62. Abel Yakınsaklık Teoremi

Bu bölümde soracağımız ve olumlu olarak yanıtlayacağımız soru şu: Diyelim yakınsaklık yarıçapı R olan bir $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ kuvvet serisi verilmiş. $x = R$ iken serinin yakınsak ya da ıraksak olduğunu bilemeyiz. Ama diyelim bir biçimde,

$$\sum_{i\geq 0} a_i R^i$$

serisinin yakınsak olduğunu kanıtladık. O zaman

$$\lim_{x\to R^-} \sum_{i\geq 0} a_i x^i = \sum_{i\geq 0} a_i R^i$$

olur mu? Yanıt olumlu. Bu sonuç, Abel Yakınsaklık (ya da Limit) Teoremi olarak bilinir.

Abel Yakınsaklıklık Teoremi'ni bu genellikle kanıtlamadan önce aynı teoremi

$$\sum_{i\geq 0} a_i R^i$$

serisi mutlak yakınsak olduğu durumda kanıtlayalım. Bu durumda kanıt çok daha kolay, hatta Weierstrass M-testi sayesinde nerdeyse bariz. Nitekim bu seri mutlak yakınsaksa, Weierstrass M-testinde,

$$X = [-R, R],$$
$$M_i = |a_i R^i|,$$
$$M = \sum_{i\geq 0} |a_i R^i|,$$
$$f_i(x) = a_i x^i$$

olarak alırsak, $\Sigma_{i\geq 0}\ a_i x^i$ serisinin $[-R, R]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu görürüz. Yani

$$f(x) = \Sigma_{i\geq 0}\ a_i x^i$$

ise, $[-R, R]$ üzerinde

$$f(x) \overset{u}{=} \lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)$$

olur. Teorem 56.9'dan dolayı f, X üzerine süreklidir. Demek ki

$$f(R) = \lim_{x\to R^-} f(x) = \lim_{x\to R^-} \sum_{i\geq 0} a_i x^i.$$

Şimdi teoremi en genel haliyle yazıp kanıtlayalım:

Teorem 62.3 [Abel Yakınsaklık Teoremi]. $\Sigma_{i\geq 0}\ a_i x^i$ *serisi*

$$-R < x \leq R$$

için yakınsak olsun. O zaman

$$\lim_{x\to R^-} \Sigma_{i\geq 0}\ a_i x^i = \Sigma_{i\geq 0}\ a_i R^i$$

olur, yani $(-R, R]$ *üzerine tanımlanmış olan,*

$$f(x) = \Sigma_{i\geq 0}\ a_i x^i$$

fonksiyonu R'de (ya da R'nin sağında) süreklidir.

Kanıt: Kolaylık olsun diye, a_i yerine $a_i R^i$ alarak R'nin 1 olduğunu varsayabiliriz.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer

$$0 < 1 - x < \delta$$

ise,

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

olacak ve böylece dilediğimizi kanıtlamış olacağız. x'i 0'dan büyük almanın bir zararı olamaz, öyle yapacağız.

Teorem 31.6 olarak kanıtladığımız Cauchy Çarpım Formülü'nü kullanacağız: Eğer

$$x \in (-1, 1)$$

ise,

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j$$

tanımını yaparak,

$$\frac{1}{1-x} f(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

eşitliğini buluruz. Buradan,

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) &= (1-x)\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right) - f(1) \\ &= (1-x)\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right) - (1-x)\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) f(1) \\ &= (1-x)\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right) - (1-x)\left(\sum_{i=0}^{\infty} f(1) x^i\right) \\ &= (1-x)\sum_{i=0}^{\infty} (c_i - f(1)) x^i \end{aligned}$$

çıkar. Dolayısıyla,

$$|f(x) - f(1)| \le (1-x)\sum_{i=0}^{\infty} |c_i - f(1)| x^i$$

Öte yandan varsayıma göre,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = f(1).$$

Demek ki öyle bir N var ki, her $n > N$ için,

$$|c_n - f(1)| < \varepsilon/2$$

olur. Bunu da kale alarak hesaplara yukarda kaldığımız yerden devam edelim:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(1)| &\le (1-x)\sum_{i=0}^{\infty} |c_i - f(1)| x^i \\ &\le (1-x)\sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| x^i + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=N}^{\infty} x^i \\ &\le (1-x)\sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=N}^{\infty} x^i \\ &= (1-x)\sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\frac{x^N}{1-x} \\ &= (1-x)\sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| + \frac{\varepsilon}{2} x^N \\ &\le (1-x)\sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

buluruz.

$$A = \max\{|c_0 - f(1)|, \ldots, |c_{N-1} - f(1)|\}$$

tanımını yapıp tekrar hesaplara kaldığımız yerden devam edelim:

$$|f(x) - f(1)| \leq (1 - x)AN + \varepsilon/2$$

elde ettik. Şimdi δ'yı $\varepsilon/3AN$ seçersek dilediğimiz

$$0 < 1 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

önermesini elde ederiz. □

63. Genelleştirilmiş Binom Açılımı

Liseden beri bildiğimiz binom açılımını anımsayalım: Eğer x bir gerçel sayı ve n bir doğal sayıysa,

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

olur. x^i'lerin önündeki

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

katsayılarına ***binom katsayıları*** denir. Binom katsayılarını sadeleştirerek yazalım:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}.$$

Eski tanımı unutup, binom katsayılarını bundan böyle,

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

olarak tanımlayalım. Arada bir fark yok gibi görünse de bu yeni tanımın öncekine göre iki avantajı var:

1) $i > n$ iken eski tanım anlamsızdı, oysa şimdi $i > n$ iken yeni tanım 0 sonucunu veriyor, çarpımın ortalarında $(n - n)$ beliriyor çünkü. Dolayısıyla, bu yeni tanımla, binom açılımını

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$$

olarak yazabiliriz. Böylece ifade (basitleşmez belki ama) bir seriye dönüşür.

2) Binom katsayılarının yeni tanımında n bir doğal sayı olmak zorunda değildir, herhangi bir α gerçel sayısı da olabilir:

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(i-1))}{i!}.$$

Ayrıca eğer α yerine X yazarsak, katsayıları $\mathbb{Q}$'de olan i'inci dereceden bir polinom elde ederiz:

$$\binom{X}{i} = \frac{X(X-1)\cdots(X-(i-1))}{i!} \in \mathbb{Q}[X].$$

Eğer $i = 0$ ise tanımı 1 olarak kabul ediyoruz:

$$\binom{X}{0} = 1.$$

Bundan böyle her $\alpha \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı ve her $i \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için,

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$$

tanımını yapalım. $i = 0$ için tanımı gene 1'e eşit kabul ediyoruz.

Bu bölümde - bize göre - dünyanın en şaşırtıcı olgularından birini kanıtlayacağız:

Teorem 63.1. *Her* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ve* $x \in (-1, 1)$ *için*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i. \qquad (*)$$

Ayrıca yakınsaklık mutlak ve düzgündür. Ayrıca sağdaki serinin yakınsaklık yarıçapı 1*'dir.*

Eğer $\alpha \in \mathbb{N}$ ise $(*)$ eşitliğinin geçerli olduğunu biliyoruz. Hatta bu durumda, eşitlik sadece $(-1, 1)$ aralığındaki sayılar için değil, tüm x gerçel sayılar için geçerli.

Eşitliğin $\alpha = -1$ için de geçerli olduğunu kontrol edelim. Bunun için önce,

$$\binom{-1}{i} = \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-i+1)}{i!} = (-1)^i$$

hesabını yapalım. Şimdi seriyi hesaplarsak,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i = (1+x)^{-1}$$

buluruz. Demek ki $(*)$ eşitliği $\alpha = -1$ için de doğruymuş.

Öte yandan, eğer α bir gerçel sayıysa, $(*)$ eşitliğinin sağ tarafındaki serinin yakınsak olduğunu bilmediğimiz gibi, yakınsaksa da pozitif bir sayıya yakınsadığını bile bilmiyoruz. Şimdilik tabii ki...

Önce sağ taraftaki serinin mutlak yakınsaklığı kanıtlayalım. d'Alembert Yakınsaklık Kıstası'nı kullanacağız [Teorem 32.1].

$$\frac{\binom{\alpha}{i+1} x^{i+1}}{\binom{\alpha}{i} x^i} = \frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(i-1))}{i!} x^i} = \frac{\alpha - i}{i+1} x$$

olduğundan, i sonsuza gittiğinde, sağ taraftaki oranın limiti $-x$ olur. Mutlak değerleri aldığımızda, limit $|x|$ çıkar, yani 1'den küçüktür. d'Alembert Yakınsaklık Kıstası'na göre ($*$) eşitliğinin sağ tarafındaki seri mutlak yakınsar. Bundan ayrıca (*) eşitliğinin sağındaki serinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğu anlaşılır. Bundan böyle bu seriye $f_\alpha(x)$ adını verelim:

$$f_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i.$$

İkinci amacımız her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in (-1, 1)$ için

$$f_\alpha(x) f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x) \tag{1}$$

eşitliğini, yani

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\beta}{i} x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{i} x^i$$

eşitliğini kanıtlamak. Bunun için Cauchy Çarpım Formülü'nü kullanacağız (bkz. Teorem 31.6). Demek ki

$$\sum_{i+j=n} \binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{j} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız.

Önsav 63.2. *Her α ve β gerçel sayıları ve her n doğal sayısı için,*

$$\sum_{i+j=n} \binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{j} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: β yerine Y yazıp eşitliği Y cinsinden iki polinomun eşitliği olarak görelim:

$$\sum_{i+j=n} \binom{\alpha}{i}\binom{Y}{j} = \binom{\alpha+Y}{n}.$$

Her iki taraf da n'inci dereceden polinomlar. Ayrıca başkatsayıları eşit: Her ikisinin de başkatsayısı $1/n!$ Demek ki bu iki polinomun n değişik sayıda aynı değerleri aldıklarını kanıtlamak yeterli (bkz. bölümün sonundaki paragraf). Bu değerleri 0, 1, ..., $n - 1$ olarak alacağız. Demek ki şu savı kanıtlamak yeterli:

Sav. *Her k = 0, 1, ..., $n - 1$ için,*

$$\sum\nolimits_{i+j=n} \binom{\alpha}{i}\binom{k}{j} = \binom{\alpha+k}{n}.$$

Sav'ın Kanıtı: Eğer $k < j$ ise, soldaki ifadedeki binom katsayılarının 0 olduklarını biliyoruz. Demek ki, kanıtlamak istediğimiz eşitlik,

$$\sum\nolimits_{i+j=n,\, j\le k} \binom{\alpha}{i}\binom{k}{j} = \binom{\alpha+k}{n}$$

eşitliğine bürünüyor. α yerine X yazarak, bu son eşitsizliği de bir polinom olarak görelim:

$$\sum\nolimits_{i+j=n,\, j\le k} \binom{X}{i}\binom{k}{j} = \binom{X+k}{n}.$$

Bu son eşitliği kanıtlayacağız. Her iki taraf da katsayıları $\mathbb{Q}$'de olan bir polinom. Toplamdaki *i, n*'ye eşit olabiliyor. Demek ki sol taraf *n*'inci dereceden bir polinom. Sağ taraftaki de *n*'inci dereceden elbette. Ayrıca her iki polinomun başkatsayısı $1/n!$. Demek ki eğer bu iki polinom *n* değişik sayıda aynı değerleri alıyorlarsa eşit olacaklar. Nitekim bu iki polinomun 0, 1, ..., *n* sayılarında eşit değerler aldıklarını kanıtlayacağız. Demek ki her ℓ = 0, 1, ..., *n* doğal sayısı için,

$$\sum\nolimits_{i+j=n,\, j\le k} \binom{\ell}{i}\binom{k}{j} = \binom{\ell+k}{n}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Gene ℓ'den büyük *i*'ler gereksiz. Demek ki her ℓ = 0, 1, ..., *n* doğal sayısı için,

$$\sum\nolimits_{i+j=n,\, j\le k,\, i\le \ell} \binom{\ell}{i}\binom{k}{j} = \binom{\ell+k}{n}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Basit bir kombinatorik problemi bu. ℓ tane kadın ve k tane erkekten oluşan bir toplulukta n kişiyi kaç değişik biçimde seçebiliriz? Elbette sağdaki ifade kadar. Öte yandan seçeceğimiz n kişi arasında 0 kadın, 1 kadın, 2 kadın, ..., ℓ kadın olacağını ayrı ayrı düşünürsek, soldaki ifadeyi buluruz. Demek ki iki ifade birbirine eşittir. Böylece hem sav hem de Önsav 63.2 kanıtlanmış oldu. □

Artık, her α, β gerçel sayısı için,

$$f_\alpha(x) f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x) \tag{1}$$

eşitliğini biliyoruz. Dolayısıyla her n doğal sayısı için ve her α için,

$$f_\alpha(x)^n = f_{n\alpha}(x) \tag{2}$$

eşitliğini de biliyoruz.

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : x \in (-1, 1) \Rightarrow (1 + x)^\alpha = f_\alpha(x)\}$$

olsun. Amacımız $A = \mathbb{R}$ eşitliğini kanıtlamak.

$\mathbb{N} \subseteq A$ içindeliğini biliyoruz. Ayrıca -1'in de A'da olduğunu kanıtladık. Ve (1) eşitliğinden dolayı A toplama altında kapalıdır: Eğer $\alpha, \beta \in A$ ise,

$$\begin{aligned} f_{\alpha+\beta}(x) &= f_\alpha(x) f_\beta(x) = (1 + x)^\alpha (1 + x)^\beta \\ &= (1 + x)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\alpha \in A$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise $n\alpha \in A$ olur. Bundan da

$$\mathbb{Z} = (-1)\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \subseteq A$$

içindeliği çıkar. Şimdi $\mathbb{Q} \subseteq A$ içindeliğini kanıtlayalım. $n \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için, (2)'den dolayı,

$$f_{n/m}(x)^m = f_n(x) = (1 + x)^n$$

olur. Demek ki,

$$f_{n/m}(x) = (1 + x)^{n/m}$$

ve $n/m \in A$. Dolayısıyla,

$$\mathbb{Q} \subseteq A$$

içindeliği kanıtlanmış oldu. Aynı şeyi $\mathbb{R}$ için yapmak biraz daha zamanımızı alacak. Bunun için önce şu sonucu kanıtlayacağız.

Önsav 63.3. *Sabit bir* $x \in [-1, 1]$ *ve* $\alpha \geq 0$ *için,*

$$g_{x,i}(\alpha) = \binom{\alpha}{i} x^i = \frac{x^i}{i!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(i-1))$$

tanımını yapalım. Elbette

$$f_\alpha(x) = \Sigma_{i\geq 0}\, g_{x,i}(\alpha)$$

eşitliği geçerlidir.

$$g_x(\alpha) = f_\alpha(x) = \Sigma_{i\geq 0}\, g_{x,i}(\alpha)$$

serisi, $\mathbb{R}^{\geq 1}$ *kümesinin her sınırlı altkümesi üzerine düzgün ve mutlak yakınsar. Eğer* $x \neq \pm 1$ *ise, seri,* $\mathbb{R}^{\geq 0}$ *kümesinin her sınırlı altkümesi üzerine düzgün ve mutlak yakınsar. Demek ki,* g_x *fonksiyonu* $\mathbb{R}^{\geq 1}$ *üzerine süreklidir ve eğer* $x \neq \pm 1$ *ise* $\mathbb{R}^{\geq 0}$ *üzerine süreklidir.*

Kanıt: $\Sigma_{i\geq 0}\, g_{x,i}(\alpha)$ serisinin bir k doğal sayısı için $[k, k+1]$ aralığında düzgün ve mutlak yakınsadığını kanıtlamak yeterli. Seriye Weierstrass M-Testi'ni uygulayacağız (bkz. Teorem 57.1).

$\alpha \in [k, k+1]$ olsun. $i > k$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
\left|\binom{\alpha}{i}\right| &= \frac{|\alpha||\alpha-1|\cdots|\alpha-(i-1)|}{i!}\\
&= \frac{\left[\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)\right]\left[(k+1-\alpha)\cdots(i-1-\alpha)\right]}{i!}\\
&\leq \frac{\left[(k+1)(k)(k-1)\cdots 2\cdot 1\right]\left[1\cdot 2\cdot\cdots(i-1-k)\right]}{i!}\\
&\leq \frac{(k+1)!(i-1-k)!}{i!} = \frac{(k+1)!}{i(i-1)(i-2)\cdots(i-k)}
\end{aligned}$$

olur. (İkinci satırdan üçüncü satıra geçerken + olarak beliren α'lar yerine $k+1$, – olarak beliren α'lar yerine k koyun.) Eğer

$$k \geq 1$$

ise, buradan,

$$\left|\binom{\alpha}{i}\right| = \frac{(k+1)!}{i(i-1)(i-2)\cdots(i-k)} \leq \frac{(k+1)!}{i(i-1)}$$

çıkar.

$$M_i = \frac{(k+1)!}{i(i-1)}$$

olsun. O zaman,

$$\left|\binom{\alpha}{i}x^i\right| = \left|\binom{\alpha}{i}\right|x^i \le \left|\binom{\alpha}{i}\right| \le M_i$$

olur. $\Sigma_{i\geq k}\ M_i$ serisi yakınsak olduğundan (teleskopik dizi olduğundan örneğin), Weierstrass M-Testi'ni uygulayabiliriz:

$$x \in [-1, 1]$$

ise

$$g_x(\alpha) = f_\alpha(x) = \Sigma_{i\geq 0}\ g_{x,i}(\alpha)$$

serisi her $k \geq 1$ doğal sayısı için $[k, k+1]$ üzerine düzgün yakınsaktır.

Şimdi $k = 0$ olsun. O zaman, bir önceki sütundaki hesaplardan, her $i > k = 0$ için

$$\left|\binom{\alpha}{i}\right| \le \frac{(k+1)!}{i(i-1)(i-2)\cdots(i-k)} = \frac{1}{i}$$

çıkar. Demek ki

$$\left|\binom{\alpha}{i}x^i\right| = \left|\binom{\alpha}{i}\right|x^i \le \frac{x^i}{i} \le x^i$$

olur. Bu sefer $M_i = x^i$ olsun. Eğer $x \neq \pm 1$ ise, $\Sigma_{i\geq k}\ M_i$ serisi yakınsak olduğundan, Weierstrass M-Testi'ni uygulayabiliriz:

$$x \in [-1, 1]$$

ise

$$g_x(\alpha) = f_\alpha(x) = \Sigma_{i\geq 0}\ g_{x,i}(\alpha)$$

serisi $[0, 1]$ üzerine de düzgün yakınsaktır. □

Şimdi artık g_x fonksiyonun sürekliliğini kullanarak, $A = \mathbb{R}$ eşitliğini kanıtlayabiliriz. $x \in (-1, 1)$ ve $\alpha \geq 0$ olsun. α'ya yakınsayan pozitif ve kesirli bir $(q_n)_n$ sayılar dizisi alalım:

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= \lim_{n\to\infty}(1+x)^{q_n} = \lim_{n\to\infty} f_{q_n}(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} g_x(q_n) = g_x(\lim_{n\to\infty} q_n)\\ &= g_x(\alpha) = f_{\alpha}(x).\end{aligned}$$

Demek ki $\alpha \in A$, yani $\mathbb{R}^{\geq 0} \subseteq A$. Öte yandan,

$$\begin{aligned}f_{\alpha}(x)f_{-\alpha}(x) &= f_{\alpha-\alpha}(x) = f_{\alpha-\alpha}(x)\\ &= f_0(x) = 1 = (1+x)^{\alpha}(1+x)^{-\alpha}\\ &= f_{\alpha}(x)(1+x)^{-\alpha}\end{aligned}$$

olduğundan ve $f_{\alpha}(x) = (1+x)^{\alpha} \neq 0$ olduğundan,

$$f_{-\alpha}(x) = (1+x)^{-\alpha}$$

buluruz. Demek ki, hem α hem de $-\alpha$ sayıları A'da. Böylece her α gerçel sayısı ve $x \in (-1, 1)$ için,
eşitliğini kanıtlamış olduk.

Düzgün yakınsaklık Teorem 57.1'deki Weierstrass M-Testi'nden çıkar. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 63.4. *Her* $\alpha \geq 0$ *için*

$$\lim_{i\to\infty}\left|\binom{\alpha}{i}\right| = 0$$

olur.

Şimdi, analizin en heyecanlı konularından biri olan sınır noktalarında ne olduğuyla ilgilenelim.

Teorem 63.5. *Eğer* $x = -1$ *ise*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}x^i$$

serisi $\alpha \geq 0$ *için mutlak yakınsar*, $\alpha < 0$ *için ıraksar.*

Eğer $x = 1$ *ise*, *seri* $\alpha \leq -1$ *için ıraksar*, $\alpha > 0$ *için mutlak yakınsar*, $-1 < \alpha < 0$ *için koşullu yakınsar.*

Kanıt: Önsav 63.3'ten dolayı $\alpha \geq 1$ ise mutlak yakınsaklığı biliyoruz. Dolayısıyla sadece $\alpha < 1$ durumunu ele almamız lazım. Bundan böyle $\alpha < 1$ olsun.

$i \geq 2$ için,

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(i-1))}{i!}$$
$$= \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)}{i!}(-1)^{i-1}$$

olduğundan, $x = -1$ ise,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}(-1)^i$$
$$= 1-\alpha-\alpha\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)}{i!}$$

olur. Sağ taraftaki Σ altındaki tüm parantezler pozitif olduklarından, yakınsaklık varsa ancak mutlak olabilir. Eğer $\alpha < 0$ ise, $\beta = -\alpha > 0$ olsun. Her $j > 0$ doğal sayısı için, $j + \beta = j - \alpha > j$ olduğundan, yukardaki hesabı devam ettirerek,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}(-1)^i$$
$$= 1-\alpha-\alpha\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)}{i!}$$
$$= 1+\beta+\beta\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)(2+\beta)\cdots((i-1)+\beta)}{i!}$$
$$= 1+\beta+\beta\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\beta}{i-1}\right)}{i}$$
$$> 1+\beta+\beta\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i} = \infty$$

buluruz. Demek ki $x = -1$ ve $\alpha < 0$ ise seri ıraksar. $x = -1$ ve $\alpha \in (0, 1)$ durumunu en sona bırakıyoruz.

Eğer $x = 1$ ise,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}$$
$$= 1+\alpha+\alpha\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)}{i!}(-1)^{i-1}$$

elde ederiz. Eğer $\alpha \leq -1$ ise, genel terim 0'a gitmez çünkü mutlak değeri sonsuza gider; nitekim $\beta = -\alpha$ olsun. $1 \leq k \leq \beta$ ise,

$$\frac{|(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)|}{i!} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+i-1)}{i!}$$
$$\geq \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+i-1)}{i!} = \frac{(k+i-1)!}{k!i!}$$
$$= \frac{(i+k-1)(i+k-2)\cdots(i+1)}{k!} \to \infty$$

olur. Demek ki bu durumda seri ıraksar.

$x = 1$ ve $\alpha \in (-1, 0)$ ise, $\beta = -\alpha \in (0, 1)$ olsun;

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}$$
$$= 1+\alpha+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(i-1))}{i!}$$
$$= 1-\beta+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(-\beta)(-\beta-1)(-\beta-2)\cdots(-\beta-(i-1))}{i!}$$
$$= 1-\beta+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+(i-1))}{i!}(-1)^i$$

olur. Genel terimin mutlak değerinin, yani,

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+(i-1))}{i!}$$

dizisinin azaldığını görmek kolay. Eğer bu dizinin, i sonsuza gittiğinde 0'a gittiğini gösterirsek, o zaman Leibniz'in dalgalanan seriler üzerine teoremini [Teorem 39.1] kullanarak serinin yakınsak olduğunu kanıtlayabiliriz. Bunu gösterelim. (Serdar Boztaş'a sonsuz teşekkürler...) $\varepsilon = 1 - \beta$ olsun. $0 < \varepsilon < 1$ olur. O zaman,

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+(i-1))}{i!} = \frac{(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\cdots(i-\varepsilon)}{i!}$$
$$= (1-\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\varepsilon}{i}\right) \le \exp(-\varepsilon)\exp(-\varepsilon/2)\cdots\exp(-\varepsilon/i)$$
$$= \exp(-\varepsilon-\varepsilon/2-\cdots-\varepsilon/i) = \exp(-\varepsilon(1+1/2+\cdots+1/i)$$
$$= \frac{1}{\exp(\varepsilon(1+1/2+\cdots+1/i)}$$

olur. (Bkz. Alıştırma 1.) Eğer i'yi sonsuza götürürsek,

$$1 + 1/2 + \cdots + 1/i$$

ve dolayısıyla

$$\varepsilon(1 + 1/2 + \cdots + 1/i)$$

ifadesi sonsuza yakınsar ve Sandöviç Teoremi'nden, istediğimiz limiti gerçekten de 0 buluruz. Demek ki bu durumda seri koşullu yakınsar (yani yakınsar ama mutlak yakınsamaz).

En sona $0 < \alpha < 1$ durumu kaldı. Bu durumda mutlak yakınsaklığı kanıtlayacağımızdan $x = 1$ alabiliriz. Raabe Yakınsaklık Kıstası'nı (Teorem 38.1) kullanacağız:

$$i\left(1-\frac{\dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(i-1))(\alpha-i)|}{(i+1)!}}{\dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(i-1))|}{i!}}\right) = i\left(1-\frac{i-\alpha}{i+1}\right)$$
$$= i\left(\frac{i+1-i+\alpha}{i+1}\right) = i\left(\frac{1+\alpha}{i+1}\right) = \left(\frac{i}{i+1}\right)(1+\alpha)$$

olduğundan ve bu ifadenin limiti $1 + \alpha > 1$ olduğundan, Raabe Kıstası'na göre,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}$$

serisi mutlak yakınsar. Teorem 5 kanıtlanmıştır. □

Sonuç 6. *Her* $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ *ve her* $x \in [-1, 1]$ *için,*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$$

olur. Yakınsaklık düzgün ve mutlaktır.

Kanıt: Serinin yakınsaklığının düzgün ve mutlak olduğu Teorem 1 ve 5'ten belli.

Eşitliğin $x \in (-1, 1)$ için Teorem 1'den biliyoruz.

Eşitliği $x = 1$ ve $x = -1$ için kanıtlamalıyız. Bu da Bölüm 62'te kanıtlanan Abel Yakınsaklık Teoremi'nden çıkar. □

Alıştırmalar

1. $0 \leq \alpha \leq 1$ olsun.

$$1 - \alpha \leq \exp(-\alpha)$$

eşitsizliğini kanıtlayın. **İpucu:**

$$\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} - \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq 0.$$

2. $0 < \alpha < 1$ ise,

$$\lim_{i\to\infty} i^\alpha \frac{\alpha(1-\alpha)\cdots(i-1-\alpha)}{(i-1)!} = 0$$

eşitliği doğru mudur?

Polinomların Eşitliği

Sav. *Eğer* $f, g \in \mathbb{R}[X]$ *polinomlarının dereceleri ve başkatsayıları eşitse ve dereceleri kadar değişik sayıda aynı değerleri alıyorlarsa, o zaman* $f = g$ *olur.*

Kanıt: Polinomların derecesi n olsun. $a_1, ..., a_n$ sayılarında f ve g polinomları aynı değerleri alsınlar. O zaman $f - g$ polinomunun derecesi n'den küçüktür ve $a_1, ..., a_n$ sayıları bu polinomunun n değişik köküdür. Demek ki $f - g = 0$ olur. Sav kanıtlanmıştır. □

Bu sav aynı kanıtla, elbette, sadece $\mathbb{R}$ için değil, her tamlık bölgesi için, örneğin $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{Z}$ için de geçerlidir.

64. Tıkız Kümeler

Bu bölümde amacımız, bundan sonraki birkaç teoremi kanıtlamak için gereken "topoloji" bilgisini vermek. Daha sonraki ders notlarımızda topolojiye çok daha geniş yer ayıracağız. Şimdilik bu kadarıyla yetinelim. Konunun alışageldiğimiz analizden ziyade kümeler kuramı seviyesinde olması okuru bu bölümü ve bir sonraki ders notlarını iştahla okumasına yol açacaktır diye düşünmek istiyoruz.

64.1. Açık Kümeler

Gerçel sayılar kümesinin, açık aralıkların bileşimi olarak yazılan bir kümeye ***açık küme*** diyelim. Demek ki $\mathbb{R}$'nin bir U altkümesinin açık olması için yeter ve gerek koşul, her $a \in U$ için,

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq U$$

içindeliğini sağlayan (ve a'ya göre değişebilen) bir $\delta > 0$ sayısının olmasıdır.

Tanıma göre $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ açık kümelerdir. Her açık aralık da açık bir kümedir. Açık kümelerin bileşimi elbette açıktır. Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır.

$[0, 1]$ ya da $(0, 1]$ aralıkları açık değildirler, çünkü 1'i içeren her açık aralık mutlaka 1'den büyük sayılar da içermek zorundadır.

Yukarda verdiğimiz tanım aslında $\mathbb{R}$'nin açık kümelerinin tanımı. Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ise, X'in bir açık kümesi, tanım gereği, $\mathbb{R}$'nin bir açık kümesiyle X'in kesişimidir. X'in açık kümelerine ***X-açık*** diyebiliriz. Bir U

$\subseteq X$ kümesinin X-açık olması için yeter ve gerek koşul, her $a \in U$ için, $(a - \delta, a + \delta) \cap X \subseteq U$ içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısının olmasıdır.

Tanıma göre $\emptyset$ ve X kümeleri X-açık kümelerdir. X-açık kümelerin bileşimi elbette açıktır. Sonlu sayıda X-açık kümenin kesişimi de açıktır.

Okur $\mathbb{R}$-açık kümeyle (ilk verdiğimiz tanımla) açık kümenin aynı kavram olduğunu anlamakta güçlük çekmeyecektir.

X'in X-açık kümelerinin X'te tümleyenlerine ***X-kapalı küme*** denir. Açık kümeler için yazdığımız her özelliği uygun dile çevirerek kapalı kümeler için yazabiliriz. Örneğin, $\emptyset$ ve X kümeleri X-kapalı kümelerdir, X-kapalı kümelerin kesişimi kapalıdır ve sonlu sayıda X-kapalı kümenin bileşimi kapalıdır.

Önsav 42.4'ten anımsayalım: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ ise x ile A arasındaki mesafe,

$$d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\} = \inf_{a \in A} |x - a|$$

olarak tanımlanır. Eğer $x \in A$ ise $d(x, A) = 0$ olur. Ama bunun tersi yanlıştır: $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ ise 1, A'da değildir ama A'ya mesafesi 0'dır. Öte yandan eğer A kapalıysa, her şey yolunda gider.

Önsav 64.1. *Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ kapalı bir altküme ise*

i. "$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$" *eşdeğerliliği geçerlidir.*

ii. *Eğer A üstten sınırlıysa ve boşküme değilse*, sup $A \in A$ *olur.*

iii. *Terimleri A'dan olan bir dizinin limiti A'dadır.*

Kanıt: (**i**) Nitekim, eğer $x \notin A$ ise, A^c açık olduğundan, x'i içeren ve A'yı kesmeyen $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık bir aralık vardır, dolayısıyla

$$d(x, A) \geq \varepsilon > 0$$

olur. Diğer yönün kanıtı bariz.

(**ii**) $\sup A = s \notin A$ olsun. O zaman s, açık bir küme olan A^c'nin bir elemanıdır. Dolayısıyla bir $\varepsilon > 0$ için,

$$(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap A = \emptyset$$

olur. Ama bu da $s = \sup A$ tanımıyla çelişir.

(**iii**) Bir önceki kanıt gibi. □

64.2. Süreklilik

Açık kümelerin var oluş nedeni aşağıdaki sonuçta gizli:

.

Teorem 64.2. *$X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için yeter ve gerek koşul, $\mathbb{R}$'nin her açık kümesinin f altındaki öngörüntüsünün de açık (yani X-açık) olmasıdır.*

Kanıt: Önce f'nin sürekli olduğunu varsayalım. Eğer $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralıksa, $f^{-1}(I)$ kümesinin X-açık olduğunu kanıtlamak yeterli. Yani her a in $f^{-1}(I)$ için, öyle bir $\delta > 0$ bulmalıyız ki,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap X \subseteq f^{-1}(I)$$

olsun. İşe koyulalım: $f(a) \in I$ ve I bir açık aralık olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki,

$$(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subseteq I$$

olur. f, a'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon) \subseteq I,$$

yani

$$f(a - \delta, a + \delta) \subseteq I,$$

yani

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq f^{-1}(I)$$

olur.

Şimdi açık kümelerin f-öngörüntülerinin X-açık oldukarını varsayalım. $a \in X$ olsun. f'nin a'da sürekli olduğunu kanıtlayacağız. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ açık aralığı açık bir aralık olduğundan, bu aralığın önimgesi olan $f^{-1}(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ kümesi X-açıktır. a,bu X-açık kümenin bir elemanı olduğundan,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap X \subseteq f^{-1}(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. Şimdi $x \in X$ elemanı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$$

olur, dolayısıyla

$$x \in f^{-1}(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

olur, yani

$$f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

olur, yani $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olur. □

64.3. Tıkızlık

$X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $(U_i)_{i\in I}$, X'in bir altkümeler ailesi olsun. Eğer $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ ise, $(U_i)_{i\in I}$ ailesine X'in ***örtüsü*** ya da X-***örtüsü*** adı verilir. Eğer her U_i açıksa, örtüye ***açık örtü*** denir. Eğer I sonluysa, örtü ***sonlu örtü*** adını alır. Eğer $J \subseteq I$ ise ve $(U_j)_{j\in J}$, X'in hâlâ daha bir örtüsüyse, $(U_j)_{j\in J}$ ailesine $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün ***altörtüsü*** ya da daha açık olmak gerekirse X-***altörtüsü*** adı verilir. Eğer J sonluysa, ***sonlu altörtüden*** sözedilir.

Eğer X'in her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa, X'e ***tıkız*** denir. Yani X'in tıkız olması için,

$$X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

içindeliğini sağlayan X'in **her** U_i açık kümeleri için,

$$X \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci olmalıdır. U_i'ler açık aralıkların bileşimi olduklarından, bu koşulu şöyle de yazabiliriz: X'in tıkız olması için,

$$X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

içindeliğini sağlayan X'in **her** U_i açık aralıkları için,

$$X \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci olmalıdır.

Yukardaki tanımdaki "her" sözcüğünün altını çizeriz; tanımın kilit sözcüğüdür. Bulunan sonlu örtü de orijinal örtünün **altörtüsü** olmak zorundadır... (Bunlar, bin yıllık öğretmenlik tecrübesinden damıtılmış altın niteliğinde uyarılardır.)

Hemen birkaç örnek ve naörnek verelim.

Örnekler. $\mathbb{R}$'nin her sonlu altkümesi (dolayısıyla boşküme de) tıkızdır. $(0, 1)$ aralığı tıkız değildir, çünkü örneğin

$$((1/n, 1))_{n=1,2,3,\ldots}$$

açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü yoktur. Ama birazdan her kapalı aralığın tıkız olduğunu göreceğiz. Sonlu sayıda tıkız kümenin bileşimi de tıkızdır. Daha fazla örnek vermeye gerek yok, çünkü şimdi $\mathbb{R}$'nin tüm tıkız kümelerini bileceğiz.

Teorem 64.3. [Heine-Borel]. $\mathbb{R}$'*nin bir altkümesinin tıkız olması için yeter ve gerek koşul altkümenin sınırlı ve kapalı olmasıdır.*

Kanıt: $X \subseteq \mathbb{R}$ tıkız olsun. $((-n, n))_{n\in\mathbb{N}}$, X'in bir açık örtüsü olduğundan, X bunların sonlu tanesinin bileşiminin içindedir; dolayısıyla X sınırlıdır.

Şimdi X'in kapalı olduğunu kanıtlayalım. Bunun için X'in tümleyenenin açık olduğunu kanıtlamamız lazım. $x \notin X$ olsun. Pozitif bir n doğal sayısı için $[x - 1/n, x + 1/n]^c$ kümeleri (iki açık aralığın bileşimi olduklarından) açıktırlar. Öte yandan,

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1,2,3,\ldots} [x - 1/n, x + 1/n]^c &= \left(\bigcap_{n=1,2,3,\ldots} [x - 1/n, x + 1/n]\right)^c \\ &= \{x\}c = \mathbb{R} \setminus \{x\} \supseteq X\end{aligned}$$

olduğundan, $[x - 1/n, x + 1/n]^c$ kümeleri X'in bir açık örtüsüdür. Demek ki bunların sonlu tanesi X'i içerir. Demek ki büyük bir n için $X \subseteq [x - 1/n, x + 1/n]^c$ olur. Yani

$$[x - 1/n, x + 1/n] \subseteq X^c,$$

ve dolayısıyla

$$(x - 1/n, x + 1/n) \subseteq X^c,$$

olur. Böylece x'i içeren bir açık aralığın X'in tümleyeninde olduğunu göstermiş olduk. Bu da X'in tümleyeni açık demektir. Teoremin yarısı kanıtlanmıştır.

Teoremin diğer yarısını kanıtlamak için yardımcı bir sonuca ihtiyacımız var:

Önsav 64.4. *$Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer Y kapalı ve X tıkızsa Y de tıkızdır.*

Kanıt: $(U_i)_{i\in I}$, Y'nin bir açık örtüsü olsun. Bu örtüye açık bir küme olan Y^c'yi eklersek, X'in bir açık örtüsünü elde etmiş oluruz. X tıkız olduğundan, öyle sonlu bir $J \subseteq I$ vardır ki, $(U_j)_{j\in J}$ ve Y^c kümeleri X'i, dolayısıyla Y'yi de örter. Ama tabii Y'yi örtmek için Y^c kümesine ihtiyaç yoktur: $(U_j)_{j\in J}$ sonlu ailesi Y'yi örter. □

Şimdi Teorem 64.3'ün kanıtına devam edelim. ℝ'nin sınırlı ve kapalı bir K altkümesi verilmiş olsun. K sınırlı olduğundan, belli $a < b$ sayıları için, $K \subseteq [a, b]$ olur. K kapalı olduğundan, Önsav 64.4'e göre $[a, b]$ aralığının tıkız olduğunu kanıtlamak yeterli.

$(U_i)_{i \in I}$, $[a, b]$ aralığının açık bir örtüsü olsun. Bir $c \in [a, b]$ için, $(U_i)_{i \in I}$ aynı zamanda $[a, c]$ aralığının örtüsüdür. Eğer bu örtünün sonlu sayıda elemanı $[a, c]$ kapalı aralığını örtüyorsa, c sayısına bu kanıtlık "güzel sayı" diyelim. a elbette güzel bir sayıdır. Demek ki güzel sayılar kümesi boş değildir. Amacımız c'nin güzel bir sayı olduğunu kanıtlamak. Eğer c güzel bir sayıysa ve c_1 sayısı $a \leq c_1 \leq c$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, o zaman c_1 sayısı da güzel bir sayıdır. Demek ki güzel sayılar kümesi G, ℝ'nin bir aralığıdır. G, b tarafından üstten sınırlı olduğundan G'nin en küçük üstsınırı vardır. Bu en küçük üstsınıra g diyelim. U_i'ler arasından g'yi içeren bir U_i alalım. U_i açık olduğundan ve g'yi içerdiğinden, öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki,

$$(g - \varepsilon, g + \varepsilon) \subseteq U_i$$

olur. Öte yandan $g - \varepsilon < g$ olduğundan, $g - \varepsilon$ güzel bir sayıdır. Demek ki sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci için $[a, g - \varepsilon]$ aralığı

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$$

açık kümeleri tarafından kaplanır. Ama o zaman, $[a, g + \varepsilon/2]$ aralığı

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, U_i$$

tarafından kaplanır. Bundan, her şeyden önce g'nin güzel bir nokta olduğu çıkar. Sonra g'nin b'den küçük olmayacağı çıkar, çünkü aksi halde bir $0 < \alpha \leq \varepsilon/2$ için $g < g + \alpha < b$ olur ve $g + \alpha$, g'den büyük bir güzel nokta olur. Demek ki $g = b$ ve b güzel bir nokta. Dolayısıyla $[a, b]$ aralığı $(U_i)_{i \in I}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsü tarafından örtülür. □

Yukarda verilen kanıt şık, zarif, zekice ve son derece anlaşılır. Ama standart kanıtlardan değil. Ortalama bir matematikçinin hemen aklına gelmeyecek kadar zekice bu yazarın zevkine göre. Bu teoremin daha standart kanıtı topolojinin yöntemleri açısından daha eğitici olduğunu düşünüyoruz. Daha standart kanıtı verelim:

Teorem 64.3'ün İkinci Yarısının İkinci Kanıtı: $[a, b]$ aralığının tıkız olmadığını varsayalım. O zaman $[a, b]$ aralığının sonlu altörtüsü olmayan bir $(U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü vardır. c_1, a ve b noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[a, c_1]$ aralığı ya da $[c_1, b]$ aralığı sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez. Diyelim $[a, c_1]$ sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor. c_2, a ve c_1 noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[a, c_2]$ ya da $[c_2, c_1]$ aralığı tarafından örtülmez. Diyelim $[c_2, c_1]$ sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor. c_3, c_2 ve c_1 noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[c_2, c_3]$ ya da $[c_3, c_1]$ aralığı sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor... Bunu böyle devam ettirerek, öyle

$$[a, b] = [d_0, e_0] \supseteq [d_1, e_1] \supseteq [d_2, e_2] \supseteq \ldots$$

aralıkları bulabiliriz ki, hem

$$(d_n - e_n) = (b - a)/2^n$$

olur hem de $[d_n, e_n]$ aralıkları sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez. Kapalı Kutular Teoremi'ne göre (Teorem 17.1), bütün bu $[d_n, e_n]$ aralıkları tek bir noktada kesişir, diyelim

$$f = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} e_n$$

noktasında kesişiyorlar. $f \in [a, b]$ olduğundan, bir $i \in I$ için $f \in U_i$ olur. U_i açık olduğundan, bir $\in > 0$ için, $(f - \varepsilon, f + \varepsilon) \subseteq U_i$ olur.

$$f = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} e_n$$

olduğundan, bir n göstergeci için,

$$[d_n, e_n] \subseteq (f - \varepsilon, f + \varepsilon) \subseteq U_i$$

olur. Ama o zaman da $[d_n, e_n]$ tek bir (dolayısıyla sonlu sayıda) U_i tarafından kaplanır. Bir çelişki. Demek ki $[a, b]$ aralığı tıkız bir kümedir. □

64.4. Lebesgue Sayısı

Sınırlı bir A altkümesinin ***çapı***,

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki oldukça teknik önsav tıkız kümelerin açık örtülerinin çok küçük çaplı elemanlarının gereksiz olduğunu söylüyor.

Önsav 64.5 [Lebesgue Sayısı] X, $\mathbb{R}$'*nin tıkız bir altkümesi ve* $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ *ailesi*, X'*in açık bir örtüsü olsun. O zaman öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki*, X'*in çapı en fazla* δ *olan her altküme* $\mathcal{U}$ *ailesinin bir elemanının* (*yani* U_i'*lerden birinin*) *altkümesidir*.

Kanıt: Eğer U_i'lerden biri X'e eşitse, kanıtlayacak bir şey yok. Bundan böyle hiçbir U_i'nin X'e eşit olmadığını varsayalım. $\mathcal{U}$ ailesinin sonlu bir $\mathcal{V}$ altörtüsünü seçelim. Diyelim,

$$\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_n\}.$$

$C_i = U_i^c$ olsun. C_i kapalıdır. $d(x, C_i)$, x'in C_i'ye olan uzaklığı olsun (Önsav 42.4)

$$U_1 \cup \ldots \cup U_n = X$$

olduğundan,

$$C_1 \cap \ldots \cap C_n = \emptyset$$

olur. Demek ki X'in her x elemanı C_i kümelerinden en az birinin elemanı değildir ve, C_i kapalı olduğundan, Önsav 64.1.i'e göre, $d(x, C_i)$ sayılarından en az biri pozitiftir ve aşağıdaki formülle tanımlanan

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) > 0$$

fonksiyonu pozitif değerler alır. Böylece tanımlanan

$$f : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu da biliyoruz (Önsav 42.4). X tıkız olduğundan, f minimum değerini alır. Bu minimum değer x_0'da alınmış olsun ve

$$\delta = f(x_0) > 0$$

olsun. B, yarıçapı δ'dan küçük bir altküme olsun. $x \in B$ olsun. Demek ki

$$B \subseteq \mathrm{B}(x, \delta).$$

Şimdi, $d(x, C_1)$, ..., $d(x, C_n)$ sayılarının en büyüğüne $d(x, C_i)$ diyelim. O zaman,

$$\delta \le f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) \le d(x, C_i)$$

olur. Demek ki

$$\mathrm{B}(x, \delta) \cap C_i = \emptyset,$$

yani

$$\mathrm{B}(x, \delta) \subseteq U_i.$$

Ama $B \subseteq \mathrm{B}(x, \delta)$ olduğundan, bu son içindelik istediğimizi kanıtlar. □

X'in verilmiş bir $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü için, yukardaki önsavdaki gibi bir $\delta > 0$ sayısına $\mathcal{U}$'nun ***Lebesgue sayısı*** adı verilir. Elbette bir Lebesgue sayısından daha küçük sayılar da Lebesgue sayılarıdır. Lebesgue sayılarının varlığını bir sonraki altbölümde kullanacağız.

64.5. Düzgün Süreklilik

Düzgün süreklilik, sürekliliğin çok özel bir halidir. Ama genel olarak tüm topolojik uzaylarda değil, sadece metrik uzaylarda geçerli olan bir kavramdır. Tanımı anımsatalım:

(X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay ve

$$f : X \to Y$$

bir fonksiyon olsun. Önce f'nin sürekli olduğunun ne demek olduğunu anımsatalım. f'nin sürekli olması için f'nin X'in her x noktasında sürekli olması gerekmektedir; yani her $a \in X$ için şu özellik doğru olmalıdır:

Her $\varepsilon > 0$ *için öyle bir* $\delta > 0$ *olmalıdır ki*, *her* $x \in X$ *için*

$$d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(a, x) < \varepsilon.$$

Bunu daha biçimsel olarak yazacak olursak, süreklilik

$$\forall a\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(a,x) < \varepsilon)$$

önermesine denktir. Buradaki δ sayısı verilmiş olan ε'a göre değişir elbette, ama a'ya göre de değişebilir, hatta çoğu zaman a'ya göre değişir. Bu yüzden kimi zaman δ yerine $\delta_{a,\varepsilon}$ yazılır.

Ama kimi zaman da δ sayısını a'dan bağımsız (sadece ε'a bağımlı) seçebiliriz. O zaman çok özel, çok daha güçlü bir süreklilik söz konusu olur. Bu durumda f'nin ***düzgün sürekli*** olduğu söylenir. Yani eğer

Her $\varepsilon > 0$ *ve* X*'in her* a *ve* x *elemanları için*

$$d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(a, x) < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ *varsa*

o zaman f fonksiyonuna ***düzgün sürekli*** denir. Bunu daha biçimsel olarak yazacak olursak, düzgün süreklilik,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a\ \forall x\ (d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(a,x) < \varepsilon)$$

önermesine denktir. Burada "$\forall a$" ifadesinin en baştan ortalara, "$\exists \delta > 0$" ifadesinden sonraya gittiğine dikkatinizi çekerim: Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için **tüm** a ve x'ler için geçerli olan bir $\delta > 0$ bulunuyor. Ama artık a ile x arasında büyük bir ayrım yok, dolayısıyla a ve x yerine x ve y kullanırsak daha şık bir tanıma ulaşmış oluruz: Düzgün süreklilik

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \forall y\ (d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(x,y) < \varepsilon)$$

önermesine denktir.

Eğer $A \subseteq X$ ise ve $f_{|A}$ fonksiyonu düzgün sürekliyse, o zaman f'nin A üzerine ***düzgün sürekli*** olduğu söylenir.

Örnek. $(0, \infty)$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = 1/x$ formülüyle tanımlanan fonksiyon düzgün sürekli değildir çünkü a küçüldükçe δ sayısı küçülür.

Öte yandan (sınırlı ya da sınırsız) kapalı bir aralığa kısıtlarsak bu fonksiyon düzgün sürekli olur. Yani $f(x) = 1/x$ formülüyle tanımlanmış fonksiyon kapalı aralıklar üzerine düzgün süreklidir.

Düzgün sürekliliğin yararlarını daha ilerde göreceğiz ama tıkız kümelerden sözederken düzgün süreklilikten sözetmemek olmazdı.

Teorem 64.6. *Tanım kümesi* $\mathbb{R}$*'nin tıkız bir altkümesi olan her sürekli fonksiyon düzgün süreklidir.*

Kanıt: $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. $((y - \varepsilon/2, y + \varepsilon/2)_{y\in\mathbb{R}}$ yuvarlar ailesi $\mathbb{R}$'nin açık bir örtüsüdür. f sürekli olduğundan,

$$(f^{-1}((y - \varepsilon/2, y + \varepsilon/2)))_{y\in\mathbb{R}}$$

ailesi de X'in bir açık örtüsüdür. $\delta > 0$ bu açık örtünün Lebesgue sayısı olsun. Şimdi $x_1, x_2 \in X$ olsun ve $d_X(x_1, x_2) < \delta$ varsayımını yapalım. O zaman $\{x_1, x_2\}$ kümesinin çapı δ'dan küçüktür. Demek ki bir $y \in Y$ için,

$$\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(\mathrm{B}(y, \varepsilon/2)),$$

yani

$$x_1, x_2 \in f^{-1}(\mathrm{B}(y, \varepsilon/2)),$$

yani

$$f(x_1), f(x_2) \in \mathrm{B}(y, \varepsilon/2),$$

yani

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le d_Y(f(x_1), y) + d_Y(y, f(x_2)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur. Bu da f'nin düzgün sürekliliğini kanıtlar. □

64.5. Uç Değerler

Bir sonraki teoreme ihtiyacımız olmayacak ama hem önemlidir hem de kanıtı kümeler kuramı seviyesindedir.

Teorem 64.7. *Tıkız bir kümenin sürekli bir fonksiyon altında imgesi tıkızdır.*

Kanıt: $K \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, K tıkız ve $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $f(K)$'nın tıkız olduğunu göstermek istiyoruz. $(V_i)_{i\in I}$, $f(K)$'nın açık bir örtüsü olsun:

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Demek ki

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i),$$

ve $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ ailesi K'nın bir örtüsü. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(V_i)$ açık bir küme. Yani bu aile K'nın açık bir örtüsü. K tıkız olduğundan,

$$K \subseteq f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n})$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci vardır. Her iki tarafın da f-imgesini alalım:

$$\begin{aligned} f(K) &\subseteq f(f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n})) \\ &= f(f^{-1}(V_{i_1})) \cup \ldots \cup f(f^{-1}(V_{i_n})) \\ &\subseteq V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n} \end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 64.8 [Uç Değerler Teoremi]. *$X \subseteq \mathbb{R}$ tıkız bir küme ve*

$$f : X \to \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu X üzerine minimum ve maksimum değerini alır; yani öyle $a, b \in X$ vardır ki her $x \in X$ için

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

olur.

Kanıt: X tıkız ve f sürekli olduğundan, Teorem 64.7'den dolayı $f(X)$ de tıkızdır. Teorem 64.3'e göre $f(X)$ kapalı ve sınırlıdır. $f(X)$ sınırlı olduğundan sup $f(X)$ bir gerçel sayıdır. $f(X)$ kapalı olduğundan sup $f(X) \in f(X)$ olur (Önsav 64.1.ii). Benzer bir kanıt inf $f(X)$ için de yapılabilir.F □

65. Dini Teoremi ve Bir Uygulaması

Bir fonksiyon dizisinin düzgün yakınsak olup olmadığına karar vermek her zaman kolay olmayabileceğinden, elimizde düzgün yakınsaklığa karar verecek genel kıstasların olması yararlı olur. Bunlardan en ünlüsü Dini Teoremi'dir.

Sürekli fonksiyon dizilerinin düzgün limitinin de sürekli olduğunu biliyoruz. Demek ki limit sürekli değilse, düzgün yakınsaklık olamaz. Öte yandan limitin sürekli olması da düzgün yakınsaklık için yetmez; tanım kümesi [0, 1] aralığı bile olsa. İşte buna bir örnek:

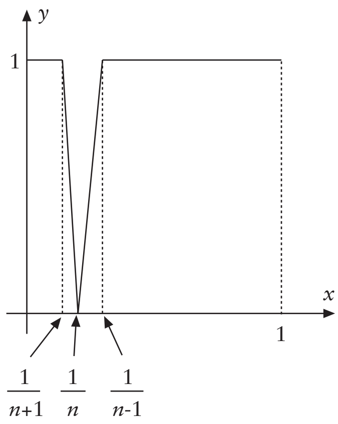
Örnek. Her $n > 1$doğal sayısı için,

$$f_n : [0, 1] \to [0, 1]$$

fonksiyonları şöyle tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} -n(n+1)x + n + 1 & \text{eğer } \dfrac{1}{n+1} \le x \le \dfrac{1}{n} \text{ ise} \\ n(n-1)x - n + 1 & \text{eğer } \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{n-1} \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x \notin \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n-1}\right) \text{ ise} \end{cases}$$

f_n fonksiyonunun grafiği şöyle:



Görüldüğü gibi f_n sürekli bir fonksiyon ve n büyüdükçe $1/n$ küçüldüğünden, f_n'lerin limiti (elbette sürekli olan) sabit 1 fonksiyonu s_1. Öte yandan,

$$s_1(1/n) - f_n(1/n) = 1 - 0 = 1$$

olduğundan, $\|s_1 - f_n\| = 1$ olur ve yakınsaklık düzgün değildir.

Dini Teoremi, okunduğunda hemen anlaşılacağı üzere bu konuda büyük kolaylık sağlar.

Teorem 65.1 [Dini]. *K, $\mathbb{R}$'nin kapalı ve sınırlı (yani tıkız) bir altkümesi olsun.*

$$(f_n : K \to \mathbb{R})_n,$$

sürekli bir fonksiyona noktasal yakınsayan sürekli bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $x \in K$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

oluyorsa, yani dizi azalarak yakınsıyorsa, o zaman dizinin yakınsaklığı düzgündür.

1 Bilenlere: Bu teorem K tıkız bir topolojik uzay iken de doğrudur. Kanıt da aynıdır. Bir sonraki ders kitabımızda teoremi bu genel haliyle kanıtlayacağız.

Kanıt: Dizinin noktasal limitine f diyelim. f_n yerine (sürekli olan) $f_n - f$ alarak, f fonksiyonunun sabit 0 fonksiyonu olduğunu varsayabiliriz. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in K$ için

$$0 \leq f_n(x)$$

olur.

$\varepsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun.

$$U_n = \{x \in K : f_n(x) < \varepsilon\} = f_n^{-1}((-\infty, \varepsilon))$$

tanımını yapalım. f_n sürekli olduğundan, her U_n, K'nın açık bir altkümesidir (Teorem 64.2).

Her $x \in K$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$U_n \subseteq U_{n+1}$$

olur.

Her $x \in K$ için, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ olduğundan,

$$K = \bigcup_n U_n$$

olur. Dolayısıyla, K tıkız olduğundan, sonlu sayıda $n_1, \ldots, n_k$ doğal sayıları için,

$$K = U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_k}$$

olur. Demek ki eğer $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ ise

$$K = U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_k} = U_N$$

olur. Dolayısıyla her $n > N$ için de

$$K = U_n$$

olur. Bundan da her $n > N$ ve her $x \in K$ için

$$f_n(x) < \varepsilon$$

çıkar, yani $\|f_n\| \leq \varepsilon$ olur. □

Not: Kanıtta süreklilik varsayımı çok kısıtlı bir haliyle kullanılıyor. K'dan $\mathbb{R}$'ye giden bir f fonksiyonu,

"her $\alpha \in \mathbb{R}$ için, $\{x \in K : f(x) < \alpha\}$ kümesi açıktır"

özelliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna ***üstten yarısürekli*** (*upper semicontinuous*) adı verilir. Kanıtlanan teorem belli ki sadece sürekli fonksiyonlar için değil, üstten yarısürekli fonksiyonlar için de geçerli. Benzer sonuç artan ve alttan yarısürekli fonksiyonlar için de geçerlidir elbette.

$\sqrt{t}$'ye Düzgün Yakınsayan Polinomlar

Önce [0, 1] aralığından [0, 1] aralığına giden ve

$$t \mapsto 1-\sqrt{1-t}$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyona düzgün yakınsayan bir $(p_n)_n$ polinom ailesi (daha doğrusu bir polinomiyal fonksiyon ailesi) bulacağız.

p_0, sabit 0 fonksiyonu olsun. Eğer $n \geq 0$ ise, p_{n+1}'i tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$p_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\left(t + p_n(t)^2\right)$$

olsun. Her n ve her $t \in [0, 1]$ için aşağıdakilerin kanıtı tümevarımla çocuk oyuncağı kıvamındadır:

1. p_n bir polinomdur.

2. $p_n(0) = 0$.

3. $0 \leq p_n(t) \leq 1$.

4. $(p_n(t))_n$ dizisi artan bir dizidir.

Her $t \in [0, 1]$ için $(p_n(t))_n$ dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan, bir limiti vardır. Bu limite $p(t)$ dersek, tümevarımsal tanımda her iki tarafın da limitini alarak,

$$p(t) = \frac{1}{2}\left(t + p(t)^2\right)$$

buluruz, yani,

$$p(t)^2 - 2p(t) + t = 0,$$

yani

$$p(t)^2 - 2p(t) + 1 = 1 - t,$$

yani

$$(p(t) - 1)^2 = 1 - t,$$

yani, tam istediğimiz gibi

$$p(t) = 1 - \sqrt{1-t}$$

olur.

Noktasal yakınsaklığı kanıtladık. Düzgün yakınsaklığı kanıtlamak için, her n ve her $t \in [0, 1]$ için

$$p_n(t) \leq p_{n+1}(t)$$

eşitsizliğini kanıtlayacağız. Tanımdan elde edilen,

$$p_{n+2}(t) = \frac{1}{2}\left(t + p_{n+1}(t)^2\right)$$

$$p_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\left(t + p_n(t)^2\right)$$

eşitliklerini taraf tarafa birbirinden çıkarırsak,

$$p_{n+2}(t) - p_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\left(p_{n+1}(t)^2 - p_n(t)^2\right)$$

elde ederiz ve bu eşitlikten de tümevarımla,

$$p_n(t) \leq p_{n+1}(t)$$

eşitsizliği kanıtlanır. Şimdi Dini'nin Teoremi'ni uygulayarak yakınsaklığın düzgün olduğunu görürüz:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t) \overset{u}{=} 1 - \sqrt{1-t}.$$

Bundan ve Bölüm 56'da kanıtladığımız çok basit olgulardan,

$$\lim_{n\to\infty} 1 - p_n(1-t) \overset{u}{=} \sqrt{t}$$

çıkar. Eğer

$$q_n(t) = 1 - p_n(1 - t)$$

tanımını yaparsak, p_n'lerin tümevarımsal tanımından,

$$q_0(t) = 0$$

$$q_{n+1}(t) = q_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - q_n(t)^2\right)$$

elde ederiz. Bunu q_n polinomiyal fonksiyonlarının tümevarımsal tanımı olarak kabul edebiliriz.

$$\lim_{n\to\infty} q_n(t) \overset{u}{=} \sqrt{t}$$

olur.

Not 1: $\lim_{n\to\infty} q_n(t^2) \overset{u}{=} |t|$ olur.

Not 2: İlk birkaç q_n polinomunu hesaplayarak katsayıların zamanla sabitleşmediğini görün.

66. Weierstrass Yoğunluk Teoremi

Bu bölümde kanıtlayacağımız teorem $[a, b]$ kapalı aralığı üzerine tanımlanmış her sürekli fonksiyonun polinomlardan (aslında polinomiyal fonksiyonlardan demek lazım) oluşan bir dizinin düzgün limiti olduğunu söylüyor. Bir başka deyişle sürekli fonksiyonların yaklaşık değerlerini, münasip polinomların değerlerini hesaplayarak bulabiliriz. ***Weierstrass Yoğunluk Teoremi*** denilen bu sonucun benzerlerine aslında okur aşinadır. Örneğin, exp fonksiyonu,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

polinomlarının her kapalı ve sınırlı aralık üzerinde düzgün limitidir. Aynı şey, sin ve cos fonksiyonları için de geçerlidir:

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$

eşitlikleri (sin ve cos fonksiyonlarının tanımından dolayı) geçerlidir ve limitler her kapalı ve sınırlı aralık üzerinde düzgündür. [Sonuç 57.2, ya da Teorem 57.3].

Bu ders notlarında görmediğimiz Taylor serilerini bilen okur da bu fikirle aşinadır. Ama bir fonksiyonun Taylor serisi olması için, fonksiyonun sonsuz kez türevlenebilir olması gerekir ki birçok sürekli fonksiyon tek bir kez bile türevlenemez. Ayrıca fonksiyon sonsuz kez türevlenebilir olduğu zaman bile fonksiyonun Taylor serisi fonksiyona eşit olmayabilir. Örneğin $x \mapsto \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerine süreklidir ama 0'da türevi yoktur, öte yandan bu fonksiyon Weierstrass Yoğunluk Teoremi'ne göre polinomların düzgün limitidir, nitekim Teorem 65.2'nin altında $\sqrt{x}$'e $[0, 1]$ üstünde düzgün yakınsayan polinomlar gördük.

Yukardaki tartışmadan da anlaşılacağı üzere son derece genel bir teorem sözkonusu.

Teorem 66.1 [Weierstrass, 1885] $[a, b]$ *kapalığında tanımlanmış her sürekli fonksiyona polinomiyal fonksiyonlarla düzgün yakınsanabilir*; *yani eğer*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyonsa ve $\varepsilon > 0$ *ise*, *öyle bir* P *polinomu vardır ki*

$$\|f - P\| < \varepsilon$$

olur. *Bir başka deyişle*, *polinomiyal fonksiyonlar kümesi* (Bölüm 56.8'de tanımlanan) $C([a, b])$ *metrik uzayında yoğundur*.

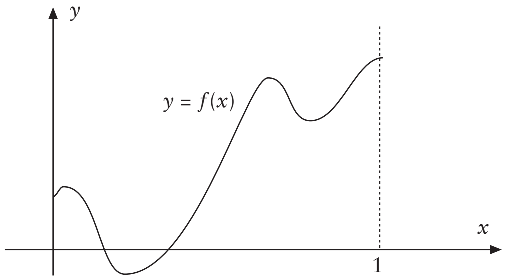
Kanıt: Elbette $[a, b]$ yerine $[0, 1]$ aralığını alabiliriz. (Neden?)

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

herhangi bir sürekli fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ olsun.

İlk olarak bu fonksiyona çok "yakın" olan parçalı doğrusal bir g fonksiyonu bulalım. Bulacağımız bu parçalı doğrusal g fonksiyonunun grafiği, aşağıdaki şekildeki gibi f'nin küçük kirişlerinden oluşacak. $[0, 1]$ aralığını öyle küçük aralıklara böle-

1 Bilenlere: Bu teorem, K yerine, tıkız ve Hausdorff topolojik uzaylara ve uygun altcebirlere genelleştirilebilir ve bu genel hali Stone-Weierstrass Teoremi olarak bilinir. Bir sonraki ders kitabımızda teoremi bu genel haliyle kanıtlayacağız.



Polinomlarla yakınsanacak f fonksiyonunun grafiği

ceğiz ki, yola koyulduğumuz f fonksiyonuyla g parçalı doğrusal fonksiyonu arasındaki mesafe bu küçük aralıklarda en fazla ε olacak. Bunu yapabilir miyiz? Evet! Hem de aralıkları eşit uzunlukta seçerek bile yapabiliriz. Nitekim, K tıkız olduğundan, f düzgün süreklidir (Teorem 64.6), bir başka deyişle öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $|x - y| < \delta$ ise

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$$

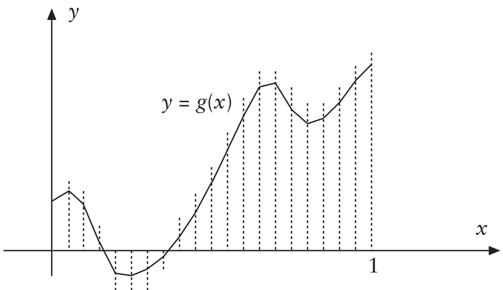
olur. Şimdi N doğal sayısını

$$1/N < \delta$$

olacak biçimde seçelim ve $[0, 1]$ aralığını $1/N$ uzunluktaki aralıklara bölelim. g fonksiyonunu,

$$I_n = \left[\frac{n}{N}, \frac{n}{N+1}\right]$$

aralığında ($n = 0, 1, ..., N - 1$) doğrusal olacak ve



Grafiği yukardaki f fonksiyonunun çok küçük kirişlerinden oluşan parçalı doğrusal fonksiyon

$$g\left(\frac{n}{N}\right) = f\left(\frac{n}{N}\right) \text{ ve } g\left(\frac{n+1}{N}\right) = f\left(\frac{n+1}{N}\right)$$

eşitlikleri gerçekleşecek biçimde seçelim. Eğer $x \in I_n$ ise,

$$|x - n/N| < 1/n < \delta$$

olduğundan, aşağıdaki "detay" şekilden de görüleceği üzere,

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon/2$$

olur. Bu dediğimiz her I_n aralığında böyle olduğundan, her

$$x \in [0, 1]$$

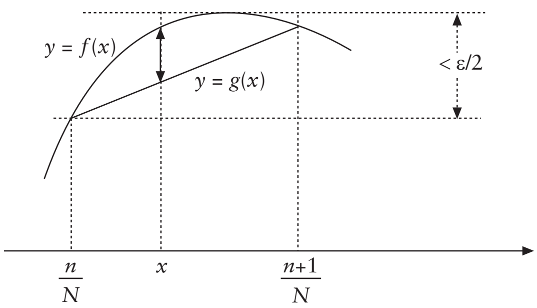
için,

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon/2$$

olur, yani

$$||f - g|| \leq \varepsilon/2$$

olur.



Şimdi yukardaki parçalı doğrusal g fonksiyonuna bir P polinomuyla $\varepsilon/2$ kadar yakınsamak kaldı. Böylece,

$$||f - P|| \leq ||f - g|| + ||g - P|| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olacak ve istediğimiz kanıtlanmış olacak.

Her parçalı doğrusal fonksiyonu gibi, g fonksiyonu da sonlu sayıda $b, a_1, ..., a_k, c_1, ..., c_k$ için,

$$g(x) = b + \sum_{i=1}^{k} a_i |x - c_i|$$

olarak yazılabilir. (Neden? Aslında k, N'ye eşit alınabilir.) Eğer her $i = 1, ..., n$ ve her $x \in [0, 1]$ için

$$|a_i|x - c_i| - P_i(x)| < \varepsilon/2k$$

eşitsizliğini sağlayan bir P_i polinomu bulabilirsek, o zaman olur ve dolayısıyla,

$$\left|g(x) - \left(b + \sum_{i=1}^{k} P_i(x)\right)\right| = \left|\left(b + \sum_{i=1}^{k} a_i|x - c_i|\right) - \left(b + \sum_{i=1}^{k} P_i(x)\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k} \left(a_i|x - a_i| - P_i(x)\right)\right| \le \sum_{i=1}^{k} \left|a_i|x - a_i| - P_i(x)\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2k} = \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece

$$\left\|g - \left(b + \sum_{i=1}^{k} P_i\right)\right\| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

polinomunun işimizi gördüğü anlaşılmış olur.

$$P = b + \sum_{i=1}^{k} P_i$$

Geriye, verilmiş a ve c sayıları ve $\varepsilon > 0$ için, her $x \in [0, 1]$ için

$$|a|x - c| - p(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir p polinomu bulmamız kalıyor. $a = 0$ ise, $p = 0$ olsun. Eğer $a \neq 0$ ise, kanıtlamamız gereken eşitsizliği a'ya bölerek $a = 1$ varsayımını yapabiliriz. Bölüm 65'in sonundaki Not 1'de bu işi $c = 0$ için yaptık. Şimdi değişkeni kaydırarak istediğimizi elde edebiliriz. □

67. Bernstein Polinomları

Geçen bölümde , $\mathbb{R}$'nin tıkız bir altkümesi üzerine tanımlanmış her sürekli fonksiyonun polinomlarla tanımlanmış bir dizinin düzgün limiti olduğunu görmüştük. Bu bölümde verilmiş herhangi bir sürekli

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna yakınsayan bir polinom dizisini açık açık bulacağız.

Önce her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n > 0$ tamsayısı için şu eşitliği anımsatalım:

$$1 = (x + (1 - x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında toplanan ifadeleri $f(k/n)$ sayılarıyla çarparak toplayalım:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

$B_n(f)$ polinomlarına, polinomları bulan Rus matematikçi Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) onuruna ***Bernstein polinomları*** denir. (Alman olan Cantor-Bernstein-Schröder Teoremi'nin Felix Bernstein'ı ile karıştırılmaması...)

Gelecekte f = Id, yani $f(x) = x$ alacağız ve o zaman $B_n(x)(x)$ yazacağız. Buradaki birinci x ve ikinci x birbirine karıştırılmamalı. Birinci x, $f(x) = x$ anlamına kullanılıyor, ikincisi ise değişken anlamına.

Bernstein polinomlarının bariz özellikleri var:

Fonksiyonlar kümesinden polinomlar kümesine giden B_n fonksiyonu doğrusaldır, yani her f, g fonksiyonu ve her a, b gerçel sayısı için

$$B_n(af + bg) = aB_n(f) + bB_n(g)$$

olur. Ayrıca, sabit bir fonksiyonun B_n altında imgesi sabit polinomdur ve sabit değişmez, örneğin $B_n(1) = 1$ olur. Ve eğer $f \leq g$ ise, fonksiyon olarak görüldüğünde,

$$B_n(f) \leq B_n(g)$$

olur. Son olarak, Bernstein polinomunun tanımından da kolayca görüleceği üzere,

$$|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$$

olur. Bu özellikleri aşağıdaki son derece ilginç teoremin kanıtında özgürce kullanacağız.

Teorem 67.1. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman,*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f) \overset{u}{=} f$$

olur.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. Yeterince büyük n göstergeçleri için,

$$\|B_n(f) - f\| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayacağız.

f sürekli ve $[0, 1]$ tıkız olduğundan, f düzgün süreklidir (Teorem 64.6). Demek ki öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $|x - a| < \delta$ ise

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$$

olur.

$$M = \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

olsun. f, bir tıkız küme üzerine tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olduğu için M diye bir sayı gerçekten vardır. (Teorem 47.2 ya da Teorem 64.7)

Öte yandan, eğer $|x - a| > \delta$ ise

$$2M\left(1-\frac{(x-a)^2}{\delta^2}\right) < 0 < \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğundan,

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x)| + |f(a)| \leq 2M < \frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Demek ki, her x, $a \in [0, 1]$ için,

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur.

Şimdi a herhangi bir gerçel sayı olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
|B_n(f) - f(a)| &= |B_n(f - f(a))| \leq B_n(|f - f(a)|)\\
&\leq B_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\leq \frac{2M}{\delta^2}B_n\left((x-a)^2\right) + \frac{\varepsilon}{2}\\
&= \frac{2M}{\delta^2}B_n\left(x^2 - 2ax + a^2\right) + \frac{\varepsilon}{2}\\
&= \frac{2M}{\delta^2}\left(B_n(x^2) - 2aB_n(x) + a^2\right) + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

olur. Sağdaki $B_n(x^2)$ ve $B_n(x)$ terimlerini hesaplayalım şimdi; sonra kaldığımız yerden devam edeceğiz.

Sav 1. $B_n(x) = x$.

Sav 1'in Kanıtı: $m = n - 1$ ve $\ell = k - 1$ tanımlarıyla yapacağımız oldukça basit bir hesap:

$$\begin{aligned}
B_n(x)(x) &= \sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum\nolimits_{\ell=0}^{m} \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} = x.
\end{aligned}$$

Sav 2. $B_n\left(x^2\right)(x) = x^2 + \dfrac{x-x^2}{n}.$

Sav 2'nin Kanıtı: Sırasıyla $m = n-1$, $\ell = k-1$, $p = m-1$, $r = \ell - 1$ tanımlarını kullanan belki biraz uzun ama oldukça basit bir hesap:

$$\begin{aligned}
B_n\left(x^2\right)(x) &= \sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x}{n} \sum\nolimits_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x}{n} \sum\nolimits_{\ell=0}^{m} (\ell+1) \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} \\
&= \frac{x}{n} \left(\sum\nolimits_{\ell=0}^{m} \ell \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(\sum\nolimits_{\ell=1}^{m} \ell \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(\sum\nolimits_{\ell=1}^{m} \frac{m!}{(\ell-1)!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(mx \sum\nolimits_{\ell=1}^{m} \frac{(m-1)!}{(\ell-1)!(m-\ell)!} x^{\ell-1} (1-x)^{m-\ell} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(mx \sum\nolimits_{r=0}^{p} \frac{p!}{r!(p-r)!} x^{r} (1-x)^{p-r} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} (mx+1) = \frac{x}{n}\left((n-1)x+1\right) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}.
\end{aligned}$$

Sav 1'den önce kaldığımız yerden devam edelim:

$$|B_n(f)(x) - f(a)| \leq \frac{2M}{\delta^2}\left(B_n(x^2) - 2aB_n(x) + a^2\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{2M}{\delta^2}\left(\left(x^2 + \frac{x - x^2}{n}\right) - 2ax + a^2\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{2M}{\delta^2}\left((x-a)^2 + \frac{x - x^2}{n}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Bunun özel bir hali olarak, her $a \in [0, 1]$ için geçerli olan

$$|B_n(f)(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\frac{a - a^2}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M}{\delta^2 n}$$

eşitsizliğini buluruz. Eğer n'yi yeterince büyük alırsak, mesela

$$n > \frac{8M}{\delta^2 \varepsilon}$$

olursa, o zaman

$$|B_n(f)(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur ve kanıtımız tamamlanır. □

Dikkat ederseniz, Sav 2'de görüleceği üzere, f bir polinom olduğunda bile $B_n(f)$, f'ye eşit olmayabiliyor.

Alıştırmalar

1. $B_1(\sqrt{x})$, $B_2(\sqrt{x})$, $B_3(\sqrt{x})$ polinomlarını hesaplayın.

2. [0, 1] üzerinde $\sqrt{x}$'i en fazla 0,001 hatayla hesaplamak için hangi n için $B_n(\sqrt{x})$ polinomunu hesaplamalıyız?