60. Logaritma ve Üs Alma

Logaritmalar değişik yöntemlerle tanımlanabilir. Liselerde tanımlandığı biçimi,

$$x = \log y \Leftrightarrow y = 10^x,$$

bu yolların bir yandan en kolayı bir yandan da en zorudur. En kolayıdır çünkü doğrudan uygulamaya yöneliktir. En zorudur çünkü

1) 10^{π}, $10^{\sqrt{2}}$ gibi sayıları tanımlamadan varsayar,

2) Her pozitif y sayısının 10^{π} gibi bir sayıya eşit olduğunu kanıtlamadan varsayar.

Logaritmayı tanımlamanın bir başka yolu bu notlarda görmeyeceğimiz integral kullanmaktır.

Biz burada logaritmayı nerdeyse liselerde tanımlandığı biçimiyle tanımlayacağız; iki farkımız olacak (o kadarcık olsun!): 1) 10 tabanı yerine e tabanı kullanacağız, 2) Kanıtlanmamış olguya başvurmayacağız.

Logaritmayı (ama log'u değil ln'yi), exp fonksiyonunun tersi olarak tanımlayacağız. Ama önce biraz exp fonksiyonundan sözedelim.

60.1. Exp Fonksiyonu

(1) Pozitif bir a sayısı ve bir q kesirli sayısı için, a^q sayısını Önsav 4.7'den sonra tanımlamıştık ve aynı sayfadaki Teorem 8'de a^q sayısının özelliklerini kanıtlamıştık.

(2) Bölüm 49'da pozitif bir a sayısı ve bir r gerçel sayısı için, a^r sayısını, r'ye yakınsayan herhangi bir $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi için,

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$$

olarak tanımlamıştık. Teorem 49.4, $r \mapsto a^r$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden sürekli bir fonksiyon olduğunu söylüyor.

(3) exp x'i bir serinin limiti olarak tanımlamıştık ve exp 1'e e adını vermiştik. Sonuç 22.5'te her q kesirli sayısı için,

$$\exp q = e^q$$

eşitliğini kanıtlamıştık.

(4) Teorem 43A.1'de (ve Teorem 59.6'da) exp'in sürekli bir fonksiyon olduğunu kanıtlamıştık.

(5) Teorem 49.2'de $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve $\mathbb{Q}$ üzerine aynı değerleri veren iki fonksiyonun eşit olduklarını kanıtlamıştık.

Şimdi bunları kullanarak aşağıdaki teoremi kanıtlayabiliriz:

Teorem 60.1. *Her r gerçel sayısı için* $\exp r = e^r$ *olur.*

Kanıt: Yukardaki 2 ve 4 sayılı notlara göre, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden exp fonksiyonuyla $r \mapsto e^r$ fonksiyonları süreklidir ve 3 sayılı nota göre kesirli sayılar üzerine aynı değerleri alırlar. 5 sayılı nota göre bu fonksiyonlar eşittirler. □

60.2. Logaritma

Teorem 60.2 ve Tanım [Logaritma]. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ *fonksiyonu sürekli, dışbükey ve artan bir eşlemedir.* exp *fonksiyonun tersi olarak tanımlanan* ***doğal logaritma*** *fonksiyonu sürekli, içbükey ve artan bir eşlemedir. Doğal logaritma* ln *olarak yazılır ve*

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \text{ ve } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

eşitliklerini sağlar.

Kanıt: exp'in sürekli olduğunu Teorem 43.1'de kanıtlamıştık. $x > 0$ iken

$$\exp x = \sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{n!} \ge 1 + x \ge x$$

olduğundan, Teorem 51.13'e göre,

$$\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$$

olur. Ayrıca,

$$\exp(-x) = (\exp x)^{-1} \le 1/x$$

olduğundan (bkz. Sonuç 22.1)

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$$

olur. Aradeğer Teoremi'nden dolayı exp $\mathbb{R}^{>0}$ kümesindeki tüm değerleri alır. Dolayısıyla

$$\exp \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$$

fonksiyonu örtendir. Artan olduğunu Sonuç 22.3'te kanıtlamıştık. Demek ki $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu bir eşlemedir. exp fonksiyonunun tersine ln diyelim:

$$\ln : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$$

ve

$$\ln y = x \Leftrightarrow \exp x = y$$

Artan bir fonksiyonun tersi de artan olduğundan, ln artan bir fonksiyondur.

exp'in dışbükey olduğunu Teorem 59.6'da kanıtlamıştık. Demek ki Teorem 59.7'ye göre ln içbükey bir fonksiyondur. Ayrıca, $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ olduğundan

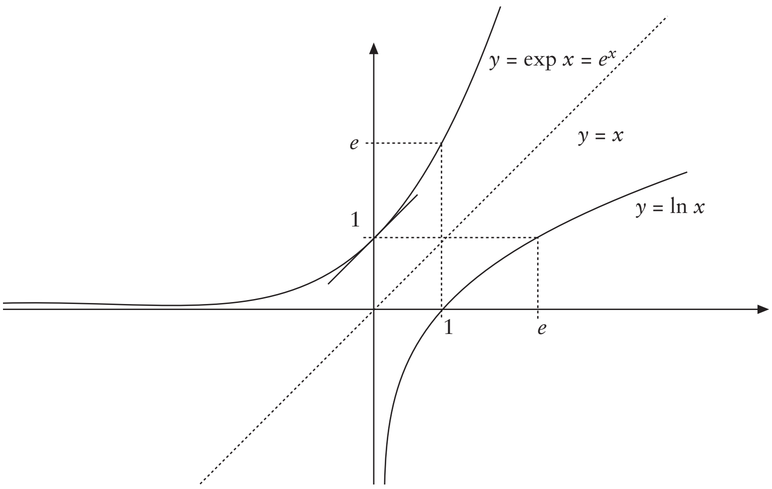
$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

olur ve $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

olur. □

ln fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. (Birbirinin tersi olan fonksiyonların grafiği $y = x$ doğrusuna göre birbirinin simetriğidirler.)



60.2. Logaritmanın Özellikleri

Logaritmanın birkaç özelliğini kanıtlayalım. Elbette kanıtlarımızda logaritmanın tanımına,:

$$\ln y = x \Leftrightarrow \exp x = y$$

formülüne, yani exp fonksiyonunun özelliklerine başvuracağız.

• exp 0 = 1 olduğundan ln 1 = 0 olur.

• exp 1 = e olduğundan ln e = 1 olur.

• exp fonksiyonu 0'dan büyük sayılarda 1'den büyük ve 0'dan küçük sayılarda 1'den küçük değerler aldığından,

$$\ln y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$$

önermesi geçerlidir.

• $\ln y = x$ ve $\ln y_1 = x_1$ olsun. (Burada y ve y_1 pozitif olmak zorundalar, yoksa eşitlikler anlamsız olur.) Demek ki,

$$\exp x = y \text{ ve } \exp x_1 = y_1.$$

Bu iki eşitliği taraf tarafa çarpalım:

$$(\exp x)(\exp x_1) = yy_1$$

elde ederiz. Öte yandan

$$(\exp x)(\exp x_1) = \exp(x + x_1).$$

Demek ki,

$$\exp(x + x_1) = yy_1.$$

Logaritmanın tanımından dolayı,

$$\ln yy_1 = x + x_1 = \ln y + \ln y_1$$

eşitliği geçerlidir. Bir başka deyişle, nasıl exp fonksiyonu toplamayı çarpmaya dönüştürüyorsa, exp'in tersi olan ln fonksiyonu da çarpmayı toplamaya dönüştürür. Eğer y ve y_1 negatif değerler alabilirse, yukardaki eşitliği,

$$\ln |yy_1| = \ln |y| + \ln |y_1|$$

olarak yazmak gerekir.

• $\ln y = x$ ve r bir gerçel sayı olsun. Teorem 60.2'den dolayı

$$e^x = \exp x = y.$$

ve gene Teorem 60.2'den dolayı

$$\exp xr = e^{xr} = (e^x)^r = y^r$$

(bkz. Sonuç 49.5.iv). Demek ki

$$\ln y^r = xr = rx = r\ln y$$

olur. $r = -1$ için $\ln(1/y) = -\ln y$ elde edilir.

Eğer y'nin negatif değerler almasına izin verirsek, yukardaki eşitliği,

$$\ln |y|^r = r\ln |y|$$

olarak yazmak gerekir. Örneğin, y'nin negatif olabileceğini göz önünde tutarak,

$$\ln y^2 = 2\ln |y|$$

yazmalı.

• exp ve ln fonksiyonları birbirlerinin tersi olduklarından, her $y > 0$ için

$$e^{\ln y} = \exp \ln y = y$$

ve her x için

$$\ln e^x = \ln \exp x = x$$

olur.

Bulduklarımızı özetleyelim:

Teorem 60.3. *Her* $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ *ve her* $r \in \mathbb{R}$ *için,*
i. $\ln 1 = 0$.
ii. $\ln e = 1$.
iii. $\ln y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$.
iv. $\ln xy = \ln x + \ln y$.
v. $\ln y^r = r \ln y$ *ve* $\ln e^r = r$.
vi. $\ln(1/y) = -\ln y$.
vii. $e^{\ln y} = y$.
olur.

60.3. Üs Alma

Teorem 60.4. *Eğer* $1 \neq a > 0$ *ise*

$$r \mapsto a^r$$

kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}^{>0}$ *kümesine giden fonksiyon dışbükey bir eşlemedir. Eğer* $a > 1$ *ise fonksiyon artandır, yoksa azalandır.*

Kanıt: r herhangi bir gerçel sayı olsun. O zaman

$$a^r =^{\text{vii}} e^{\ln a^r} =^{\text{v}} e^{r \ln a} = \exp(r \ln a)$$

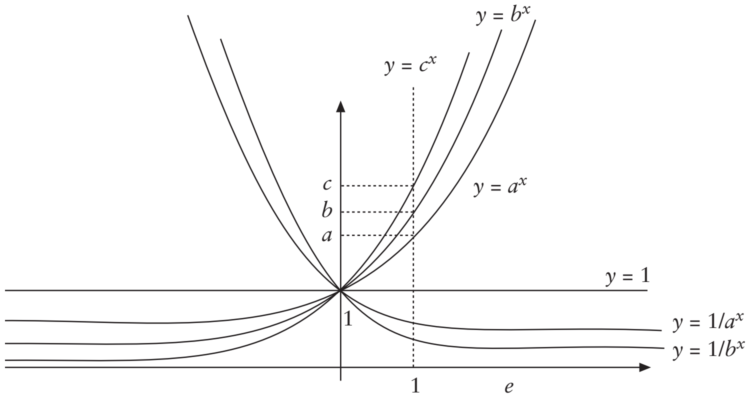
olur. Bundan da $r \mapsto a^r$ fonksiyonunun

$$r \mapsto r \ln a$$

ve exp fonksiyonlarının bileşkesi olduğu anlaşılır. Bu iki fonksiyon da sürekli olduklarından, $r \mapsto a^r$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca exp fonksiyonu artan olduğundan (yani sıralamayı koruduğundan), $r \mapsto a^r$ fonksiyonunun artan ya da azalan olması $r \mapsto r \ln a$ fonksiyonunun artan ya da azalan olmasıyla doğrudan ilişkilidir, ki bu da $\ln a$'nın pozitif ya da negatifliğiyle, yani a'nın 1'den büyük ya da küçük olmasıyla ilgilidir.

Bölüm 59.6'da, $f(x)$ fonksiyonuyla $f(ax + b)$ fonksiyonunun iç/dışbükeyliğinin aynı olduğunu söylemiştik (kanıtı da kolaydır), dolayısıyla $r \mapsto a^r$ fonksiyonu aynen exp fonksiyonu gibi dışbükeydir. □

Çeşitli $a > 1$ sayıları için $r \mapsto a^r$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıda.



60.4. Başka Tabanlarda Logaritma

ln fonksiyonunu yukarda

$$\ln y = x \Leftrightarrow e^x = y$$

formülüyle tanımlamıştık, yani ln fonksiyonunu

$$r \mapsto e^r$$

fonksiyonunun tersi olarak tanımlanmıştı. Eğer e yerine bir başka $a \neq 1$ pozitif sayısı alırsak ne olur? Bişeycikler olmaz, sadece logaritmayı bir başka tabanda tanımlamış oluruz.

$$\log_a : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^{>0}$ kümesine giden

$$r \mapsto a^r$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun tersi olsun. Demek ki

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

ve her $x > 0$ için

$$\log_a a^x = x$$

ve her y için

$$a^{\log_a y} = y.$$

Aynen ln için kanıtladığımız gibi,

$$\log_a y^r = r\log_a y$$

olur.

Bu arada $\log_e = \ln$ eşitliğine dikkatinizi çekeriz.

$\log_a$ fonksiyonunu uzun uzun çalışmaya gerek yok, çünkü $\log_a$ fonksiyonunu $\log_b$ cinsinden yazabiliriz, yeter ki a ve $b \neq 1$ olsun:

$$a^{\log_a y} = y$$

eşitliğinin her iki tarafına $\log_b$ fonksiyonunu uygularsak,

$$\log_b(a^{\log_a y}) = y,$$

yani,

$$\log_a y \log_b a = \log_b y,$$

buluruz. Demek ki

$$\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}.$$

Eğer $b = e$ alırsak,

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

eşitliğini buluruz.

Son olarak, Teorem 60.4'teki, $a \geq 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için,

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

eşitliğine dikkatinizi çekerim. Her iki tarafa da ln uygularsak bunun doğruluğu hemen anlaşılır.

Alıştırmalar

1*. $f(x) = x\ln x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^{>0}$ üzerine dışbükey olduğunu kanıtlayın.

2. Bir I aralığında tanımlanmış ve pozitif değerler alan bir f fonksiyonu alalım. Eğer $\log f(x)$ fonksiyonu dışbükeyse, f'ye ***logaritmik dışbükey*** denir. Logaritmik dışbükey fonksiyonların dışbükey olduklarını kanıtlayın. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun dışbükey olmasına karşın logaritmik dışbükey olmadığını gösterin.

61. Eşitsizlikler Geçidi

Okur herhalde eşitsizliklerin analizdeki önemini kavramıştır. Bu bölümde analizde öne çıkan birkaç klasik eşitsizliği kanıtlayacağız.

Teorem 61.1 [Jensen Eşitsizliği]. *I bir aralık ve*

$$f : I \to \mathbb{R}$$

dışbükey bir fonksiyon olsun, *o zaman her*

$$x_1, \ldots, x_n \in I \text{ ve her } t_1, \ldots, t_n > 0$$

sayıları için

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{\sum_{i=1}^n t_i} \in I$$

olur ve

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{\sum_{i=1}^n t_i}\right) \le \frac{\sum_{i=1}^n t_i\, f(x_i)}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Not 1. Eşitsizlik sık sık $t_1 + \cdots + t_n = 1$ durumunda ifade edilir. Nitekim eşitsizlikte t_i yerine,

$$\frac{t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

alırsak o zaman daha basit görünümlü olan

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i\, f(x_i)$$

formülünü elde ederiz.

Not 2. Formüldeki t_i sayılarına, x_i ve $f(x_i)$ sayılarının ***ağırlıkları*** diyebiliriz; o zaman toplamlar ***ağırlıklı ortalamalar*** olarak algılanabilir, "ortalama alıyoruz ama bazı sayılara diğerlerinden daha fazla önem veriyoruz" anlamında. Teoreme göre, eğer f dışbükeyse, sayıların ***ağırlıklı ortalamalarının*** f-imgesi, f-imgelerin ağırlıklı ortalamasından küçükeşittir.

Not 3. Eğer fonksiyon içbükeyse, eşitsizlikler ters çevrilir elbet.

Teorem 61.1'in Kanıtı: Not 1'deki değişikliği yaparak t'lerin toplamının 1 olduğunu varsayabiliriz.

$$\min\{x_i\} \leq t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \leq \max\{x_i\}$$

olduğundan $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I$ olur. Eşitsizliği n üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ durumunda her iki taraf birbirine eşittir. $n = 2$ durumu ise aynen dışbükeyliğin tanımından çıkar. Şimdi $n \geq 3$ olsun ve eşitsizliğin $n - 1$ için doğru olduğunu varsayalım. $t_1 + \cdots + t_{n-1} = t$ ve $t_n = s$ olsun. O zaman $t + s = 1$ olur elbette. Hesaplara başlayalım.

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) &= f\left(t\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{t} x_i + s x_n\right)\\
&\leq t\, f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{t} x_i\right) + s\, f(x_n) \leq t\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{t}\, f(x_i) + s\, f(x_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} t_i\, f(x_i) + s\, f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i\, f(x_i).
\end{aligned}$$

Eğer her $i = 1, \ldots, n$ için $t_i = 1/n$ alırsak,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

formülünü elde ederiz.

Şimdi $f(x) = \ln x$ olarak alalım, ve x_i sayılarını (zorunlu olarak) pozitif alalım. Logaritmanın içbükey olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = \frac{1}{n}\ln(x_1 \cdots x_n) = \ln\left[(x_1 \cdots x_n)^{1/n}\right]$$

olur. Logaritma (ya da exp) artan olduğundan, bundan,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

elde ederiz, ki bu da meşhur ***aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğidir.*** (Bunun daha basit kanıtları vardır.)

Teorem 61.2 [Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği]. *Eğer $x_1, \ldots, x_n$ sayıları pozitifse*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

olur.

Kanıtlayacağımız bir sonraki eşitsizlik ***Young eşitsizliği*** diye bilinir.

Teorem 61.3 [Young Eşitsizliği] *a ve $b \ge 0$ olsun. p ve q sayıları pozitif olsunlar ve*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

eşitsizliğini sağlasınlar. O zaman

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca eşitlik sadece ve sadece $a^p = b^q$ iken geçerlidir.

Kanıt: İşin püf noktası,

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}$$

eşitliği.

ln fonksiyonun içbükeyliğinden, eğer t ve s sayıları $t + s = 1$ eşitliğini sağlıyorlarsa ve $\alpha, \beta > 0$ ise

$$\ln(t\alpha + s\beta) \leq t\ln\alpha + s\ln\beta$$

elde ederiz. Ayrıca, ln keskin içbükey olduğundan, eşitlik ancak ve ancak $\alpha = \beta$ ise geçerlidir. α ve β yerine sırasıyla a^p ve b^q koyarsak,

$$\ln(ta^p + sb^q) \leq t\ln a^p + s\ln b^q$$

elde ederiz, ve eşitlik ancak ve ancak $a^p = b^q$ ise geçerlidir. Şimdi de $t = 1/p$ ve $s = 1/q$ alalım. İlk bulduğumuz eşitlikten devam edelim:

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q} \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$$

elde ederiz. ln artan olduğundan istediğimiz eşitsizliği elde ederiz. Ayrıca ln keskin artan olduğundan, eşitlik ancak ve ancak $a^p = b^q$ ise geçerlidir. □

Not 1. Teoremdeki p ve q sayılarının mecburen 1'den büyük olduklarını gözlemleyin.

Not 2. $p = q = 2$ ilginç bir özel haldir.

Alıştırmalar

1. $p = q = 2$ için Teorem 61.1'in ne diyor?

2. Her şey Teorem 61.3'teki gibi olsun, bir de ayrıca $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman,

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^{q/p} q}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

3. Teorem 61.3'ü a, b ve p, q sayıları için değil de,

$$a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$$

sayıları ve

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$$

eşitliğini sağlayan $p_1, p_2, ..., p_n > 0$ sayıları için kanıtlayın.

Teorem 61.4 [Hölder Eşitsizliği]. *$x_1, x_2, ..., x_n$ ve $y_1, y_2, ..., y_n$ pozitif gerçel sayılar olsun. p ve q sayıları pozitif olsunlar ve*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

eşitsizliğini sağlasınlar. O zaman

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$$

olur.

Kanıt: x_i ve y_i yerine sırasıyla,

$$\frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}} \text{ ve } \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/q}}$$

yazarak (burası önemli!)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1$$

varsayımını yapabiliriz. Bu aşamada, artık,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq 1$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Young eşitsizliğine göre, her $i = 1, 2, ..., n$ için

$$x_i y_i \leq \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}$$

olur. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^q}{q}$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} y_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

buluruz, ki bu da istediğimiz eşitsizliktir. □

Meşhur ***Cauchy-Schwarz Eşitsizliği***, Hölder eşitsizliğinin

$$p = q = 2$$

durumudur:

$$x_1, x_2, ..., x_n \text{ ve } y_1, y_2, ..., y_n$$

gerçel sayılarsa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Bunun güzel bir kanıtı vardır, vermeden geçemeyeceğiz. z bir bilinmeyen olsun ve ikinci dereceden olan şu polinoma bakalım:

$$(x_1 z + y_1)^2 + \cdots + (x_n z + y_n)^2.$$

Bu polinomun en fazla tek bir kökü olabileceğinden (o da

$$y_1/x_1 = ... = y_n/x_n$$

ise), polinomun diskriminantı 0'dan küçükeşit olmalıdır. Bu polinom

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) z^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) z + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

biçiminde yazılabilir. Bu polinomun diskriminantının dörtte biri,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

dir ve 0'dan küçükeşit olmalıdır. □

Teorem 61.5 [Minkowski Eşitsizliği]. *$x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \geq 0$ ve $p \geq 1$ olsun. O zaman,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}$$

olur.

Kanıt: q sayısını $1/q + 1/p = 1$ olacak şekilde tanımlayalım ve biraz önceki Hölder eşitsizliğini doğru yerde (üçüncü satırdan dördüncü satıra geçerken, tam iki kez) kullanalım:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p &= \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^{p-1}(x_i+y_i)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(x_i(x_i+y_i)^{p-1} + y_i(x_i+y_i)^{p-1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n x_i(x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i(x_i+y_i)^{p-1}\\
&\le \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

En sağdaki (en aşağıdaki) terimi en sola (en yukarıya) geçirirsek, istediğimizi elde ederiz. □

Eğer $p = 2$ alırsak, Minkowski eşitsizliği n boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında ***üçgen eşitsizliği*** olarak bilinir: Bir üçgenin iki kenarının uzunluklarının toplamı üçüncüsünün uzunluğundan küçük olamaz.

Minkowski eşitsizliği 0 ile 1 arasındaki hiçbir p sayısı için geçerli değildir. (Okura alıştırma).

Sonuç 61.6. *$0 \le p < 1$ ve $x, y \ge 0$ olsun. O zaman*

$$(x + y)^p \le x^p + y^p$$

olur.

Kanıt: $z = y/x$ alarak $(1 + z)^p \le 1 + z^p$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. $z = t^{1/p}$ ve $r = 1/p > 1$ alarak, $(1 + t^r)^{1/r} \le 1 + t$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Teorem 61.5'te $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = t$ alırsak istediğimizi elde ederiz. □

Teorem 61.7 [Mahler Eşitsizliği]. $x_1, x_2, ..., x_n$ *ve* $y_1, y_2, ...,$ y_n *pozitif gerçel sayılar olsun. O zaman,*

$$\prod_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^{1/n} \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n} + \prod_{k=1}^{n} y_k^{1/n}$$

olur.

Kanıt: Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden dolayı

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_i + y_i}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i + y_i}$$

ve

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{x_i + y_i}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i + y_i}$$

olur. Bu ikisini toplarsak,

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_i + y_i}\right)^{1/n} + \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{x_i + y_i}\right)^{1/n} \leq 1$$

elde ederiz. □

Teorem 61.8. *Eğer* $0 < x < 1$ *ve* $0 < r \leq s$ *ise,*

$$(1 - x^r)^{1/r} \leq (1 - x^s)^{1/s}$$

olur.

Kanıt: $x \mapsto x^{1/r}$ sürekli bir fonksiyondur (Teorem 59.5 ve 59.9). Dolayısıyla eşitliği x yerine $x^{1/r}$ için kanıtlamak yeterlidir. O zaman eşitsizlik

$$(1 - x)^{1/r} \leq (1 - x^{s/r})^{1/s}$$

eşitsizliğine dönüşür. $u = s/r \geq 1$ dersek,

$$(1 - x)^u \leq 1 - x^u$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Gene üs alma fonksiyonunun sürekliliğinden ve kesirli sayıların yoğunluğundan dolayı, bu son eşitsizliği kesirli u sayıları için kanıtlamak yeterli. $q \geq p > 0$ doğal sayılar için $u = q/p$ olsun.

$$(1 - x)^{q/p} \leq 1 - x^{q/p}$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. x yerine x^p koyarsak,

$$(1 - x^p)^q \leq (1 - x^q)^p$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Bunu, p'yi sabitleyip q üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $q = p$ için sorun yok. Tümevarım adımına başlamadan önce,

$$1 - x^p < 1 < \left(1 + x^q \frac{1-x}{1-x^q}\right)^p$$

eşitsizliğinden, paydaları eşitleyerek

$$(1 - x^q)^p(1 - x^p) \leq (1 - x^{q+1})^p$$

eşitsizliğini elde edelim. Şimdi hem bunu hem de tümevarım varsayımını kullanarak,

$$\begin{aligned}(1 - x^p)^{q+1} &= (1 - x^p)^q(1 - x^p)\\ &\leq (1 - x^q)^p(1 - x^p) \leq (1 - x^{q+1})^p\end{aligned}$$

olur. Teorem kanıtlanmıştır. □