3 = 4, \tag{13.4}$$
$$S4 = 5, \tag{13.5}$$
$$S5 = 6, \tag{13.6}$$
$$S6 = 7. \tag{13.7}$$

Dikkat edilirse henüz genel bir doğal sayı kavramı tanımlamadık. Bunu daha sonraki bölümlerde yapacağız. Şimdilik şu kavramları tanımladık:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Sx.$$

$Sn = n + 1$ eşitliğini şu anda kanıtlayamayız. Çünkü + diye bir işlem daha tanımlamadık. Hemen tanımlayalım. Önce $n + 0$ işlemini tanımlayalım:

14. Tanım. $n + 0 = n$.

Dikkat: Bu tanımdan $0 + n = n$ eşitliği çıkmaz. Şimdilik kanıtlayamayız bu eşitliği. Ama daha sonra kanıtlayacağız.

0'la (sağdan) toplamasını yukardaki tanımda öğrendik. Toplamayı tanımlamaya devam edelim. Bir sonraki tanım sayesinde, $n + m$ işleminin sonucunu biliyorsak, $n + Sm$ işleminin sonucunu da bileceğiz, yani m doğal sayısıyla (sağdan) toplamasını biliyorsak, m'nin ardılı olan Sm ile de (sağdan) toplamasını bildiğimizi göreceğiz:

15. Tanım. *Eğer $n + m$ tanımlanmışsa*, $n + Sm = S(n + m)$.

$Sn = n + 1$ eşitliğini kanıtladığımızda (bir sonraki teorem), yukardaki tanım

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1$$

anlamına gelecek[2].

Şimdi Sn'nin $n + 1$'e eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

---

2 Tanım 15'in geçerli olması için bir şeyin kontrol edilmesi gerekmektedir. Eksikliği Bölüm 1E'de açıklayacağız v e eksikliği gidereceğiz. Bölüm 3'te ise aslında giderecek bir sorun olmadığını göstereceğiz! Bu tanımın kabul edilebilir bir tanım olması için özellikle gözden uzak tutmaya çalıştığımız bir olgu vardır ve bu olgu tanımın geçerli olduğunun gösterilmesi için kanıtlanmalıdır. Sorunu fısıldayalım: $Sm = Sm'$ ise $S(n + m) = S(n + m')$ olur mu? Aksi halde $n + Sm$ iyi tanımlı değildir.

16. Teorem. $Sn = n + 1$.
Kanıt: $n + 1 =^{13.1} n + S0 =^{15} S(n + 0) =^{14} Sn$. □

Yukardaki teoremi 0'a, 1'e, 2'ye ve tanımladığımız diğer sayılara uygularsak (13) eşitliklerinden şu sonuçlar çıkar:

$$0 + 1 =^{16} S0 =^{13.1} 1 \quad (16.1)$$
$$1 + 1 =^{16} S1 =^{13.2} 2 \quad (16.2)$$
$$2 + 1 =^{16} S2 =^{13.3} 3 \quad (16.3)$$
$$3 + 1 =^{16} S3 =^{13.4} 4 \quad (16.4)$$
$$4 + 1 =^{16} S4 =^{13.5} 5 \quad (16.5)$$
$$5 + 1 =^{16} S5 =^{13.6} 6 \quad (16.6)$$
$$6 + 1 =^{16} S6 =^{13.7} 7 \quad (16.7)$$

Artık $2 + 2 = 4$ eşitliğini kanıtlama zamanı geldi:

17. Teorem. $2 + 2 = 4$.
Kanıt: Basit bir hesap:

$$2 + 2 =^{13.2} 2 + S1 =^{15} S(2 + 1) =^{16.3} S3 =^{13.4} 4.$$

İstediğimiz eşitlik kanıtlanmıştır. □

Şimdi çarpmaya geçelim. Önce 0'la çarpmayı öğreneceğiz, ardından, *m*'yle çarpmasını ve toplamayı bildiğimizi varsayarak, *Sm* ile çarpmasını öğreneceğiz.

18. Tanım. $n \times 0 = 0$.
19. Tanım. *Eğer $n \times m$ ve $n \times m + n$ tanımlanmışsa*,

$$n \times S(m) = n \times m + n.$$

Teorem 16 ve yukardaki tanımdan

$$n \times (m + 1) = n \times m + n$$

eşitliği çıkar[3].

3 Toplama için çıtlattığımız sorun çarpmanın tanımında da var. Bu sorunları Bölüm 3'te ortaya koyup çözeceğiz.

Şimdi $n \times 1 = n$ eşitliğini kanıtlamaya çalışalım:

$$n \times 1 =^{13.1} n \times S0 =^{19} n \times 0 + n =^{18} 0 + n = \ldots$$

Takıldık. Çünkü $0 + n = n$ eşitliğini bilmiyoruz. Bizim bildiğimiz sadece $n + 0 = n$ eşitliği, $0 + n = n$ eşitliği değil. $0 + n = n$ eşitliğini daha sonra kanıtlayacağız, şimdi kanıtlayamayız. Bu eşitliği şimdilik kanıtlayamayız ama, 16.1'den $0 + 1 = 1$ eşitliğini bildiğimizden, $1 \times 1 = 1$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

20. Teorem. $1 \times 1 = 1$.

Kanıt: İşte eşitliği kanıtlayan küçük hesap:

$$1 \times 1 =^{13.1} 1 \times S0 =^{19} 1\times0 + 1 =^{18} 0 + 1 =^{16.1} 1. \qquad \square$$

Şimdi $2 \times 2 = 4$ eşitliğini kanıtlamaya çalışalım:

$$2 \times 2 =^{13.2} 2 \times S1 =^{19} 2 \times 1 + 2.$$

Demek ki sonuca ulaşmak için önce $2 \times 1 = 2$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlayalım:

$$2 \times 1 =^{13.1} 2 \times S0 =^{19} 2 \times 0 + 2 =^{18} 0 + 2.$$

Demek ki daha önce $0 + 2 = 2$ eşitliğini kanıtlamamız gerekiyormuş:

$$0 + 2 =^{13.2} 0 + S1 =^{15} S(0 + 1) =^{16.1} S1 =^{13.2} 2.$$

Şimdi artık $2 \times 2 = 4$ eşitliği kanıtlanmıştır. Teoremi ve kanıtını bir defa daha ama bu sefer derli toplu bir halde yazalım.

21. Teorem. $2 \times 2 = 4$.

Kanıt: Hesaplar şöyle:

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &=^{13.2} 2 \times S1 =^{19} 2 \times 1 + 2 \\ &=^{13.1} 2 \times S0 + 2 =^{19} (2 \times 0 + 2) + 2 \\ &=^{18} (0 + 2) + 2 =^{13.2} (0 + S1) + 2 \\ &=^{15} S(0 + 1) + 2 =^{16.1} S1 + 2 \\ &=^{13.2} 2 + 2 =^{17} 4. \end{aligned}$$

Kanıtımız bitmiştir. $\square$

22. Sonuç. Bu bölümde 0, 1, 2, 3, 4 sayılarını, *Sx*'i ve + ve × işlemlerini tanımlayıp 2 + 2 = 4 ve 2 × 2 = 4 eşitliklerini kanıtladık. Görüldüğü gibi tanımlarımızın elmalarla armutlarla, deneyle, dış dünyayla hiçbir ilgisi yok. Her şey zihinsel ve en soyut düzeyde.

Yine de yukarda yapılanlarda önemli bir eksik var: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sayılarını teker teker tanımladık. Tanımlanacak daha çok sayı var... Ömür biter, sayılar bitmez! Bütün sayıları teker teker tanımlayamayız. Matematik sonlu zaman içinde yapılmalı. Bu sorunun üstesinden geleceğiz. Doğal sayıları teker teker değil, hepsini birden, daha doğrusu doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi bir anda, tek bir hareketle yaratacağız. Her şey zamanla...

Bu bölümde yapılanlar çocuk oyuncağı. Konu çok daha ilginçleşecek.

Alıştırmalar

1. a_1, a_2, a_3 küme olsunlar. $\{a_1, a_2, a_3\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. Genel olarak $a_1, \ldots, a_n$ kümeyse

$$\{a_1, \ldots, a_n\}$$

topluluğunun küme olduğunu kanıtlayın.

2. $\cup\emptyset = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayın.

3. 4 + 3 = 7 ve 3 + 4 = 7 eşitliklerini kanıtlayın.

4. 3 × 2 = 6 ve 2 × 3 = 6 eşitliklerini kanıtlayın.

5. n^m işlemini ve 8 sayısını bu bölümdeki yöntemlerle tanımlayıp $2^3 = 8$ eşitliğini kanıtlayın.

6*. Buraya kadar verilen aksiyomlarla sonsuz sayıda elemanı olan bir kümenin varlığının kanıtlanamayacağını kanıtlayın.

1D. Giuseppe Peano
(1858-1932)

Bugün ilkokulda bile öğretilen $\cup$, $\cap$, $\subset$, $\in$, $\emptyset$ gibi simgeleri borçlu olduğumuz Giuseppe Peano bir çiftçi ailesinin çocuğuydu. Giuseppe önce köy okuluna gitti. Sonra her gün 5 + 5 = 10 km'lik yolu göze alarak kasaba okuluna devam etti. Avukat ve papaz olan ağabeyi (daha çok köylerde geçerli olan Katolik geleneğine göre en büyük kardeş papaz olmak zorundadır) kardeşinin yeteneğini görünce onu lise sınavlarına soktu. Sınavı kazanıp liseden sonra Torino Üniversitesi'nde (daha sonra mühendisliğe geçmek üzere) matematik okuyan Peano, üçüncü yılında sınıfının birincisiydi, çünkü sınıfta başka öğrenci yoktu, diğerleri matematiği bırakıp mühendisliğe geçmişlerdi! Peano'nun okul arkadaşlarının adlarını bugün kimse bilmez!


Giuseppe Peano gençliğinde

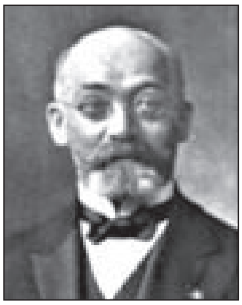
Çağının çok ilerisinde bir matematik anlayışına sahipti Giuseppe Peano. Gelişmiş analitik yeteneğiyle diğerlerinin makalelerinde yanlış bulmasıyla ünlüydü. Analizden mantığa birçok önemli buluşları olmuştur. Birçok tarihçi tarafından matematiksel mantığın kurucusu olarak kabul edilir.

Doğal sayıların bugün bilinen (ve bu kitapta açıklayacağımız) matematiksel tanımını ilk bulan Giuseppe Peano, dilbilime de meraklıydı.

Bilindiği gibi Esperanto tamamıyla yapay, dilbilgisi oldukça kolay, daha çok Latince, yapay, yani insan buluşu bir dildir. “Umut eden” anlamına gelen Esperanto, Polonyalı Zamenhof (1859-1917) tarafından henüz bir lise öğrencisiyken 1878’de bulunmuş ve yeni bir dil olarak ilk kez 1887’de yayımlanmıştır. Zamenhof’un amacı insanların bu evrensel dilde konuşarak değil, yazışarak anlaşmalarıydı.

Giuseppe Peano, yaşlılığında

1903’te Peano, Zamenhof gibi, Latinceyi sadeleştirerek “bükümsüz Latince” demek olan Latino sine flexione yapay dilini bulmuştur. Latine sine flexione, Latince sözcükleri korumuş, ancak ekleri ve çekimleri (yani “flexione/büküm”leri) tamamıyla kaldırmıştır, çünkü bükümler bir dili zorlaştıran elemanlardır. Bir kızılderili dili olan Navajo dili o kadar bükümlü ve zordur ki, ABD, İkinci Dünya Savaşı’nda şifre olarak bu dili kullanmıştır. Navajo dilinde Waşakotyatawitşerahekvhtha’se, “ona bir kadın vücudunu çirkinleştiren üste giyilen şeyler yaptı” anlamına gelir... Örneğin İngilizce görece az bükümlü dil olduğundan öğrenmesi oldukça kolaydır.



L.L. Zamenhof

Latine sine Flexione’yi http://www.geocities.com/Athens/Olympus/2948/index2.html adresinden öğrenebilirsiniz.

1E*. Temellendirme Aksiyomu

Bölüm 1C'de toplamayı şu iki formülle tanımlamıştık:

Tanım. $x + 0 = x$, *ve eğer* $x + y$ *biliniyorsa*, $x + Sy = S(x + y)$.

Anımsatırız: Sx, $x \cup \{x\}$ anlamına geliyordu.

Yukardaki ikinci tanımda ilk anda dikkat çekmeyebilecek çok önemli bir sorun var. O da şu: x ile Sy'nin toplamının sonucunun $S(x + y)$ olacağını söylüyoruz. Buna hakkımız var mı? Olmayabilir... Şöyle bir durum ortaya çıkabilir:

$Sy = Sz$ eşitliği geçerli olabilir ve $x + y$ ve $x + z$ de biliniyordur, ama
$$S(x + y) \neq S(x + z)$$
olur. O zaman,
$$S(x + y) = x + Sy = x + Sz = S(x + z)$$
eşitliklerinden bir çelişki elde ederiz.

Bir başka deyişle, Sy ile ilgili olan
$$x + Sy = S(x + y)$$
eşitliğinin sadece Sy'ye göre değişmesi gerekir, y değiştiğinde Sy değişmiyorsa, $x + Sy$'nin önerilen tanımının da, yani $S(x+y)$'nin de değişmemesi gerekir.

Sorun tam anlaşılamayabilir, çünkü kolay kolay anlaşılacak bir sorun değil parmak bastığımız, ama anlaşıldığında da boy uzatır. Bir başka yolla anlatmaya çalışalım:

Diyelim ki $x + \beta$ toplamını yapmak istiyorsunuz... Düşünüyorsunuz... Kısa bir zaman içinde β'nın Sy'ye eşit olduğunu anlıyorsunuz. Hemen ardından da, tanımdan,

$$x + \beta = x + Sy = S(x + y)$$

eşitliklerini çıkarıyorsunuz. Şimdi $x + y$ sayısını hesaplamanız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Sonra S'nin tanımından hareketle $S(x + y)$'yi kolayca

$$(x + y) \cup \{x + y\}$$

olarak buluyorsunuz. Her şey yolunda. Şimdilik...

Ertesi gün bu buluşunuzu bir arkadaşınıza göstermek istiyorsunuz. Ne var ki kanıtınızı unutmuşsunuz. Kanıtınızı unutmuşsunuz ama kafanız yerinde. Gene düşünüyorsunuz. Kısa bir zaman içinde β'nın Sz olduğunu anlıyorsunuz. Bir önceki gün β'nın Sy olduğunu bulmuştunuz ama bunu unutmuşsunuz, bugün β'yı Sz olarak buldunuz... Tabii bunun böyle olması için $Sy = Sz$ olmalı. Demek öyle, neden olmasın!.. Aynen bir önceki gün olduğu gibi hesaplıyorsunuz:

$$x + \beta = x + Sz = S(x + z).$$

Şimdi $x + z$ sayısını hesaplamanız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Ve işte bulduğunuz sonuç:

$$x + \beta = S(x + z)$$

Bir önceki gün $x + \beta$ sayısını $S(x + y)$ olarak hesaplamıştınız, bugünse $S(x + z)$ olarak... Toplamın zamanla değişmemesi gerekir elbet, yani

$$S(x + y) = S(x + z)$$

olmalı. Eğer bu eşitlik doğru değilse, toplamanın tanımı yanlıştır, böyle bir tanım kabul edilemez.

İşte bu yüzden toplamanın tanımının geçerli ve kabul edilebilir bir tanım olması için aşağıdaki teoremin kanıtlanması gerekmektedir.

Teorem 1. $Sy = S(z)$ *ise* $S(x + y) = S(x + z)$.

Eğer y bir doğal sayıysa[1], Sy, $y + 1$ anlamına geleceğinden, aslında $Sy = Sz$ eşitliğinden $y = z$ eşitliğinin çıkmasını istiyoruz. Yani aslında aşağıdaki teoremi kanıtlamak istiyoruz:

Teorem 2. $Sy = Sz$ *ise* $y = z$.

Teorem 1 elbette Teorem 2'nin bir sonucudur. Bundan böyle amacımız Teorem 2'yi kanıtlamak olacak.

Teorem 2'yi kanıtlayabilir miyiz? Bunu kanıtlayamasak da, bu eşitliğe ne derece yaklaşabiliriz? Yani $Sy = Sz$ ise, y ile z arasında nasıl bir ilişki vardır? Önce bu soruyu yanıtlayalım:

Teorem 3. *Eğer* $Sy = Sz$ *ise ya* $y = z$ *dir ya da* $y \in z \in y$ *olur.*

Kanıt: $Sy = Sz$ olsun. Demek ki

$$y \cup \{y\} = z \cup \{z\}.$$

Şimdi, $y \in \{y\}$ olduğundan, y, bu eşitliğin solundaki $y \cup \{y\}$ kümesinin bir elemanı. Demek ki y sağdaki $z \cup \{z\}$ kümesinin de bir elemanı. Dolayısıyla ya $y \in z$ ya da $y \in \{z\}$. İkinci şıkta $y = z$ olmak zorunda. Sonuç olarak ya $y \in z$ ya da $y = z$.

Aynı nedenden[2] ya $z \in y$ ya da $z = y$.

Teorem kanıtlanmıştır. □

Şimdi $y \in z \in y$ seçeneğini (bir kümenin kendisinin bir elemanının elemanı olma seçeneğini) ortadan kaldırırsak Teorem 3'ten Teorem 2 çıkar, dolayısıyla Teorem 1 de kanıtlanmış olur ve toplamanın tanımında farkettiğimiz sorun giderilmiş olur. Ne yazık ki bu olasılığı ortadan kaldırmak kolay değildir. Çok bilinen yöntemlerle $y \in z \in y$ şıkkının varolmasını yasaklayamayız.

1 Ki daha doğal sayı kavramını tanımlamadık. Sadece geçen bölümde 0, 1, 2 gibi birkaç doğal sayıyı tanımladık.

2 Yukardaki kanıtta y ile z'nin yerlerini değiştirin.

Bir küme, bir elemanının elemanı olabilir mi? Daha doğrusu olmalı mı?

Hatta bir küme kendi kendisinin elemanı olabilir mi?

Bir başka soru:

$$x \in y \in z \in x$$

ilişkilerini sağlayan x, y, z kümeleri var mıdır? Daha doğrusu bu tür kümelerin var olması doğru mudur? Böyle bir durumun olamayacağını gösteremiyorsak, böyle bir durumun olmaması için bir aksiyom kabul etmeli miyiz?

Aksiyom kabul etmek, son tahlilde felsefi bir sorudur, ya da inanca ilişkindir. Doğanın yasalarının ne olduğunu, doğanın hangi kurallarla yönetildiğini düşündüğümüzle ilgili bir soru.

Matematikçilerin birçoğu,

$$x \in x$$
$$x \in y \in x$$
$$x \in y \in z \in x$$
$$x \in y \in z \in t \in x$$

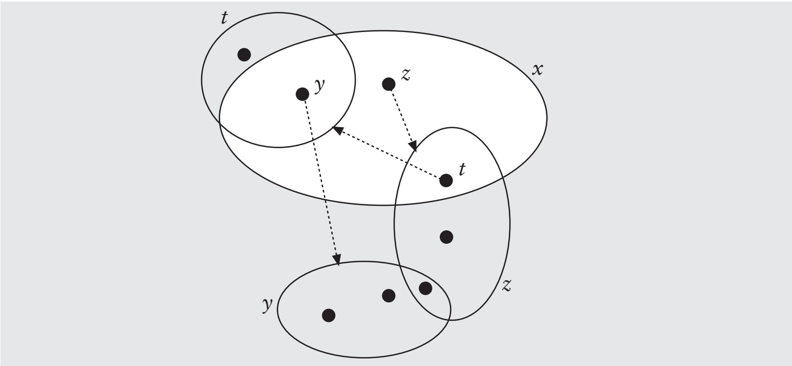
gibi ilişkileri sağlayan kümelerin olmaması gerektiğini düşünür, çünkü bir kümenin tanımlanması için kümenin elemanlarının bilinmesi gerektiğini düşünürler (ki bu bile doğru dğildir). Yukardaki örneklerin herbirinde x'in elemanlarından birinin bilinmesi için x kümesinin bilinmesi gerekiyor. Genelde böyle "saçma" bir durumun olmaması gerektiği düşünülür.

Matematiğin çok bilinen aksiyomlarıyla yukardaki durumların olamayacağı gösterilemez. Bunun için şu aksiyoma ihtiyaç vardır:

Temellendirme Aksiyomu[3]**.** *Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'in $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.*

Bir örnek ve bir karşıörnekle Temellendirme Aksiyomu'nu açıklamaya çalışalım.

3 İngilizcesi "Axiom of Regularity" ya da "Axiom of Foundation".

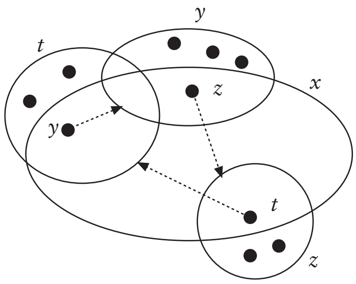


Yukarıdaki şekildeki x kümesinde üç eleman var: y, z ve t. Bu üç elemanın herbiri birer küme. Şekilde bu üç eleman hem bir eleman olarak (noktayla), hem de bir küme olarak (ovalle) gösterilmiş. x'in bu üç elemanıyla x'i teker teker kesiştirelim:

$$t \in x \cap z \neq \emptyset,$$
$$y \in x \cap t \neq \emptyset,$$
$$x \cap y = \emptyset.$$

Demek ki x'in üç elemanından sadece y'nin x'le kesişimi boşküme. Temellendirme Aksiyomu, boş olmayan her x kümesinde böyle bir y elemanının mutlaka olması gerektiğini söylüyor.

Bir başka deyişle aşağıdaki şekildeki gibi bir durum Temellendirme Aksiyomu'na göre olmamalı.



Burada da x kümesinin üç elemanı var: y, z ve t. Ancak,

$$t \in x \cap z \neq \emptyset,$$
$$y \in x \cap t \neq \emptyset,$$
$$z \in x \cap y \neq \emptyset.$$

Bu durum Temellendirme Aksiyomu'yla çelişir. Temellendirme Aksiyomu'nun kabul edildiği bir sistemde böyle bir x kümesi olamaz.

Temellendirme Aksiyomu'ndan sözünü ettiğimiz sonuçları çıkarabiliriz.

Sonuç 1. *Eğer a bir kümeyse*, $a \notin a$.

Kanıt: a bir küme olsun. Diyelim ki a kendi kendisinin bir elemanı, yani $a \in a$. Şimdi x kümesini sadece a'dan oluşan küme olarak tanımlayalım, yani

$$x = \{a\}$$

olsun. Temellendirme Aksiyomu'na göre x kümesinde öyle bir y elemanı vardır ki,

$$x \cap y = \emptyset$$

eşitliği sağlanmalıdır. Ama x kümesinin tek bir elemanı var, o da a. Demek ki $y = a$ olmalı. Dolayısıyla

$$x \cap a = \emptyset$$

olmalı. Ama a hem x'in hem de a'nın bir elemanı, yani $a \in x \cap a$. Bu bir çelişkidir. Demek ki "$a \in a$" önermesi yanlış, yani $a \notin a$. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 2. *Eğer a ve b birer kümeyse, ya* $a \notin b$ *ya da* $b \notin a$.

Kanıt: Bir çelişki elde etmek amacıyla, yanıtlamak istediğimiz sonucun yanlış olduğunu varsayalım. Demek ki

$$a \in b \in a$$

ilişkilerini sağlayan a ve b kümeleri vardır.

$$x = \{a, b\}$$

olsun. Temellendirme Aksiyomu'na göre x'te

$$x \cap y = \emptyset$$

eşitliğini sağlayan bir y elemanı olmalı. Ama x'in sadece iki elemanı var: a ve b. Demek ki y, ya a ya da b olmak zorunda.

Diyelim $y = a$. O zaman $b \in c \cap a = c \cap y = \emptyset$, çelişki.

Eğer $y = b$ ise, o zaman, $a \in c \cap b = c \cap y = \emptyset$, çelişki. □

Sonuç 3. *Eğer a, b ve c birer kümeyse, ya $a \notin b$ ya $b \notin c$ ya da $c \notin a$.*

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. Yukardaki kanıtlara çok benzer. □

Şimdi Sonuç 2'den Teorem 3, Teorem 3'ten Teorem 2, Teorem 2'den Teorem 1 çıkar. Madem ki Teorem 1 doğru, şimdi artık hiç çekinmeden, eğer $x + y$ tanımlanmışsa,

$$x + Sy = S(x + y)$$

eşitliğini $x + Sy$'nin tanımı olarak verebiliriz.

Bütün Bunlar Gereksiz! Bir tanım için bunca patırtı kopardıktan sonra, okuru kızdırmak pahasına da olsa, aslında Temellendirme Aksiyomu'na toplamayı tanımlamak için gereksinim olmadığını söyleyeceğim...

Temellendirme Aksiyomu (ya da benzeri bir aksiyom) olmadan Teorem 3'ün kanıtlanamayacağı doğru. Öte yandan biz Teorem 3'ü tüm kümeler için değil, doğal sayılar için kanıtlamak istiyoruz. Teorem 3 doğal sayılar için Temellendirme Aksiyomu'na gerek kalmadan kanıtlanabilir. Ama böyle bir teorem kanıtlamak için önce doğal sayının ne demek olduğunu bilmemiz lazım. Oysa biz daha böyle bir tanım yapmadık. Bölüm 2'de doğal sayıları tanımlayacağız. Doğal sayıları tanımlamak içinse kümeler kuramını biraz daha geliştirmemiz gerekecek. Bunu da bir sonraki bölümde yapacağız.