58. Trigonometrik Fonksiyonlar ve Pi Sayısı

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını geçmişte bir seri olarak tanımlamıştık. Tanımları anımsatalım:

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Tabii aslında, tanımlar şöyle:

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!},$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}.$$

Bu bölümde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının temel birkaç özelliğini bulacağız ve π sayısını tanımlayacağız.

Serilerin kısmi toplamında $x = 0$ alırsak,

$$\sin 0 = 0 \text{ ve } \cos 0 = 1$$

buluruz.

Ayrıca $\sin x$ ve $\cos x$ sayılarının her x gerçel sayısı için olduğunu gözlemleyelim, yani yukardaki seriler her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır, hatta mutlak yakınsaktır. Bu D'alembert Kıstası'ndan hemen çıkar (bkz. Teorem 32.1). Dolayısıyla yukardaki sin ve cos serileri $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden birer fonksiyon tanımlarlar. Ama noktasal yakınsaklıktan çok daha iyisini kanıtlamıştık geçen bölümde: sin x ve cos x serilerinin kısmi toplamları sin ve cos fonksiyonlarına her sınırlı kümede düzgün yakınsarlar; dolayısıyla sin ve cos fonksiyonları her yerde süreklidir (Sonuç 57.5).

Serilere bakınca hemen görüleceği üzere,

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ ve } \cos(-x) = \cos x$$

olur; örneğin,

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(-x)^{2i+1}}{(2i+1)!}\\ &= -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = -\sin x.\end{aligned}$$

Yani sinüs tek bir fonksiyondur, kosinüs ise çift. Bir başka deyişle sinüs fonksiyonunun grafiği $O(0, 0)$ noktasına göre simetriktir ve kosinüs fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir. Bütün bunlardan, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını $x \geq 0$ iken anlamanın yeterli olduğunu gösterir.

Şimdi çok yararlı iki eşitlik kanıtlayalım:

Teorem 58.1. *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x.$$

Kanıt: Bu eşitlikler Teorem 31.6'da açıklanan "Cauchy çarpımı"ndan çıkar. Cauchy çarpımını kullanarak sin x cos y ve sin y cos x serilerini hesaplayalım ve bulduklarımızı toplayalım. Şansımız yaver giderse $\sin(x + y)$ bulacağız.

Önce sin x cos y'yi hesaplamak amacıyla,

$$x_{2i} = 0, \qquad y_{2i} = (-1)^i \frac{y^{2i}}{(2i)!},$$

$$x_{2i+1} = (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \quad y_{2i+1} = 0$$

alalım. O zaman, teoremdeki z_k,

$$z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i+j=k,\ i \text{ tek},\ j \text{ çift}} x_i y_j$$

olur. Dolayısıyla k çiftse $z_k = 0$'dır. Şimdi k'nın tek olduğunu varsayıp ve k yerine $2k+1$ alıp z_{2k+1}'i hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
z_{2k+1} &= \sum_{i=0}^{k} x_{2i+1} y_{2(k-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} (-1)^{k-i} \frac{y^{2(k-i)}}{(2(k-i))!} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \frac{y^{2k-2i}}{(2k-2i)!}. \\
&= (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \frac{(2k+1)!}{(2i+1)!(2k-2i)!} \frac{x^{2i+1} y^{2k-2i}}{(2k+1)!} \\
&= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{2i+1} x^{2i+1} y^{2k-2i}.
\end{aligned}$$

Bu toplamı şöyle de yazabiliriz:

$$z_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{u+v=2k+1,\ u \text{ tek}} \binom{2k+1}{u} x^u y^v$$

Demek ki Teorem 31.6'ya göre, $\sin x \cos y$, yukardaki bu z_{2k+1}'lerin toplamıdır.

Bunu aklımızda tutup aynı yöntemle $\sin y \cos x$ serisini hesaplayalım. Hesapları yeniden yapmaya gerek yok; yukardaki formülde x ile y'yi değiştirelim: $\sin y \cos x$, aşağıdaki t_{2k+1}'lerin toplamıdır.

$$\begin{aligned}
t_{2k+1} &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{u+v=2k+1,\ u \text{ tek}} \binom{2k+1}{u} y^u x^v \\
&= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{u+v=2k+1,\ u \text{ çift}} \binom{2k+1}{u} x^u y^v.
\end{aligned}$$

Demek ki $\sin x \cos y + \sin y \cos x$, z_{2k+1} ile t_{2k+1}'lerin toplamının, yani,

$$z_{2k+1} + t_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{u+v=2k+1} \binom{2k+1}{u} x^u y^v$$
$$= (-1)^k \frac{(x+y)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

terimlerinin toplamından oluşan seridir. Bu seri de elbette $\sin(x+y)$'nin serisidir. Birinci eşitlik kanıtlanmıştır. İkinci eşitlik de aynı yöntemle ve kolaylıkla kanıtlanabilir. □

Bu formüllerde y yerine $-y$ ya da x alırsak,

$$\begin{aligned}
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x, \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\
\sin(2x) &= 2\sin x \cos x, \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\cos^2 x + \sin^2 x &= 1
\end{aligned}$$

formüllerini buluruz. (Not: Burada $\cos^2 x$, $(\cos x)^2$ anlamına gelmektedir.)

Sonuç 58.2. $S = \{x : \sin x = 0\}$ *toplamsal bir gruptur, yani* 0 *bu kümededir ve bu kümeden iki elemanın farkı ve toplamı da bu kümededir. Özel olarak,* $\alpha \in S$ *ise* $-\alpha = 0 - \alpha \in S$ *olur.*

Kanıt: Aşağıdaki formüllerden hemen çıkar.

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
□

Sonuç 58.3. $\cos x$ *ve* $\sin x$, -1 *ile* 1 *arasındadır.*

Kanıt: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ eşitliğinin bir sonucudur. □

Önsav 58.4. $(0, \sqrt{6})$ *aralığında sinüs fonksiyonu pozitif değerler alır.*

Kanıt: $\sin x$ fonksiyonunun tanımında terimleri ikişer ikişer gruplayalım. O zaman, $\sin x$, terimleri

$$\frac{x^{4i+1}}{(4i+1)!} - \frac{x^{4i+3}}{(4i+3)!} = \frac{x^{4i+1}}{(4i+1)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4i+2)(4i+3)}\right)$$

olan seriye (yani sonsuz toplama) eşittir. Bu terimlerin her birinin belli bir $(0, \alpha)$ aralığında pozitif olduklarını kanıtlayacağız, yani

$$1 - \frac{x^2}{(4i+2)(4i+3)}$$

terimlerinin her i doğal sayısı için belli bir $(0, \alpha)$ aralığında pozitif olduklarını kanıtlayacağız. Ama bu terimlerin en küçüğü $i = 0$ için bulunan terimdir. Demek ki,

$$1 - x^2/6 > 0$$

eşitsizliğiyle boğuşmalıyız.

$$\alpha = \sqrt{6}$$

almak yeterli. □

Önsav 58.5. *Bir* π *sayısı için*, $S = \{x : \sin x = 0\}$ *kümesi* $\pi\mathbb{Z}$*'ye eşittir*.

Kanıt: Önsav 58.4'e göre 0, S'nin bir yoğunlaşma noktası olamaz. Sonuç 58.2'ye göre S'nin hiç yoğunlaşma noktası olamaz. Eğer $S = \{0\}$ ise $\pi = 0$ almak yeterli. Bundan böyle S'nin $\{0\}$ olmadığını varsayalım. $\alpha \in S$ ise $-\alpha \in S$ olduğundan ve S'nin yoğunlaşma noktası olmadığından, S'nin en küçük pozitif elemanı vardır. Bu elemana π diyelim. Sonuç 58.2'ye göre $\pi\mathbb{Z} \subseteq S$. Tersini kanıtlayalım: $\alpha \in S$ olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$. Bundan böyle $\alpha \neq 0$ olsun. α yerine $-\alpha$ alarak, α'nın pozitif olduğunu varsayabiliriz. $n = [\alpha/\pi]$ ise,

$$n \leq \alpha/\pi < n + 1$$

olur. Yani,

$$n\pi \leq \alpha < (n + 1)\pi$$

olur ve dolayısıyla

$$0 \leq \alpha - n\pi < \pi$$

ve, $n\pi \in \pi\mathbb{Z} \subseteq S$ içindeliklerinden dolayı, Sonuç 58.2'ye göre

$$\alpha - n\pi = 0 \text{ ve } \alpha = n\pi = \pi\mathbb{Z}$$

olur. □

Henüz yukarda bulunan π sayısının henüz 0 olmadığını bilmiyoruz. Bunu da birazdan kanıtlayacağız. $\pi\mathbb{Z} = (-\pi)\mathbb{Z}$ olduğundan π'yi negatif olmayacak biçimde seçebiliriz. Öyle yapalım, bundan böyle $\pi \geq 0$ olsun.

Önsav 58.6. *Sinüs fonksiyonu* 0'*dan büyük bir sayıda sıfır değerini alır*, *yani* $\pi > 0$'dır.

Kanıt: Her $x > 0$ için $\sin x > 0$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman, $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ denkleminden, $x > 0$ ise $\cos x > 0$ çıkar; dolayısıyla,
$$0 < \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
bulunur, yani
$$\sin x < \cos x.$$
Ayrıca, her x, $y > 0$ için,
$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin y \sin x \\ &< \cos x \cos y \leq \cos x\end{aligned}$$
olur, ki bu da kosinüs fonksiyonunun $\mathbb{R}^{\geq 0}$ üzerinde azalan olduğunu gösterir. Bu ve $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ denkleminden de sinüs fonksiyonunun $\mathbb{R}^{\geq 0}$ üzerinde artan olduğunu anlarız. Teorem 52.1'den,
$$\lim_{x \to \infty} \cos x$$
ve
$$\lim_{x \to \infty} \sin x$$
limitlerinin olduğu ortaya çıkar. Bu limitlere sırasıyla c ve s diyelim. Elbette $0 \leq s \leq c \leq 1$. Gene $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ eşitliğinden dolayı
$$c^2 + s^2 = 1$$
çıkar. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ denkleminden de,
$$c^2 - s^2 = c$$
çıkar. Bu iki denklemi toplarsak,
$$2c^2 - c - 1 = 0$$
buluruz. Çözersek $c = 1$ ya da $-1/2$ çıkar, ki $c \geq 0$ olmak zorunda olduğundan, $c = 1$ bulunur. Ama kosinüs 0'da 1 değerini alı-

yor ve x arttıkça azalıyor ve sonsuzda da 1'e yakınsıyor. Bundan kosinüsün sabit 1 fonksiyonu olduğu çıkar. Demek ki sinüs de sabit 0 fonksiyonuymuş. Bu, Önsav 58.4'le çelişir.

Demek ki sinüs pozitif sayılarda 0'dan küçükeşit olabiliyor. Sinüs sürekli bir fonksiyon olduğundan, Aradeğer Teoremi'nden dolayı, sinüsün pozitif bir sayıda 0 değeri aldığı anlaşılır. Demek ki $\pi > 0$ imiş. □

π'nin S kümesinin en küçük pozitif sayısı olduğuna dikkatinizi çekerim. Demek ki,

$$\pi = \min \{x > 0 : \sin x = 0\}.$$

Bundan ve Önsav 58.4'ten, $\sqrt{6} \le \pi$ bulunur.

Teorem 58.7. $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos \pi = -1$. *Ayrıca her* $x \in \mathbb{R}$ *için,*

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi/2) &= \cos x,\\ \cos(x + \pi/2) &= -\sin x\\ \sin(x + \pi) &= -\sin x,\\ \cos(x + \pi) &= -\cos x,\\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x,\\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x\end{aligned}$$

olur. Ayrıca π *sayısı, herhangi bir* $x \in \mathbb{R}$ *için,*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

ve

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

eşitliklerinin sağlandığı en küçük pozitif sayıdır.

Kanıt: $0 = \sin \pi = 2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2)$. Öte yandan $\pi/2 \notin \pi\mathbb{Z}$, yani $\sin(\pi/2) \neq 0$. Demek ki $\cos(\pi/2) = 0$. Bundan da $\sin(\pi/2) = \pm 1$ çıkar. Ama $\sin(\pi/2) = -1$ olsaydı, sinüsün sürekliliğinden ve Önsav 58.4'ten dolayı, sinüsün 0'la $\pi/2$ arasında bir yerde, yani π'den küçük bir sayıda 0 olması gerekirdi, ki bu mümkün değildir. Demek ki $\sin(\pi/2) = 1$. Buradan da,

$$\cos \pi = \cos^2(\pi/2) - \sin^2(\pi/2) = -1$$

çıkar. Devam edelim:

$$\sin(x + \pi/2) = \sin x \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2) \cos x = \cos x$$

ve benzer şekilde

$$\cos(x + \pi/2) = \cos x \cos(\pi/2) - \sin x \sin(\pi/2) = -\sin x.$$

Bu eşitlikleri, $\pi = \pi/2 + \pi/2$ yazarak iki defa uygularsak

$$\sin(x + \pi) = -\sin x,$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

elde ederiz. Son eşitlikleri, $2\pi = \pi + \pi$ yazarak iki defa uygularsak

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

elde ederiz.

Teoremin son kısmına gelelim. α sayısı, herhangi sabit bir $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\sin(x + 2\alpha) = \sin x \text{ ve } \cos(x + 2\alpha) = \cos x$$

eşitliklerinin sağlandığı en küçük pozitif sayı olsun. O zaman,

$$\cos(2\alpha) = \cos((x + 2\alpha) - x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

olur. Bundan da

$$\begin{aligned} 1 = \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

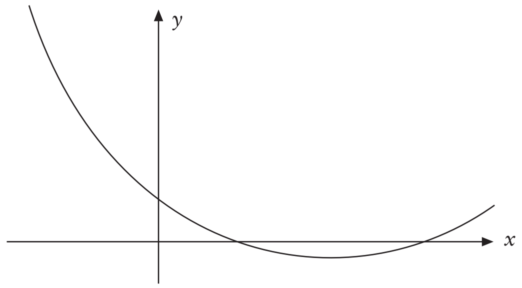
ve $\sin \alpha = 0$ çıkar. □

Diğer trigonometrik eşitlikleri okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

59. İçbükey - Dışbükey Fonksiyonlar ve Üs Alma

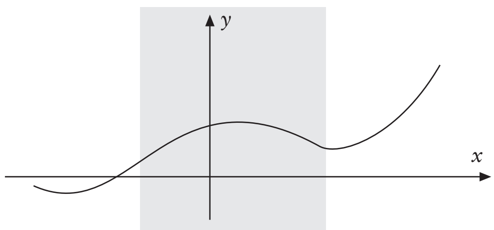
59.1. Tanım

Dışbükey bir fonksiyon, aşağıda gösterildiği gibi grafiği çanak anten gibi "yukarı doğru" olan bir fonksiyondur.



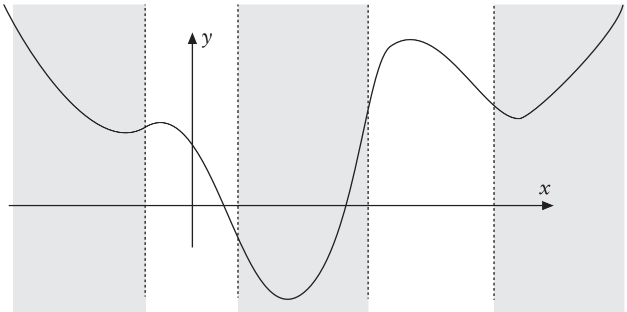
Dışbükey bir fonksiyon

Ama grafiği aşağıdaki gibi olan bir fonksiyon dışbükey değildir:



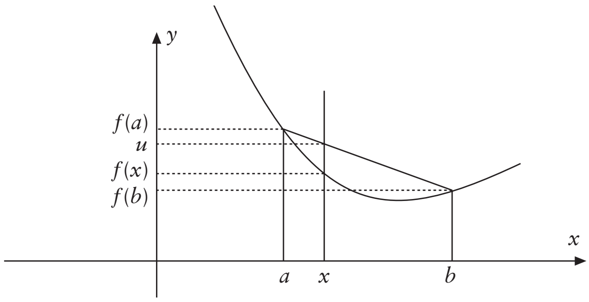
Dışbükeylik gri bölgede bozuluyor;
grafik gri alanda "aşağıya dönük".

Yukardaki örnekteki gibi bir fonksiyon dışbükey olmasa da fonksiyonun içbükey olduğu tanım bölgeleri olabilir.



Fonksiyonun dışbükey olduğu bölgeler gri renkte.
Bunlar grafiğin "yukarıya dönük" olan bölgeleridir.

Dışbükey fonksiyonun matematiksel tanımı şöyle: I, $\mathbb{R}$'nin bir aralığı ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer I'dan alınan her $a < x < b$ elemanları için, $f(x)$ değeri, aşağıdaki şekilde gösterilen u sayısından küçükeşitse, o zaman f'ye ***dışbükey*** denir.



Tanımdaki u sayısının nasıl belirlendiği herhalde şekilden anlaşılıyordur: u sayısı, $(a, f(a))$ noktasıyla $(b, f(b))$ noktasından geçen kirişin üstündeki, birinci koordinatı x olan noktasının ikinci koordinatı.

a ile b arasındaki her x noktası, bir ve bir tek $t \in (0, 1)$ sayısı için,

$$x = (1 - t)a + tb \tag{1}$$

olarak yazılabilir. Nitekim (1) eşitliğinin sağlanması için, kolay bir hesapla görülebileceği üzere,

$$t = \frac{x-a}{b-a} \quad (2)$$

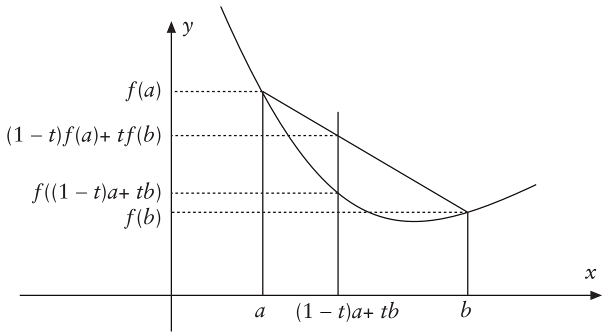
almak yeterli ve gereklidir. Bunun tersi de doğrudur: Her $t \in (0, 1)$ sayısı için,

$$(1-t)a + tb$$

sayısı a ile b arasındadır. Şimdi, dışbükeylik tanımını biçimsel olarak verebiliriz: I ve f yukardaki gibi olsunlar. Eğer her $a, b \in I$ ve her $t \in (0, 1)$ için,

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad (3)$$

ise, o zaman f fonksiyonuna ***dışbükey*** denir.



(3) formülünde (1) ve (2) formüllerini kullanırsak, dışbükeyliğe eşdeğer bir tanım elde ederiz: Her $x \in (a, b)$ için,

$$f(x) \leq \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a) \quad (4)$$

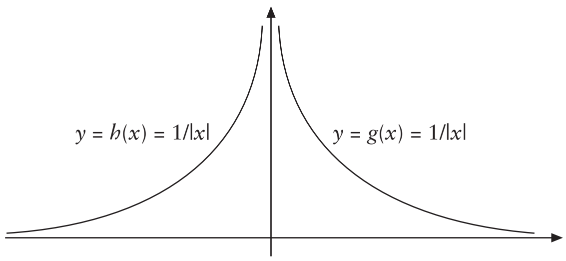
Biraz daha şık bir formülasyon şöyle: f'nin dışbükey olması için yeter ve gerek koşul, her $a, b \in I$ için ve toplamı 1 olan her pozitif α, β sayıları için,

$$f(\alpha a + \beta b) \leq \alpha f(a) + \beta f(b) \quad (5)$$

eşitsizliğidir.

Dikkat: Dışbükey bir fonksiyonun tanım kümesinin her zaman bir aralık olduğu varsayılır.

Örnek 61.1. $x \mapsto 1/|x|$ kuralıyla tanımlanan
$$g : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$$
fonksiyonu dışbükeydir. Aynı kuralla tanımlanan
$$h : \mathbb{R}^{<0} \to \mathbb{R}$$
fonksiyonu da dışbükeydir. Ama tanım kümesi bir aralık olmadığından, gene aynı kuralla tanımlanan
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
fonksiyonunun dışbükey olup olmadığı sorusu sorulamaz.



$f(x) = 1/|x|$ kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu iki dışbükey parçadan oluşmasına karşın dışbükey değil.

Örnek 61.2. $f(x) = x^2$ formülüyle tanımlanan fonksiyon bütün $\mathbb{R}$ üzerine dışbükeydir. Bunu kanıtlamak için, her

$t \in (0, 1)$ için,
$$((1-t)a + tb)^2 \leq (1-t)a^2 + tb^2$$
eşitsizliğini kanıtlamamız lazım. Hesaplardan korkmazsanız ve a/b yerine x koyarsanız, eşitsizliğin her a ve b için doğru olduğunu kanıtlamak çok kolay.

f fonksiyonun ***içbükey*** olması demek, $-f$ fonksiyonunun dışbükey olması demektir; bir başka deyişle (3), (4) ve (5) eşitsizliklerinin ters çevrilmesi, yani fonksiyonun "aşağıya dönük" olması demektir.

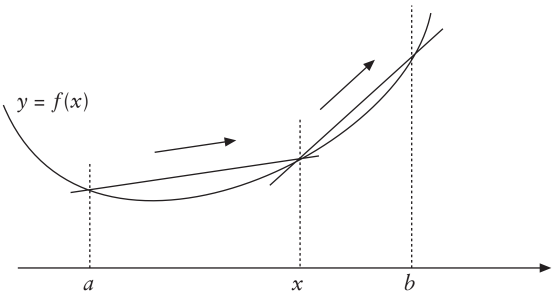
Eğer tanımdaki eşitsizlikleri (≤) keskin eşitsizliklere (<) dönüştürürsek, ***keskin içbükey*** ve ***keskin dışbükey*** kavramlarına ulaşırız.

Dışbükeyliğin (dolayısıyla içbükeyliğin de) eşdeğer bir tanımı aşağıda.

Önsav 59.1. I, $\mathbb{R}$*'nin bir aralığı ve* $f : I \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun.* f*'nin dışbükey bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul,* I*'nın* $a < x < b$ *eşitsizliklerini sağlayan her* a, x, b *elemanları için,*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır, yani, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, kirişlerin eğiminin sağa gittikçe artmasıdır.



Kanıt: f'nin dışbükey olduğunu varsayalım.

$$t = \frac{x-a}{b-a}$$

olsun. O zaman,

$$x = (1-t)a + tb$$

olur. Dışbükeyliğin tanımından,

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

çıkar. Bu eşitsizlikten $f(a)$ çıkarırsak,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

elde ederiz. İlk eşitsizlikten bu sefer $f(b)$ çıkarırsak,

$$\frac{f(x)-f(b)}{b-x} \leq \frac{f(a)-f(b)}{b-a}$$

elde ederiz. Son iki eşitsizlik istediğimizi verir.

Şimdi koşulun sağlandığını varsayalım. Koşuldan $f(x)$'i tecrit ettiğimizde, aynen

$$f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(b) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

koşulunu elde ederiz. Eğer t yukardaki gibiyse, bu da tam tamına (3) koşuludur. □

59.2. Dışbükeylik ve Süreklilik

Dışbükey ve içbükey fonksiyonlar çok vahşi fonksiyonlar olamaz, örneğin zorunlu olarak süreklidirler.

Teorem 59.2. *Dışbükey ve içbükey fonksiyonlar süreklidirler.*

Kanıt: I, $\mathbb{R}$'nin bir aralığı ve $f : I \to \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon olsun. $b \in I$ olsun. I'dan $a < b < c$ eşitsizliklerini sağlayan a ve c sayıları seçelim. $x \in (b, c)$ rastgele olsun. $a < b < x$ olduğundan, (4) formülünden (x'le b'nin yerlerini değiştirirerek),

$$f(b) \le \frac{b-a}{x-a} f(x) + \frac{x-b}{x-a} f(a)$$

elde ederiz. Buradan da

$$f(x) \ge \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a)$$

çıkar. Ayrıca $b < x < c$ olduğundan, gene (4) eşitsizliğinden,

$$f(x) \le \frac{x-b}{c-b} f(c) + \frac{c-x}{c-b} f(b)$$

buluruz. Demek ki,

$$\frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a) \le f(x) \le \frac{x-b}{c-b} f(c) + \frac{c-x}{c-b} f(b).$$

Şimdi, bu formülde, $b < x < c$ eşitsizliğini bozmadan x'i b'ye götürelim. Sol ve sağ taraflar $f(b)$'ye eşit olurlar ve

$$f(b) \le \lim_{x \to b^+} f(x) \le f(b),$$

yani

$$f(b) = \lim_{x \to b^+} f(x)$$

çıkar. Benzer şekilde,

$$f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

eşitliği kanıtlanır. Demek ki,

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

ve f sürekli.

İçbükey fonksiyonlar için kanıt benzerdir. □

59.3. Dışbükey Fonksiyonların Çarpımı

İki dışbükey fonksiyonun çarpımı dışbükey midir? Yanıt, net bir hayır!

Örnek 1. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = -1$ fonksiyonları dışbükeydir ama $f \cdot g$ çarpımı dışbükey olmadığı gibi keskin içbükeydir.

Örnek 2. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları dışbükeydir ama $f \cdot g$ çarpımı dışbükey değildir.

Bu iki örneğe dikkatlice bakarsak, sorunun fonksiyonlardan birinin bazen negatif değerler almasında yattığını sanabiliriz. Sorun burada yatmıyor, pozitif dışbükey fonksiyonların çarpımı da dışbükey olmayabiliyor:

Örnek 3. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = (x - 1)^2$ fonksiyonları dışbükeydir ama $f \cdot g$ çarpımı dışbükey değildir. Nitekim eğer $a = 0$, $b = 1$ olarak alırsak ve $t \in (0, 1)$ herhangi bir sayıysa,

$$(f \cdot g)((1 - t)a + tb) = (f \cdot g)(t) = t^2(t - 1)^2$$

ve

$$(1 - t)(f \cdot g)(a) + t(f \cdot g)(b) = 0$$

olur. Demek ki,

$$(f \cdot g)((1 - t)a + tb) > (1 - t)(f \cdot g)(a) + t(f \cdot g)(b)$$

olur ve $f \cdot g$ fonksiyonu dışbükey olmaz.

Gene de dışbükey fonksiyonların çarpımı hakkında bir teorem doğru. Sadece heyecan katmak amacıyla değil, daha pedagojik olması için teoremin önce kanıtını verelim, önermesini daha sonra yazarız.

İki pozitif ve dışbükey fonksiyon alalım: f ve g. Bunların çarpımının dışbükey olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Bu sonucun yanlış olduğunu bildiğimizden, "kanıtlamak istiyoruz" yerine "kanıtlamaya çalışalım" demek daha az yanlış olurdu.

a ve b tanım aralığından iki sayı olsun. $t \in (0, 1)$ rastgele olsun.

$$t(f \cdot g)(a) + (1-t)(f \cdot g)(b) \geq (f \cdot g)(ta + (1-t)b),$$

yani

$$tf(a)g(a) + (1-t)f(b)g(b) \geq f(ta + (1-t)b) \cdot g(ta + (1-t)b) \quad (*)$$

eşitsizliğini kanıtlamak istiyoruz. f ve g'nin dışbükey olduğunu bildiğimizden,

$$tf(a) + (1-t)f(b) \geq f(ta + (1-t)b),$$
$$tg(a) + (1-t)g(b) \geq g(ta + (1-t)b),$$

eşitsizliklerini biliyoruz. f ve g fonksiyonları pozitif olduklarından, bu iki eşitsizliği taraf tarafa çarpıp,

$$[tf(a) + (1-t)f(b)][tg(a) + (1-t)g(b)]$$
$$\geq f(ta + (1-t)b) \cdot g(ta + (1-t)b)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Demek ki (*) eşitsizliğini kanıtlamak için,

$$tf(a)g(a) + (1-t)f(b)g(b) \geq [tf(a) + (1-t)f(b)][tg(a) + (1-t)g(b)]$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Bu son eşitsizlik de,

$$tf(a)g(a) + (1-t)f(b)g(b)$$
$$\geq t^2 f(a)g(a) + (1-t)^2 f(b)g(b) + t(1-t)(f(a)g(b) + f(b)g(a))$$

eşitsizliğine denk. Eşitsizliğin sağındaki ilk iki terime sola geçirip, pozitif olan $t - t^2$ terimlerini sadeleştirirsek, son eşitsizliğin

$$f(a)g(a) + f(b)g(b) \geq f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

eşitsizliğine denk olduğunu görürüz. Bu da,

$$(f(a) - f(b))(g(a) - g(b)) \geq 0$$

eşitsizliğine denktir. Bu eşitsizlik de
$$f(a) > f(b) \Leftrightarrow g(a) > g(b)$$
anlamına gelir. Bir teorem kanıtladık.

Teorem 59.3. *Eğer f ve g fonksiyonları pozitif ve dışbükeylerse ve her a, b için*
$$f(a) > f(b) \Leftrightarrow g(a) > g(b)$$
ise, o zaman $f \cdot g$ de dışbükeydir. Dolayısıyla f pozitif ve dışbükeyse ve $n \in \mathbb{N}$ ise f^n fonksiyonu da dışbükeydir; özel bir durum olarak, $x \mapsto |x|^n$ fonksiyonu dışbükeydir.

59.4. Üs Almanın Bükeyliği

Aslında, bu bölümde kanıtlayacağımız üzere, her $r \geq 1$ gerçel sayısı için,
$$x \mapsto |x|^r$$
fonksiyonu dışbükeydir. (Teorem 59.3'ten dolayı bunu $[1, 2)$ aralığındaki r sayıları için kanıtlamak yeterli. Ama bu avantajdan yararlanmamıza gerek kalmayacak.) Bir sonraki sonuç, $x \mapsto |x|^r$ fonksiyonunun her $r \geq 1$ **kesirli** sayısı için dışbükey olduğunu söylüyor. Arkası gelecek: Teorem 59.5 ve 59.9.

Önsav 59.4. *Eğer $r \geq 1$ bir kesirli sayıysa $x \mapsto |x|^r$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerine dışbükeydir.*

Kanıt [Görkem Özkaya]: Bir $r = p/q \geq 1$ kesirli sayısı seçelim. Buradaki p ve q sayıları pozitif doğal sayılardır ve $q \leq p$'dir. $f(x) = |x|^r$ olsun.

Sav 59.4.1. *Her $x \in \mathbb{R}$ için,* $1 - rx \leq |1 - x|^r$.

Kanıt: Eğer $x \in [0, 1]$ ise, eşitsizlik Teorem 38.2, Sav 1'de kanıtlanmıştır. Eğer $x > 1$ ise,
$$1 - rx \leq 1 - r \leq 0 < |1 - x|^r$$
olur. Eğer $x < 0$ ise, $y = -x > 0$ tanımını yapıp,
$$1 + ry \leq (1 + y)^r$$
eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. r yerine p/q alalım:

$$\left(1+\frac{p}{q}y\right)^q \le (1+y)^p$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Her iki tarafın da binom açılımını yaparsak,

$$\sum_{i=0}^{q}\binom{q}{i}\frac{p^i}{q^i}y^i \le \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}y^i$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Ama $q \le p$ ve $0 < y$ olduğundan,

$$\sum_{i=0}^{q}\binom{q}{i}\frac{p^i}{q^i}y^i \le \sum_{i=0}^{q}\binom{p}{i}y^i$$

eşitsizliğini kanıtlamamız yeterli. Bu son eşitsizliği kanıtlamak için de, her $i = 0, 1, ..., q$ için

$$\binom{q}{i}\frac{p^i}{q^i} \le \binom{p}{i}$$

eşitsizliğini, yani sadeleştirerek,

$$\frac{1}{q^i}\frac{q!}{(q-i)!} \le \frac{1}{p^i}\frac{p!}{(p-i)!}$$

ve bir defa daha sadeleştirerek,

$$\frac{q(q-1)\cdots(q-(i-1))}{q^i} \le \frac{p(p-1)\cdots(p-(i-1))}{p^i}$$

ve bir defa daha sadeleştirerek,

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{q}\right) \le \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{p}\right)$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Her parantezin pozitif bir sayı olduğuna dikkatinizi çekeriz. Demek ki, her $j = 1, 2, ..., i-1$ için,

$$1-\frac{j}{q} \le 1-\frac{j}{p}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Ama $p \ge q$ olduğundan, bu da bariz. Sav kanıtlanmıştır. □

Sav 59.4.2. *Her c gerçel sayısı için, öyle u ve v gerçel sayıları vardır ki,*

$$\ell_c(x) = ux + v$$

tanımını yaparsak, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq \ell_c(x)$ ve $f(c) = \ell_c(c)$ olur.

Kanıt: $c = 0$ ise $u = v = 0$ alalım. Bundan böyle $c \neq 0$ olsun. Birinci savda x yerine $1 - x/c$ koyalım. Biraz hesapla,

$$r\,|c|^r \frac{x}{c} + |c|^r(1-r) \leq |x|^r = f(x)$$

elde ettiğimizi görürüz. Eğer $x = c$ ise eşitlik elde edilir. Şimdi,

$$u = r\frac{|c|^r}{c} \text{ ve } v = |c|^r(1-r)$$

olsun. □

Önsav 59.4'ün Kanıtının Sonu: Her c gerçel sayısı için yukardaki gibi doğrusal bir ℓ_c fonksiyonu seçelim. ℓ_c'nin Sav'da belirtilen özelliklerinden dolayı,

$$f(x) = \max\{\ell_c(x) : c \in \mathbb{R}\} = \ell_x(x)$$

olur. "ℓ_c fonksiyonları doğrusal olduklarından dışbükeydirler ve dışbükey fonksiyonların maksimumu dışbükeydir" deyip kanıtı bitirebiliriz ama bunun ayrıntılarına girelim ki herhangi bir kuşku kalmasın: Her $t \in [0, 1]$ ve $a \leq b$ gerçel sayıları için,

$$\begin{aligned} f((1-t)a + tb) &= \max\{\ell_c((1-t)a + tb) : c \in \mathbb{R}\} \\ &\leq \max\{(1-t)\ell_c(a) + t\ell_c(b)) : c \in \mathbb{R}\} \\ &\leq (1-t)\max\{\ell_c(a) : c \in \mathbb{R}\} + t\max\{\ell_c(b)) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= (1-t)f(a) + tf(b). \end{aligned}$$

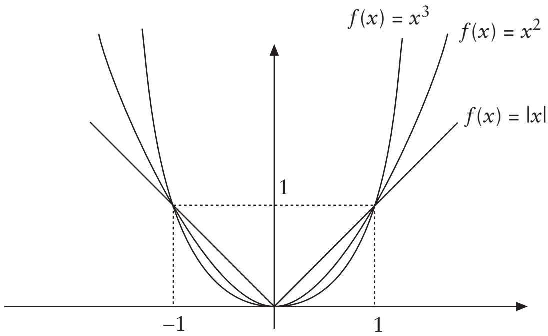
Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Nihayet, istediğimiz sonucun yarısını kanıtlayabiliriz:

Teorem 59.5. *Eğer $r \geq 1$ bir gerçel sayıysa $x \mapsto |x|^r$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerine dışbükeydir, dolayısıyla süreklidir.*

Kanıt: Limiti r olan bir $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi için, a^r'yi $(a^{q_n})_n$ sayı dizisinin limiti olarak tanımlamıştık (Bölüm 49). Limit alma eşitsizlikleri koruduğundan, teorem bir önceki önsavdan çıkar. □

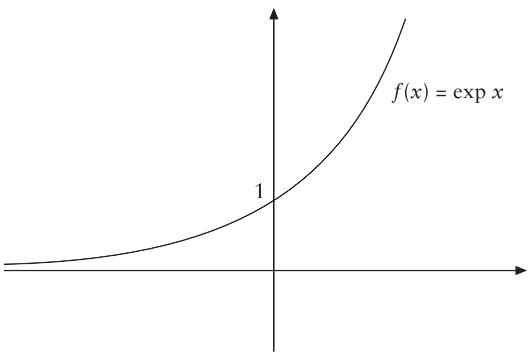
Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda.



r büyüdükçe, $x \mapsto |x|^r$ fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığında yassılaşır; bu aralığın dışında ise daha hızlı ∞'a yaklaşır.

59.5. exp Fonksiyonunun Dışbükeyliği

Şimdi de meşhur exp fonksiyonunun dışbükey olduğunu kanıtlayacağız.



Teorem 59.6. exp *fonksiyonu dışbükeydir*; *dolayısıyla süreklidir*.

Kanıt: $a < b$ ve $t \in (0, 1)$ için,

$$(1-t)\exp a + t\exp b \geq \exp((1-t)a + tb)$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Bu eşitsizliği,

$$(1-t)e^{a} + te^{b} \geq e^{(1-t)a + tb}$$

biçiminde yazarsak biraz daha alışık olduğumuz bir yazılıma kavuşuruz. Her iki tarafı da e^{a}'ya bölersek, buna denk olan

$$(1-t) + te^{b-a} \geq e^{t(b-a)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son olarak, $c = b - a$ yazarsak, kanıtlamamız gereken eşitsizlik,

$$(1-t) + te^{c} \geq e^{tc}$$

olarak kısalır. Şimdi e^{c} yerine tanımı olan

$$\sum\nolimits_{i\geq 0}\frac{c^{i}}{i!}$$

yazalım. Böylece kanıtlamak istediğimiz eşitsizlik,

$$1-t+t\sum\nolimits_{i\geq 0}\frac{c^{i}}{i!} \geq \sum\nolimits_{i\geq 0}\frac{t^{i}c^{i}}{i!}$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu eşitsizlikte soldaki t sayıları ve her iki tarafta da bulunan 1 sayılarını sadeleşir. Bu sadeleşmeyi yaparsak,

$$t\sum\nolimits_{i\geq 1}\frac{c^{i}}{i!} \geq \sum\nolimits_{i\geq 1}\frac{t^{i}c^{i}}{i!}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği kanıtlamak için, her $i \geq 1$ için, soldaki serinin i'inci teriminin sağdaki serinin i'inci teriminden küçükeşit olduğunu kanıtlamak yeterli. Bu da $t \geq t^{i}$ demektir, ki $0 < t < 1$ olduğundan bu eşitsizlik doğrudur. □

59.6. Ters Fonksiyonun Bükeyliği

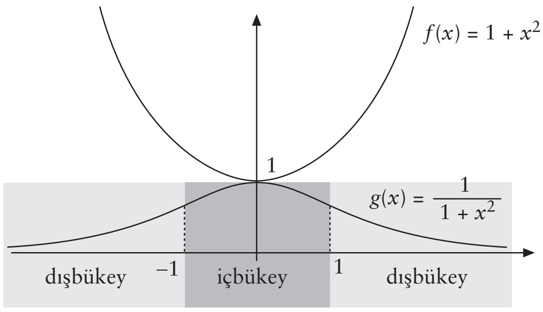
Bir veya birkaç fonksiyonun dışbükeyliğinden yola çıkarak başka fonksiyonların dış ya da içbükeyliğini kanıtlayabiliriz miyiz? Evet.

- f dış/içbükeyse, tanımdan dolayı $-f$ iç/dışbükeydir.
- Dış/İçbükey fonksiyonların toplamı dış/içbükeydir.

• f ve g dışbükey fonksiyonlarsa
$$\max\{f, g\}$$
fonksiyonu dışbükeydir. (Ama $\min\{f, g\}$ dışbükey olmayabilir.)

• f dış/içbükeyse, her a ve b sayısı için
$$f(ax + b)$$
fonksiyonu da dış/içbükeydir.

Ama f dışbükeyse, f hep pozitif değerler alsa bile, $1/f$ hakkında genellikle pek bir şey söyleyemeyiz. Mesela $f(x) = 1 + x^2$ fonksiyonu dışbükeydir ama $1/f$ ne içbükey ne de dışbükeydir (bkz. bir sonraki şekil).



Eğer $f : I \to J \subseteq \mathbb{R}$ içbükey bir eşlemeyse, f'nin tersi olan
$$f^{-1} : J \to I$$
fonksiyonunun dışbükey ya da içbükey olması gerektiğini söyleyebilir miyiz? Hayır. Örneğin
$$f(x) = x^2$$
formülüyle tanımlanmış
$$f : \mathbb{R}^{<0} \to \mathbb{R}^{>0}$$
fonksiyonu ve tersi olan
$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$
fonksiyonu dışbükeydir (neden?) Öte yandan
$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$$
fonksiyonu dışbükey bir eşlemedir (Teorem 59.6) ama tersi olan log fonksiyonu içbükeydir (kanıtı birazdan).

Aşağıdaki teorem, dışbükey bir fonksiyonun tersinin iç ya da dışbükeyliği hakkında bir bilgi veriyor.

Teorem 59.7. *I ve J, ℝ'nin iki açık aralığı olsun.*

$$f : I \to J$$

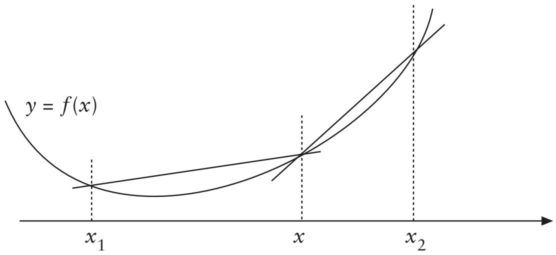
dışbükey bir fonksiyon olsun. Eğer f artansa f^{-1} içbükeydir. Eğer f azalansa f^{-1} dışbükeydir.

Teoremi kanıtlamadan önce dış/içbükeyliğin tanımına denk bir başka koşul bulalım.

Önsav 59.8. *I, ℝ'nin bir aralığı ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin dışbükey bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul, I'nın her $x_1 < x < x_2$ elemanları için,*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.



Kanıt: f'nin dışbükey olduğunu varsayalım.

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

olsun. O zaman,

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2$$

olur. Dışbükeyliğin tanımından,

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

olur. Bu eşitsizlikten $f(x_1)$ çıkarırsak,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

elde ederiz. Aynı eşitsizlikten bu sefer $f(x_2)$ çıkarırsak,

$$\frac{f(x)-f(x_2)}{x_2-x} \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}$$

elde ederiz. Son iki eşitsizlik istediğimizi verir.

Şimdi koşulun sağlandığını varsayalım. Koşuldan $f(x)$'i tecrit ettiğimizde, aynen

$$f(x) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

koşulunu elde ederiz. Eğer t yukardaki gibiyse, bu da aynen (3) koşuludur. □

Teorem 59.7'nin Kanıtı: Önsav 59.8'i uygulayacağız. J'den

$$y_1 < y < y_2$$

sayılarını seçelim. x_1, x, x_2 sayıları, I'dan

$$f(x_1) = y_1,\ f(x) = y,\ f(x_2) = y_2$$

olacak biçimde seçilsin.

f'nin artan olduğunu varsayalım. O zaman $x_1 < x < x_2$ olur. f dışbükey olduğundan, Önsav 59.8'e göre

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} \le \frac{y_2-y}{x_2-x}$$

eşitsizliği geçerlidir. Pay ve paydadaki tüm terimler pozitif olduklarından,

$$\frac{x-x_1}{y-y_1} \ge \frac{x_2-x}{y_2-y}$$

elde ederiz. Bu da aynen Önsav 59.8'e (ya da benzerine) göre, f^{-1} içbükey demektir.

İkinci önermenin kanıtı aynıdır. □

Teorem 59.9. *Eğer* $0 < r < 1$ *bir gerçel sayıysa*

$$x \mapsto x^r$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ *üzerinde içbükeydir, dolayısıyla süreklidir.*

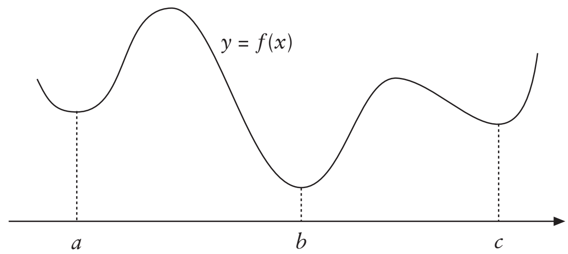
Kanıt: Her $x \geq 0$ için
$$(x^r)^{1/r} = x \text{ ve } (x^{1/r})^r = x$$
olduğundan, $\mathbb{R}^{>0}$ aralığından $\mathbb{R}$ aralığına giden $x \mapsto x^r$ fonksiyonunun tersi $x \mapsto x^{1/r}$ fonksiyonudur. Sonuç şimdi Teorem 59.3 ve 59.7'den hemen çıkar. □

59.7. Yerel/Global Minimum/Maksimum

Dış/içbükey fonksiyonlar, analizin vazgeçilmezi olan eşitsizlikleri kanıtlamak için çok güçlü bir kavramdır. Birçok uygulamasını göreceğiz.

$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $f(x) \geq f(a)$ oluyorsa, a'ya f'nin ***minimumu*** ya da ***global minimumu*** adı verilir. Bu durumda $f(a)$'ya f'nin ***minimum değeri*** adı verilir. Eğer a'yı içeren açık bir I aralığı için, $f(x) \geq f(a)$ koşulu her $x \in X \cap I$ için sağlanıyorsa, a'ya ***yerel minimum*** adı verilir. Global minimum her zaman bir yerel minimumdur elbet ama tersi doğru olmak zorunda değildir.

Yerel ve ***global maksimum*** ve ***maksimum değer*** benzer şekilde tanımlanır.



a, b ve c yerel minimumlar. a ve c global minimum değiller. Eğer tanım kümesi görünenden ibaretse b global minimumdur.

Teorem 59.10. *I bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon olsun.*

i. *Her yerel minimum aynı zamanda global bir minimumdur ve eğer keskin dışbükeyse f'nin en fazla bir global minimumu vardır.*

ii. *Eğer keskin dışbükeyse f'nin maksimum değerini veren noktalar ancak I'nın uç noktaları olabilirler.*

Kanıt: i. a, f'nin yerel minimumu olsun. J, her $x \in I \cap J$ *sayısı* için $f(x) \geq f(a)$ eşitsizliğinin sağlandığı a'yı içeren açık bir aralık olsun. $x \in I$ herhangi bir eleman olsun. O zaman, öyle bir $0 < \varepsilon$ vardır ki, her $t \in (0, \varepsilon)$ sayısı için,

$$(1 - t)a + tx \in I \cap J$$

olur. Demek ki,

$$(1 - t)f(a) + tf(x) \geq f((1 - t)a + tx) \geq f(a),$$

yani

$$(1 - t)f(a) + tf(x) \geq f(a),$$

olur. Bundan da, bariz sadeleştirmelerden sonra, $f(x) \geq f(a)$ çıkar. Demek ki a global minimummuş.

Şimdi a ve b, minimum değeri veren iki değişik sayı olsun. a ve b global minimum olduklarından, $f(a) = f(b)$'dir. Her $t \in (0, 1)$ sayısı için,

$$\begin{aligned} f((1 - t)a + tb) &\leq (1 - t)f(a) + tf(b) \\ &= (1 - t)f(a) + tf(a) = f(a) \\ &\leq f((1 - t)a + tb), \end{aligned}$$

yani $f((1 - t)a + tb) = f(a)$ olur. Demek ki f, a ile b arasında bir sabittir. Ama bu da keskin dışbükeylikle çelişir.

ii. Şimdi a'nın I'nın içinde olan yerel bir maksimum olduğunu varsayalım. O zaman I'nın içinde öyle bir açık J aralığı vardır ki, $b < a < c$ eşitsizliklerini sağlayan her $b, c \in J$ sayıları için,

$$f(b) < f(a) \text{ ve } f(c) < f(a)$$

olur. Böyle b ve c sayıları seçelim.

$$a = (1 - t)b + tc$$

eşitliğini sağlayan bir $t \in (0, 1)$ alalım. Dışbükeyliğin tanımından dolayı,

$$\begin{aligned} f(a) &= f((1 - t)b + tc) \leq (1 - t)f(b) + tf(c) \\ &\leq \max\{f(b), f(c)\} \leq f(a) \end{aligned}$$

olur. Demek ki $f(a) = \max\{f(b), f(c)\}$. Ayrıca eğer $f(b) \neq f(c)$ ise,

$$\begin{aligned} f(a) &= f((1-t)b + tc) \le (1-t)f(b) + tf(c) \\ &< \max\{f(b), f(c)\} \le f(a) \end{aligned}$$

olur, bir çelişki. Demek ki $f(b) = f(a) = f(c)$ ve f, J üzerinde sabit değer alan bir fonksiyon. Bu da f'nin keskin dışbükeyliğiyle çelişir. □

Alıştırmalar

1. Eğer $p \ge 1$ ve $a, b > 0$ ise,

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}a^p + 2^{q-1}b^q$$

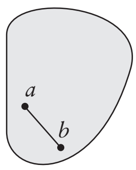
eşitsizliğini kanıtlayın.

2. Eğer bir I aralığı üzerine tanımlanmış bir f sürekliyse ve her $a, b \in I$ için,

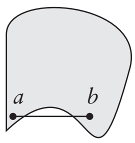
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'nin dışbükey olduğunu kanıtlayın.

3 [Dışbükey Kümeler]. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. Eğer her $a, b \in A$ için, a ve b arasındaki doğru parçası da A'nın içindeyse, A'ya ***dışbükey*** denir.



dışbükey bir altküme



dışbükey olamayan bir altküme

(Bu kavram kolaylıkla n boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayına genişletilebilir.) Bir başka deyişle, eğer her $a, b \in A$ ve her $t \in (0, 1)$ için,

$$(1-t)a + tb \in A$$

ise A'ya ***dışbükey*** denir. (Burada, $b = (b_1, b_2)$ ise, $tb = (tb_1, tb_2)$ olarak tanımlanmıştır.) $\mathbb{R}^2$ elbette dışbükeydir.

3a. Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ bir aralıksa ve $f : I \to \mathbb{R}$ dışbükeyse, f'nin grafiğinin üstünde kalan noktalar kümesinin, yani

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$$

kümesinin dışbükey olduğunu kanıtlayın.

3b. Sonlu ya da sonsuz sayıda dışbükey kümenin kesişiminin dışbükey olduğunu kanıtlayın.

3c. Eğer $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ise, A'yı içeren tüm dışbükey kümelerin kesişiminin, A'yı içeren dışbükey bir küme olduğunu kanıtlayın. Bu kümeye A'nın ***dışbükey zarfı*** dersek ve bu kümeyi dbz(A) olarak gösterirsek, dbz(A)'nın A'yı içeren en küçük dışbükey küme olduğunu kanıtlayın (yani dbz(A), A'yı içeren her dışbükey kümenin altkümesidir.)

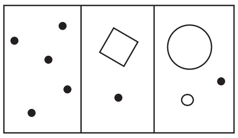
3d. Şu özellikleri kanıtlayın:

i. $A \subseteq \text{dbz}(A)$, **ii.** $\text{dbz}(\text{dbz}(A)) = \text{dbz}(A)$,

iii. $\text{dbz}(A \cap B) = \text{dbz}(A) \cap \text{dbz}(B)$,

iv. $\text{dbz}(\emptyset) = \emptyset$.

3e. Aşağıdaki üç şeklin herbirinin dışbükey zarfını bulun.



3f. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. A'nın dışbükey olması için,

Her $x_1, ..., x_n \in A$ ve toplamı 1 olan her $t_1, ..., t_n \in (0, 1)$ için $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$ elemanı A'dadır

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

3g. Yukardaki koşuldaki gibi bir

$$t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$$

noktasına $x_1, ..., x_n$ noktalarının ***dışbükey kombinasyonu*** adı verilir. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. A'nın noktalarının tüm dışbükey kombinasyonları kümesinin A'nın dışbükey zarfı olduğunu kanıtlayın.

3h. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. A'nın tüm üç nokta kümelerinin tüm dışbükey kombinasyonları kümesinin A'nın dışbükey zarfı olduğunu kanıtlayın.

3i. $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $t \in \mathbb{R}$ olsun.

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

ve

$$tA = \{ta : a \in A\}$$

olsun. Eğer A ve B dışbükeyse bu kümelerin de dışbükey olduklarını kanıtlayın. A'nın dışbükey olmasının, her $t \in (0, 1)$ için

$$(1 - t)A + tA \subseteq A$$

içindeliğinin yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

4. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dışbükey bir küme ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin dışbükey olmasının tanımını verin. Eğer f dışbükeyse her u için,

$$\{x : f(x) < u\} \text{ ve } \{x : f(x) \leq u\}$$

"seviye kümelerinin" dışbükey olduklarını kanıtlayın.

5. Yukardaki iki alıştırmayı $\mathbb{R}^2$'den $\mathbb{R}^n$'ye genelleştirin.

6 [Carathéodory Teoremi]. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. A'nın tüm üç noktalarının tüm dışbükey kombinasyonlarının kümesinin A'nın dışbükey zarfı olduğunu kanıtlayın.

7. $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n < \alpha\},$$
$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq \alpha\},$$
$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \alpha\}$$

kümelerinin dışbükey olduklarını kanıtlayın. Bundan, herhangi bir sayıda doğrusal eşitliğin ya da eşitsizliğin ortak çözümleri kümesinin dışbükey olduğunu kanıtlayın.