56. Fonk(X, $\mathbb{R}$) Metrik Uzayı ve Düzgün Yakınsama

Bir önceki bölümde bir fonksiyon dizisinin bir başka fonksiyona düzgün yakınsamasının ikinci ve daha kullanışlı bir tanımını gördük. Bunun için

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \text{ in } \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

tanımına ihtiyaç duyduk. Bu, önemli bir tanımdır, o kadar ki, "üzerinde durmaya değer" demek bile yeterince güçlü bir ifade değildir.

$||f||$ ifadesi bazen kitaplarda $||f||_\infty$ olarak geçer; adına da f'nin ***süpnorm***'u denir. Bu bölümde süpnormun bazı başat özelliklerini ve Fonk(X, $\mathbb{R}$) kümesinin özel bazı altkümelerini göreceğiz.

56.1. Fonk(X, $\mathbb{R}$) Cebiri

X, herhangi bir küme olsun. Fonk(X, $\mathbb{R}$), X'ten $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun[1].

Fonk(X, $\mathbb{R}$) kümesi üzerinde dikkat çeken üç önemli işlem vardır: toplama, bir sayıyla çarpma ve çarpma.

---

1 Bu bölümün birçok sonucunda, bilenler, Fonk(x, $\mathbb{R}$)'deki $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir metrik uzayı alabilirler. Bu takdirde gerektiğinde tam metrik uzayı varsayımında bulunmak gerekecektir. Bu genelleşmeleri bir sonraki notlarımızda yapacağız.

1) Toplama. İki fonksiyonu toplayabiliriz. Nitekim f ve g, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyonsa, $f + g$ fonksiyonu, her $x \in X$ elemanında,
$$f(x) + g(x)$$
değerini alan fonksiyondur; bir başka deyişle,
$$f + g : X \to \mathbb{R}$$
fonksiyonu,
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
eşitliğiyle tanımlanır.

2. Bir Sayıyla Çarpma. Eğer f, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyonsa ve $r \in \mathbb{R}$ bir gerçel sayıysa,
$$rf : X \to \mathbb{R}$$
adı verilen fonksiyon, her $x \in X$ için,
$$(rf)(x) = r \cdot f(x)$$
olarak tanımlanan fonksiyondur.

Yukardaki iki maddeden şu çıkar: Her f ve $g \in$ Fonk(X, $\mathbb{R}$) için $f - g$ işlemi, istenirse
$$f + (-1)g$$
olarak, istenirse de
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
kuralıyla tanımlanabilir; her iki tanım da aynı kapıya çıkar.

3. Çarpma[2]. İki fonksiyonu çarpabiliriz. Nitekim f ve g, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyonsa, $f \cdot g$ fonksiyonu, her $x \in X$ elemanında,
$$f(x)g(x)$$
değerini alan fonksiyondur; bir başka deyişle,
$$f \cdot g : X \to \mathbb{R}$$

2 Fonk(X, $\mathbb{R}$), burada tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle adına ***halka*** denilen bir yapı olur. Fonk(X, $\mathbb{R}$), bu toplama ve bir sayıyla çarpma işlemleriyle bir ***vektör uzayı*** olur. Fonk(X, $\mathbb{R}$) kümesini hem halka hem de vektör uzayı olarak (birlikte) görürsek, o zaman Fonk(X, $\mathbb{R}$), bir ***cebir*** olur. Bu kavramlara bu ders notlarında ihtiyacımız olmayacak.

fonksiyonu,

$$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Fonk(X, $\mathbb{R}$) kümesinde her zaman bölme yapamayız. Sadece X'in hiçbir noktasında 0 olmayan fonksiyonlara bölebiliriz.

56.2. Fonksiyonların Sup'u

Bir $f \in$ Fonk(X, $\mathbb{R}$) fonksiyonu için,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

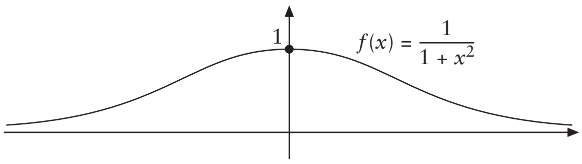
tanımını yapalım (yaptık da zaten). Elbette $\|f\|$, bir gerçel sayı olabileceği gibi ∞ da olabilir. Yani $\|f\|$,

$$\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

kümesinin bir elemanıdır. Örneğin, $X = \mathbb{R}$ ve $f(x) = x$ ise, $\|f\| = \infty$ olur. Öte yandan, $X = \mathbb{R}$ ve f fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

kuralıyla tanımlanmışsa, aşağıdaki grafikten de görüleceği üzere, $\|f\| = 1$'dir. Ama dikkat $f(x) = x/(x + 1)$ ise de $\|f\| = 1$ olur ama $|f(x)| = 1$ eşitliğini sağlayan bir x yoktur.



$\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerine, $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesinin bildiğimiz toplamasını ve sıralamasını, her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$r + \infty = \infty + r = \infty + \infty = \infty$$

ve

$$r < \infty$$

kurallarıyla genişleten bir toplama ve sıralama tanımlayabiliriz. Bu toplama ve sıralamaya göre, her

$$f \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$$

ve her $x \in X$ için,

$$f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\|$$

olur elbette. Ayrıca $\|f\|$, $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ kümesinin yukardaki eşitsizliği sağlayan en küçük elemanıdır.

Şu sonucu kanıtlamak oldukça kolaydır:

Önsav 56.1. *Her f, $g \in$ Fonk(X, $\mathbb{R}$) ve her $r \in \mathbb{R}$ için, şu önermeler doğrudur.*

i. $\|f\| = 0$ *ve* $f = 0$ *eşitliklerinden biri doğruysa diğeri de doğrudur.*

ii. $\|rf\| = |r|{\cdot}\|f\|$.

iii. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

iv. $\|f{\cdot}g\| \leq \|f\|{\cdot}\|g\|$.

Dolayısıyla, her f, g, $h \in$ Fonk(X, $\mathbb{R}$)

a. $\|f - g\| = 0 \Leftrightarrow f = g$.

b. $\|f - g\| = \|g - f\|$.

c. $\|f - g\| \leq \|f - h\| + \|h - f\|$.

Kanıt: İlk iki önerme, tanımdan dolayı bariz; aslında üçüncüsü de:

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in X\}\\ &\leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in X\}\\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\}\\ &= \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

Dördüncüsünü ve ikinci kısmı okura alıştırma olarak bırakıyoruz. □

Önsav 56.1'deki özelliklerin, aynen gerçel sayılar üzerine tanımlanmış olan mutlak değer için de geçerli olduğuna özellikle dikkatinizi çekmek isteriz. Yani Fonk(X, $\mathbb{R}$) yerine $\mathbb{R}$ kümesini alsak ve $\|\ \|$ yerine mutlak değeri alsak, yukardaki teoremin $\mathbb{R}$ ve mutlak değer için doğru olduğunu, lise, hatta ortaokul yıllarından beri bildiğimizin farkına varırız. Tek farkı, Fonk(X, $\mathbb{R}$) kümesindeki bir f elemanı için $\|f\|$ denen şeyin sonsuz olabilmesi; oysa $\mathbb{R}$'de mutlak değer sonsuz olamaz tabii. Ama tek derdimiz bu olsun! Bunun da yakın gelecekte çaresini bulacağız.

56.3. Fonk(X, $\mathbb{R}$) Üzerine Mesafe

f ve g, Fonk(X, $\mathbb{R}$) kümesinden iki eleman ise, f ve g arasındaki ***mesafeyi***

$$d(f, g) = \min\{1, \|f - g\|\}$$

olarak tanımlayalım. Böylece $d(f, g)$ hiçbir zaman sonsuz olmaz, hatta hiçbir zaman 1'i aşamaz. Ama bizim için $d(f, g)$'nin 1'i aşmaması değil, Önsav 56.2'de kanıtlayacağımız özellikleri önemli olacak. Nitekim herhangi bir $a > 0$ için

$$d(f, g) = \min\{a, \|f - g\|\}$$

olarak tanımlanmış olsaydı da herhangi bir şey değişmezdi, yapacaklarımızın hepsi bu yeni d için de geçerli olurdu. $d(f, g)$'nin tanımında beliren 1'in yegâne işlevi, f ile g arasındaki mesafenin sonsuz olmasını engelleyip Önsav 56.1'in a, b ve c özelliklerini sağlaması (bkz. Önsav 56.2). Eğer $\|f - g\|$ sonsuz olmasaydı böyle bir tanıma ihtiyaç duymazdık bile. Nitekim, sınırlı fonksiyonlarla çalışırken yukardaki $d(f, g)$ tanımını unutup,

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

tanımıyla çalışmak bizi mağdur etmeyecek (öte yandan pek bir şey de kazandırmayacak!)

Bu arada, daha ileri gitmeden,

$$d(f, g) \le 1,\ d(f, g) = \|f - g\| \text{ ve } \|f - g\| \le 1$$

önermelerinin birbirine denk olduklarını da farkedelim. Yani küçük mesafeler için, $d(f, g)$ ile $\|f - g\|$ arasında bir ayrım yoktur.

Önsav 56.2. *Her* $f, g, h \in$ Fonk(X, $\mathbb{R}$) *için şu önermeler geçerlidir*:

i. $d(f, g) \in \mathbb{R}^{\ge 0}$.

ii. $d(f, g) = 0$ *ve* $f = g$ *eşitliklerinden biri geçerliyse*, *diğeri de geçerlidir*.

iii. $d(f, g) = d(g, f)$.

iv. $d(f, g) \le d(f, h) + d(h, g)$.

Kanıt: Bunların her biri Teorem 1'in ve tanımın birer sonucudur. (i) çok bariz. (ii) de:

$$d(f, f) = \min\{1, \|f - f\|\} = \min\{1, 0\} = 0$$

olur. Öte yandan $d(f, g) = 0$ ise, o zaman,

$$0 = d(f, g) = \min\{1, \|f - g\|\}$$

olduğundan $\|f - g\| = 0$ buluruz; bundan da Teorem 1.i'e göre $f = g$ çıkar.

(iii)'ün kanıtı: Önsav 56.1'den dolayı,

$$\|f - g\| = \|(-1)(g - f)\| = |-1|\cdot\|g - f\| = |g - f\|.$$

olduğundan, $d(f, g) = d(g, f)$ olur.

(iv)'ün kanıtı: Eğer $d(f, h)$ ya da $d(h, g)$ mesafelerinden biri 1 ise, eşitsizlik elbette geçerli olur. İkisinin de 1'den küçük olduklarını varsayalım. O zaman,

$$d(f, h) = \|f - g\|$$

ve

$$d(h, g) = \|h - g\|$$

olmak zorunda. Dolayısıyla,

$$d(f, g) = \min\{1, \|f - g\|] \le \|f - g\| \le \|(f - h) + (h - g)\|$$
$$\le \|f - h\| + \|h - g\| = d(f, h) + d(h, g).$$

Teorem kanıtlanmıştır. □

Bu aşamada durup biraz soluklanalım ve ne kanıtladığımıza dikkatlice (ama belli bir mesafeden) bakalım. Gerçel sayılarda mutlak değerin de benzer özellikleri vardır: Her x, y, z gerçel sayısı için, şu önermeler doğrudur:

i. $|x - y| \in \mathbb{R}^{\ge 0}$,

ii. $|x - y| = 0$ *ve* $x = y$ *eşitliklerinden biri geçerliyse*, *diğeri de geçerlidir*.

iii. $|x - y| = |y - x|$.

iv. $|x - y| \le |x - z| + |z - y|$.

Yani Fonk(X, $\mathbb{R}$) yerine $\mathbb{R}$ kümesini alsaydık ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $d(x, y) = |x - y|$ tanımını yapsaydık da, Önsav 56.2 geçerli olacaktı.

Önsav 56.2'deki dört özelliğe sahip bir d fonksiyonuna ***mesafe*** fonksiyonu denir. Demek ki,

$$d(f, g) = \min\{1, \|f - g\|\}$$

kuralıyla tanımlanmış

$$d : \text{Fonk}(X, \mathbb{R}) \times \text{Fonk}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, Fonk(X, $\mathbb{R}$) kümesi üzerine bir mesafe fonksiyonudur. (Fonk(X, $\mathbb{R}$), d) çiftine de ***metrik uzayı*** adı verilir. Aynen bunun gibi,

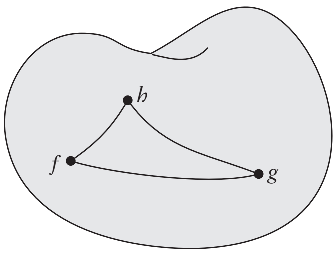
$$d(x, y) = |x - y|$$

kuralıyla tanımlanmış

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu da $\mathbb{R}$ üzerine bir mesafe fonksiyonudur ve ($\mathbb{R}$, d) çifti bir metrik uzaydır.

Önsav 56.2'de kanıtlanan dört özelliğini sağlayan bir d fonksiyonuna "mesafe fonksiyonu" denmesi nedensiz değildir. Nitekim bu dört özellik "mesafe" kavramının sağlaması gereken özelliklerin özüdür: Mesafe denen şey, eğer gerçekten "mesafe" adını hakediyorsa, her şeyden önce bir gerçel sayı olmalı ve hiç negatif olmamalı. Bu, Önsav 56.2.i'de verilmiş. Ayrıca, ancak bir noktanın kendisine olan mesafesi 0 olabilmeli; iki değişik noktanın mesafesi pozitif olmalı. Bu da Önsav 56.2.ii'de verilmiş. Ayrıca mesafe simetrik olmalı, yani A'nın B'ye mesafesi B'nin A'ya olan mesafesine eşit olmalı. Bu, Önsav 56.3.iii'te verilmiş. Ve son olarak, A'dan B'ye gitmek için bir C noktasından geçilmek istenirse, mesafeyi kısaltmış olamayız. Bu son özelliğe ***üçgen eşitsizliği*** adı verilir. Bu özellik de Önsav 56.2.iv'te verilmiştir.



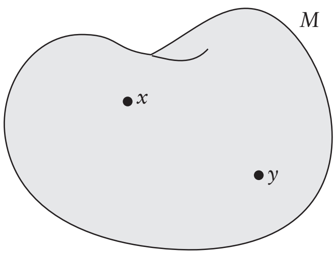
"Üçgen eşitsizliği" (Ressamın yorumu!)

Sonuç olarak, Önsav 56.2'deki dört özellik, sezgisel olarak hissettiğimiz "mesafe" kavramının vazgeçilmez ve en başat özellikleridir. Bu yüzden böyle bir fonksiyona mesafe fonksiyonu adı verilir. Ve bu yüzden mesafe kavramının tanımlandığı kümeye de metre'den türeyen metrik uzay denir.

Bir ***metrik uzayı***, bir M kümesi ve bir Önsav 56.1'in a, b ve c özelliğini sağlayan bir

$$d : M \times M \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

fonksiyonu için, (M, d) biçiminde yazılan bir çifttir. d'ye M üzerine mesafe denir. Çoğu zaman d'nin ne olduğu bilinir ve gözardı edilerek, (M, d) metrik uzayı yerine M metrik uzayı denir. Örneğin $M = \mathbb{R}$ ise, aksi söylenmedikçe $d(x, y) = |x - y|$'dir.



Bir metrik uzayı!

Bu ders notlarında amacımız hiçbir biçimde metrik uzaylarının genel teorisini göstermek değil, ama bu dile alışmakta yarar var diye düşünüyoruz.

$\mathbb{R}$'de tanımlanan hemen hemen her kavram metrik uzaylarına da genelleştirilebilir, hele metrik uzay üzerine toplama ve çarpma gibi işlemler varsa. Örneğin, yakınsaklık, limit, Cauchy dizisi, süreklilik, tamlık gibi kavramlar gerçel sayılardan metrik uzaylara genelleştirilebilir. Bunun için, $\mathbb{R}$'de yapılmış bir tanımda görünen her $|x - y|$ türünden ifade yerine $d(x, y)$ koymak yeterlidir; böylece aynı kavramı metrik uzaylara genelleştirmiş oluruz. (matematik işte böyle bir şey!)

Her metrik uzayında toplama ve çarpma gibi işlemler olmaz. Ama $\mathbb{R}$ ve Fonk(X, $\mathbb{R}$) metrik uzaylarında, mesafe dışında bir de toplama, çıkarma, çarpma ve "bir sayıyla çarpma" gibi işlemlerimiz var. Bunları zengin yapısı olan metrik uzaylar olarak algılayabiliriz.

Bu bölümde, geçmişte işlediğimiz birçok kavramı $\mathbb{R}$'den Fonk(X, $\mathbb{R}$) metrik uzayına genelleştireceğiz.

56.4. Fonk(X, $\mathbb{R}$) Uzayında Yakınsaklık

$(f_n)_n$, Fonk(X, $\mathbb{R}$) kümesinden bir dizi olsun. $f \in$ Fonk(X, $\mathbb{R}$) olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$n > N \text{ ise } d(f_n, f) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir N varsa, $(f_n)_n$'nin f'ye ***yakınsadığı*** söylenir. Bu koşulun aynen

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0,$$

demek olduğunu okurun dikkatine sunarız. Ama eğer $d(f_n, f)$ sayılarının limiti 0 ise, bu sayılar bir zaman sonra 1'in altına girerler ve o zaman da

$$d(f_n, f) = \min\{1, \|f_n - f\|\} = \|f_n - f\|$$

olur, yani

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

olur. Bunun tersi de doğrudur: Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

ise, o zaman $\|f_n - f\|$ sayıları bir zaman sonra 1'in altına girerler ve o zaman gene

$$d(f_n, f) = \min\{1, \|f_n - f\|\} = \|f_n - f\|$$

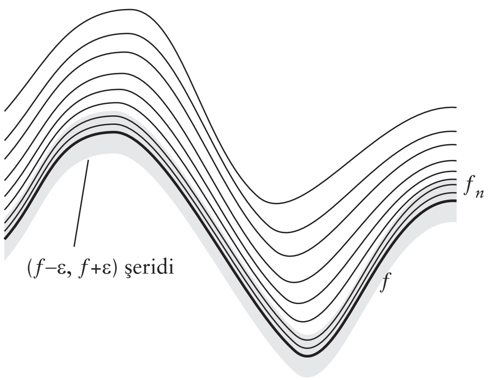
eşitliği geçerlidir, yani

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$$

olur. Dolayısıyla tanımı şöyle de verebilirdik: Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

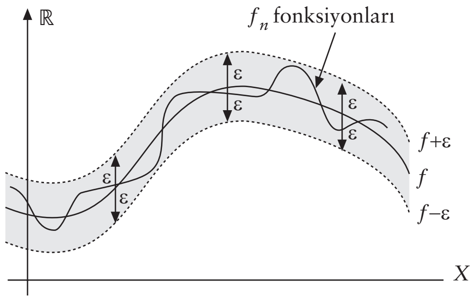
$$n > N \text{ ise } \|f_n - f\| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir N varsa, $(f_n)_n$'nin f'ye ***yakınsadığı*** söylenir. Sonuç: Tanımlanan bu yakınsaklık kavramı, aynen, önceki bölümlerde tanımlanan düzgün yakınsaklık kavramıdır, ne bir fazla ne bir eksik!



Bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması, her $\varepsilon > 0$ için, dizinin belli bir göstergeçten sonra f'nin ε şeridinin içine girmesi demektir.

Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f'ye düzgün yakınsaması için yeter ve gerek koşul, her $\varepsilon > 0$ için, f_n fonksiyonlarının "bir zaman sonra", yani belli bir N göstergecinden sonra, yukardaki ve aşağıdaki şekillerdeki gibi, $f - \varepsilon$ ile $f + \varepsilon$ şeridinin içine girmesidir.



Verilmiş bir $(f_n)_n$ dizisi eğer yakınsaksa, tek bir fonksiyona yakınsayabilir. Limitin biricikliği bir önceki paragraftan ve bölümlerden belli: $(f_n)_n$ dizisi f'ye yakınsıyorsa, f ancak $(f_n)_n$ dizisinin noktasal limiti olabilir (bkz. Teorem 54.1). Böylece

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

eşitliğini yazma hakkını kazanırız. Böyle bir f'nin olduğu bir diziye ***yakınsak*** ya da daha doğru olarak ***düzgün yakınsak*** dizi denir. f'ye de $(f_n)_n$ dizisinin düzgün limiti ya da süpnormuna göre limiti denir. Noktasal yakınsaklıkla karışmasın diye, geçen bölümlerde de belirttiğimiz gibi,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

yerine,

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$$

yazılır.

Bu bulgularımızı bir önsav halinde toparlayalım:

Önsav 56.3. $(f_n)_n$, Fonk(X, $\mathbb{R}$) *kümesinden bir dizi olsun.*

$$f \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$$

olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:

i. $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$.
ii. $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.
iii. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.
iv. $\lim_{n\to\infty} (f_n - f) \overset{u}{=} 0$. □

Önsavın son koşulundaki 0 elbette sabit 0 fonksiyonunu simgelemektedir.

Noktasal yakınsaklıkla düzgün yakınsaklığı yukarda geometrik bir bakış açısıyla karşılaştırdık. Şimdi d biçimsel bir bakış açısıyla karşılaştıralım.

$$f \overset{p}{=} \lim_{n\to\infty} f_n$$

eşitliği, aynen,

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N\ (\forall n > N)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

anlamına gelir. Buradaki N sayısı x'e ve ε'a göre değişir. Zaten yukardaki matematiksel formüldeki sıralamada da, N sayısının varlığı "$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)$" simgelerinden sonra söyleniyor. Yani her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için, istenen koşulu sağlayan ayrı bir N olabilir. Bu bağımlılığı göstermek için bazen N yerine $N_{\varepsilon, x}$ yazılır.

N'nin ε'a göre değişmesi olağan çünkü ne de olsa ε küçüldükçe

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlamak, yani $f_n(x)$'nin $f(x)$'e en fazla ε kadar yakın olmasını sağlamak güçleşmeli: Genelde ε küçüldükçe bu eşitsizliğin sağlandığı N sayılarını büyütmek gerekir; sadece pek ender durumlarda N, ε'dan bağımsızdır.

N'nin x'e göre değişmesi de olağan bulunabilir. Gerçekten de pek sık durumda x değiştikçe

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması gecikebilir. Öte yandan bazen de gecikmez, bazı durumlarda, hatta oldukça sık rastlanan bazı durumlarda, belli bir N'den büyük n sayıları için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği **her** $x \in X$ için sağlanır. İşte bu durumda,

$$(f_n : X \to \mathbb{R})_n$$

fonksiyon dizisinin

$$f : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna düzgün yakınsadığı söylenir.

Düzgün yakınsaklığın biçimsel tanımı şöyle:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N\ (\forall x \in X)\ (\forall n > N)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Bu formülü bir önceki formülle karşılaştırıp "$\forall x \in X$" simgelerinin nerden nereye geçtiğini gözlemlemekte yarar vardır.

Alıştırmalar

1. Her $f, g, h \in$ Fonk(X, $\mathbb{R}$) için,

$$d(f, g) = d(f - g, 0) = d(f - h, g - h)$$

eşitliğini kanıtlayın. (Buradaki 0, elbette sabit 0 fonksiyonu anlamına geliyor.)

2. Önsav 56.1.iv'ü kanıtlayın. Önsav 56.1.iii'te ve Önsav 56.1.iv'te eşitliklerin her zaman doğru olmadığını gösterin.

3. $X = \mathbb{R}$ olsun. Her n doğal sayısı için,

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, n dışında her yerde 0 değerini alsın ve n'de de n değerini alsın.

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{p}{=} 0$$

eşitliğinin doğru ama

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} 0$$

eşitliğinin yanlış olduğunu kanıtlayın.

4. $X = \mathbb{R}$ olsun. Her pozitif n doğal sayısı için, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, n dışında her yerde 0 değerini alsın ve n'de $1/n$ değerini alsın.

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} 0$$

eşitliğini kanıtlayın.

56.5. Düzgün Yakınsaklığın Cebiri

Şimdi düzgün yakınsaklığın cebiri (daha doğrusu aritmetiği) üzerine birkaç sonuç kanıtlayalım.

Teorem 56.4. *X bir küme olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon dizisi ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} f$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} g_n \overset{u}{=} g$$

ise, $(f_n + g_n)_n$ ve $(rf_n)_n$ fonksiyon dizilerinin de düzgün limitleri vardır ve

$$\lim_{n \to \infty} (f_n + g_n) \overset{u}{=} f + g$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} rf_n \overset{u}{=} rf$$

olur.

Kanıt: Birinci eşitliğin kanıtı tamamen,

$$\begin{aligned} \|(f_n + g_n) - (f + g)\| &= \|(f_n - f) + (g_n - g)\| \\ &\le \|f_n - f\| + \|g_n - g\| \end{aligned}$$

eşitsizliğine dayanır ve Sandviç Teoremi sayesinde Önsav 56.3'ten hemen çıkar. İkincisini okura bırakıyoruz. □

Belki şaşırtıcı ve hayal kırıklığına neden olacak ama, benzer sonuç çarpma için benzer sonuç bu genellikte doğru değildir.

Buna hemen bir örnek verelim. $X = \mathbb{R}$ olsun.

$$f_n(x) = 1/n \text{ ve } g_n(x) = g(x) = x$$

olsun. O zaman

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} 0$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} g_n \overset{u}{=} g$$

olur. Teorem 53.1'e göre

$$\lim_{n \to \infty} f_n g_n \overset{p}{=} 0$$

olur elbette ama Örnek 55.1'e göre

$$\lim_{n \to \infty} f_n g_n \overset{u}{=} 0$$

olmaz.

Öte yandan eğer her f_n ve her g_n fonksiyonu X üzerine sınırlıysa o zaman Teorem 56.4 çarpma için de geçerlidir. Sınırlı fonksiyonlarla bir sonraki bölümde ilgileneceğimizden bunun kanıtını erteliyoruz. (Dileyen aşağıdaki 9 ve 10'uncu alıştırmalara bakabilir.) Bunu bildiğimizi varsayarsak, $\mathbb{R}$'nin her sınırlı I altkümesinde,

$$\lim_{n \to \infty} (f_n g_n)_{|I} \overset{u}{=} 0$$

olduğunu buluruz (ki bunun böyle olduğunu Örnek 55.2'de elle göstermiştik.)

Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda tersi söylenmedikçe X bir küme ve $(f_n)_n$ gibi diziler fonksiyon dizileri; ayrıca her fonksiyon X'ten $\mathbb{R}$'ye gidiyor.

1. $X = \mathbb{R}$ olsun. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları şöyle tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{eğer } x > n \text{ ise} \\ x & \text{eğer } -n \le x \le n \text{ ise} \\ -n & \text{eğer } x < -n \text{ ise} \end{cases}$$

f_n fonksiyonlarının grafiklerini çizin. Noktasal yakınsadığı fonksiyonu bulun. $(f_n)_n$ dizisi bu noktasal limite düzgün yakınsar mı?

2. $X = (0, 1)$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun.

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{p}{=} 0$$

eşitliğini ve her n için $\|f_n\| = 1$ eşitliğini gösterin. Demek ki süpnormu 1 olan bir fonksiyonlar dizisi, süpnormu 1 olmayan bir fonksiyona noktasal olarak yakınsayabiliyorlar.

3. Eğer $\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} f$ ise $\lim_{n \to \infty} \|f_n\| = \|f\|$ eşitliğini kanıtlayın. (Tersinin doğru olması sözkonusu bile olamaz!)

4. $X = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x + 1/n$ olsun.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \overset{u}{=} x$$

eşitliğinin doğru olduğunu ama

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x)^2 \overset{u}{=} x^2$$

eşitliğinin yanlış olduğunu gösterin.

5. $\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} f$ olsun. f'nin sınırlı olduğunu varsayalım, yani $\|f\| < \infty$ olsun. Şunu kanıtlayın: Öyle bir A ve N vardır ki, her $n > N$ için, $\|f_n\| \le A$. (Yani $(f_n)_n$ dizisinin kuyruğunun sınırlı olduğunu kanıtlayın.)

6. Her şey yukardaki alıştırmadaki gibi olsun ama f illa sınırlı olmasın. O zaman alıştırmadaki sonucun doğru olmayabileceğini kanıtlayın.

7. Eğer her f_n sınırlıysa ve $(f_n)_n$ dizisi düzgün yakınsaksa, o zaman $(\|f_n\|)_n$ sayı dizisinin sınırlı olduğunu kanıtlayın.

8. Eğer her f_n sınırlıysa ve $(f_n)_n$ dizisi düzgün yakınsaksa, o zaman $(\|f_n\|)_n$ sayı dizisinin sınırlı olduğunu kanıtlayın.

9. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki sınırlı fonksiyon dizisi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$ ve $\lim_{n \to \infty} g_n \overset{u}{=} g$ ise,

$$\lim_{n \to \infty} f_n \cdot g_n \overset{u}{=} f \cdot g$$

eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Bir önceki alıştırmadan yararlanacaksınız.)

10. $(\|f_n\|)_n$ sayı dizisinin bir M tarafından sınırlı olduğunu varsayalım. $g : [-M, M] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{n \to \infty} g \circ f_n \overset{u}{=} g \circ f$$

eşitliğini kanıtlayın.

11. $\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} f$ olsun. Şunu kanıtlayın: $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir N sayısı vardır ki, her n, $m > N$ için,

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

olur. (Bu son özelliği sağlayan dizilere ***Cauchy dizileri*** adı verilir ve bu diziler bir sonraki altbölümünün konusu.)

56.6. Cauchy Dizileri

Şimdi gerçel sayılardan Fonk(X, $\mathbb{R}$) metrik uzayına genelleştireceğimiz ikinci kavramı ele alalım: Cauchy dizisi kavramı.

$(f_n)_n$, Fonk(X, $\mathbb{R}$) metrik uzayından bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$n, m > N \text{ ise } d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir N varsa, $(f_n)_n$'ye ***Cauchy dizisi*** adı verilir.

Tanımdaki ε'u dilersek 1'den küçükeşit alabileceğimizden (eğer tanım 1'den küçükeşit ε'lar için doğruysa her ε için doğrudur), tanımdaki $d(f_n, f_m)$ yerine $\|f_n - f_m\|$ alabiliriz. Dolayısıyla tanımı "Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$n, m > N \text{ ise } \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir N varsa, $(f_n)_n$'ye ***Cauchy dizisi*** adı verilir" olarak değiştirebiliriz.

Aynen gerçel sayılarda olduğu gibi, Fonk(X, $\mathbb{R}$) metrik uzayının her yakınsak dizisi Cauchy dizisidir ve her Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu özellik (daha doğrusu bu özelliğin ikinci kısmı) her metrik uzayı tarafından paylaşılmaz. (Örneğin $\mathbb{Q}$'de bu doğru değildir.) Bu özelliği olan metrik uzaylarına ***tam*** metrik uzayları denir.

Teorem 56.5. Fonk(X, $\mathbb{R}$) *metrik uzayındaki her yakınsak dizi Cauchy dizisidir. Ayrıca* Fonk(X, $\mathbb{R}$) *metrik uzayının her Cauchy dizisi yakınsaktır. Daha ayrıntılı söylemek gerekirse,* Fonk(X, $\mathbb{R}$) *metrik uzayındaki her Cauchy dizisinin noktasal limiti vardır ve dizi bu noktasal limite düzgün yakınsar. Kısacası* Fonk(X, $\mathbb{R}$) *metrik uzayı tamdır.*

Kanıt: Birinci kısmın tanımı standart ve oldukça kolay.

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} f$$

olsun, yani

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

olsun. $\varepsilon > 0$ rastgele seçilmiş olsun. O zaman öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için

$$||f_n - f|| < \varepsilon/2$$

olur. Dolayısıyla Teorem 1.iii'e göre, her n, $m > N$ için,

$$||f_n - f_m|| = ||(f_n - f) + (f - f_m)|| \leq ||f_n - f|| + ||f - f_m||$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ dizisi Cauchy dizisiymiş.

Şimdi teoremin ikinci kısmını kanıtlayalım. $(f_n)_n$, Fonk(X, $\mathbb{R}$) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Demek ki her $\varepsilon > 0$ için,

$$n, m > N \text{ ise } ||f_n - f_m|| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir N vardır. Bir başka deyişle, her $\varepsilon > 0$ için, n, $m > N$ ise

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in X\} < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir N vardır. Bundan da tabii ki, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için, n, $m > N$ ise

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir N'nin varlığı çıkar. Demek ki, $(f_n(x))_n$ dizisi gerçel sayılarda bir Cauchy dizisidir. Gerçel sayılar tam olduğundan bu dizinin bir limiti vardır. Limite $f(x)$ diyelim:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Böylece X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir f fonksiyonu bulmuş oluruz. Şimdi

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} f$$

eşitliğini kanıtlamamız gerekiyor.

Okurun, vereceğimiz kanıtın ne kadar zekice olduğunu kavrayabilmesi için en az bir saat kendi başına kanıtlamaya çalışmasında yarar vardır.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ seçelim. N de yukardaki gibi olsun. $m > N$ sabit bir sayı olsun. Demek ki her her $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bu eşitsizlikte n'yi sonsuza götürelim (m ve x sabit kalacaklar). Gerçel sayılardan gerçel sayılara giden mutlak değer fonksiyonu sürekli olduğundan, Sandviç Teoremi'nden,

$$\begin{aligned}\varepsilon &\geq \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |\lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_m(x))| \\ &= |f(x) - f_m(x)|\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik her $x \in X$ için doğru olduğundan,

$$\varepsilon \geq \|f - f_m\|$$

elde ederiz. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$m > N \text{ ise } \|f - f_m\| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N sayısı bulduk. Ama bu aynen,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_m\| = 0$$

demektir, yani gerçekten de $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ olur. Kanıtımız bitmiştir. □

56.7. Sınırlı Fonksiyonlar Kümesi $\ell^\infty(X)$

$\ell^\infty(X, \mathbb{R})$, ya da kısaca $\ell^\infty(X)$, X kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden sınırlı fonksiyonlar kümesi olsun:

$$f \in \ell^\infty(X) \Leftrightarrow f(X) \text{ sınırlı.}$$

Eğer $f, g \in \ell^\infty(X)$ ise, elbette $\|f - g\|$ bir gerçel sayı olur. Dolayısıyla Önsav 56.1'e göre,

$$d(f, g) = \min\{1, \|f - g\|\}$$

yerine

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

alırsak da $\ell^\infty(X)$ bir metrik uzayı olur. Her iki metrikten birini seçelim. Bizim için önemli olmayacak.

Teorem 56.6. *X bir küme olsun. $\ell^\infty(X)$, d metriği için tam bir metrik uzaydır.*

Kanıt: $\ell^\infty(X)$'nin d için bir metrik uzay olduğu belli. Tamlığı kanıtlayalım. $\ell^\infty(X)$ metrik uzayından bir $(f_n)_n$ Cauchy dizisi seçelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ seçelim. N, her $n, m > N$ için,

$$d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlanacak biçimde seçilsin. O zaman her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

olur. Demek ki $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}$'nin bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Bu dizinin limitine $f(x)$ diyelim. Böylece X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir f fonksiyonu elde ederiz. f, elbette $(f_n)_n$ dizisinin noktasal limitidir. İki şey kanıtlamalıyız: f'nin sınırlı olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$$

eşitliğini.

f'nin sınırlı olduğunun kanıtı kolay: Düzgün yakınsamanın tanımında $\varepsilon = 1$ alalım. O zaman bir n için $d(f_n, f) < 1$ olur, dolayısıyla her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

olur. Böyle bir n'yi sabitleyelim. $x_0 \in X$ sabit bir eleman olsun. B sayısı, her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq B$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde seçilsin. (f_n sınırlı bir fonksiyon olduğundan, böyle bir B vardır.) Şimdi her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \\ &\qquad + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + B + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 1 + B + 1 = B + 2\end{aligned}$$

olur. Bu da f'nin sınırlı bir fonksiyon olduğunu gösterir.

Şimdi sıra $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$ eşitliğini kanıtlamaya geldi. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ seçelim. Her $n, m > N$ için

$$d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir N vardır. Böyle bir N seçelim. $m > N$ göstergeci de sabitlensin. Her $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bu eşitsizlikte n'yi sonsuza götürelim (m ve x sabit kalacaklar). $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden

$$y \mapsto |y - f_m(x)|$$

fonksiyonu sürekli olduğundan (Önsav 42.4), Sandviç Teoremi'nden,

$$\begin{aligned}\varepsilon \geq \lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| &= |\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_m(x)|\\ &= |f(x) - f_m(x)|\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik her $x \in X$ için doğru olduğundan,

$$\varepsilon \geq d(f, f_m)$$

elde ederiz. Demek ki her $\varepsilon > 0$ için,

$$m > N \text{ ise } d(f, f_m) \leq \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N sayısı bulduk. Ama bu aynen,

$$\lim_{m\to\infty} d(f, f_m) = 0$$

demektir, yani gerçekten de $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ olur. Kanıtımız bitmiştir. □

Yukardaki kanıtta $\ell^\infty(X)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisinin sınırlı olduğunu kanıtladığımızın farkına vardınız mı? Varmadıysanız yukardaki teoremi kullanan bir başka kanıtını verelim:

Teorem 56.7. *$\ell^\infty(X)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

Kanıt: $(f_n)_n$, $\ell^\infty(X)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. f bu dizinin düzgün limiti olsun. $\varepsilon = 1$ olarak seçilmiş olsun. N, her $n > N$ için,

$$\|f - f_n\| < 1$$

olacak biçimde seçilmiş olsun. Demek ki, her $n > N$ için,

$$\|f_n\| = \|(f_n - f) + f\| \leq \|f_n - f\| + \|f\| \leq 1 + \|f\|$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$M = \max\{\|f_0\|, \|f_1\|, \ldots, \|f_N\|, 1 + \|f\|\}$$

ise, her n için,

$$\|f_n\| \leq M$$

olur. □

Şimdi düzgün yakınsaklığın cebiri (daha doğrusu aritmetiği) üzerine sonuçlar kanıtlayalım. Teorem 56.4 ve ardından gelen örnekten farklı olarak $\ell^\infty(X)$ metrik uzayında fonksiyon çarpması da terbiyeli bir davranış sergiliyor.

Teorem 56.8. *X bir küme olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, $\ell^\infty(X)$'den iki dizi olsun ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} f$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} g_n \overset{u}{=} g$$

ise, $(f_n + g_n)_n$, $(f_n g_n)_n$ ve $(rf_n)_n$ fonksiyon dizilerinin de düzgün limitleri vardır ve

$$\lim_{n \to \infty} (f_n + g_n) \overset{u}{=} f + g,$$
$$\lim_{n \to \infty} (f_n g_n) \overset{u}{=} fg$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} rf_n \overset{u}{=} rf$$

olur.

Kanıt: Birinci ve üçüncü eşitlik aynen Teorem 56.4, yalnız $f + g$ ve rf fonksiyonlarının $\ell^\infty(X)$ uzayında olmaları gerektiği kanıtlanması gerekiyor ki bunu da Teorem 56.1'den biliyoruz.

$$\lim_{n \to \infty} (f_n g_n) \overset{u}{=} fg$$

eşitliğini kanıtlayalım. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Teorem 56.6'dan g'nin sınırlı olduğunu biliyoruz. $A > 0$ sayısı $\|g\| \le A$ olarak seçilmiş olsun. Ayrıca Teorem 56.7'den $(f_n)_n$ dizisinin sınırlı olduğunu biliyoruz. $B > 0$ sayısı, her n için $\|f_n\| < B$ olarak seçilmiş olsun. Varsayıma göre, her $n > N_1$ için,

$$\|g_n - g\| < \varepsilon/2B$$

eşitsizliğini sağlayan bir N_1 vardır. Gene varsayıma göre, her $n > N_2$ için,

$$\|f_n - f\| < \varepsilon/2A$$

eşitsizliğini sağlayan bir N_2 vardır. $N = N_1 + N_2$ olsun. O zaman her $n > N$ için,

$$\begin{aligned} \|f_ng_n - fg\| &= \|(f_ng_n - f_ng) + (f_ng - fg)\| \\ &\le \|f_ng_n - f_ng\| + \|f_ng - fg\| \\ &\le \|f_n\|\|g_n - g\| + \|f_n - f\|\|g\| \\ &< B\cdot(\varepsilon/2B) + (\varepsilon/2A)\cdot A = \varepsilon \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} (f_ng_n) \overset{u}{=} fg$$

olur. □

56.8. Sürekli Fonksiyonlar Kümesi $C(X)$

$X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. X'ten Y'ye giden sürekli fonksiyonlar kümesi $C(X, \mathbb{R})$ ya da kısaca $C(X)$ olarak gösterilir.

$$C(X) \subseteq \mathrm{Fonk}(X, \mathbb{R})$$

olduğundan, $C(X)$'i d mesafesi altında bir metrik uzay olarak algılayabiliriz.

Eğer X sınırlı ve kapalı bir aralıksa, Teorem 47.2'ye göre,

$$C(X) \subseteq \ell^\infty(X)$$

olur[3]. Aksi durumda istenirse

$$C(X) \cap \ell^\infty(X)$$

altuzayına bakılabilir.

Bu bölümde $C(X)$ metrik uzayını irdeleyeceğiz. Akla ilk gelen soru bunun tam bir metrik uzayı olup olmadığı sorusu:

Teorem 56.9. *Sürekli fonksiyonlardan oluşan dizilerin düzgün limiti de süreklidir. Yani $C(X)$ tam bir metrik uzayıdır.*

Bu teorem aşağıdaki sonuçtan çıkar.

Teorem 56.10. *Eğer $(f_n : X \to \mathbb{R})_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ve f_n fonksiyonlarının her biri bir $a \in X$ noktasında sürekliyse, o zaman f fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

---

3 Bu dediğimiz genel olarak eğer X sınırlı ve kapalı (yani rıkız) bir kümeyse de geçerlidir.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. Öyle bir N seçelim ki, her $n \geq N$ için,

$$d(f, f_n) < \varepsilon/3$$

olsun. $n = N + 1$ olsun. O zaman her $x \in X$ için,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$$

olur. f_n fonksiyonu a'da sürekli olduğundan a'yı içeren öyle bir $U \subseteq X$ açık kümesi vardır ki, her $x \in U$ için,

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$$

olur. Şimdi $x \in U$ için hesaplayalım:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(x)|\\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir. □

Sonuç 56.11. *$C(X)$ ve $C(X) \cap \ell^\infty(X)$ metrik uzayları tamdır.*

Alıştırmalar

1. [0, 1] kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden öyle bir sürekli fonksiyon dizisi bulun ki, dizinin noktasal limiti olsun ama limit fonksiyonu sınırsız olsun.

2. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden

$$f_n(x) = \frac{1}{n(1+x^2)}$$

fonksiyonlarının 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

3. $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } |x| \geq 1/n \text{ ise} \\ n|x| & \text{eğer } |x| < 1/n \text{ ise} \end{cases}$ olarak tanımlanan

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyon dizisi düzgün yakınsak mıdır?

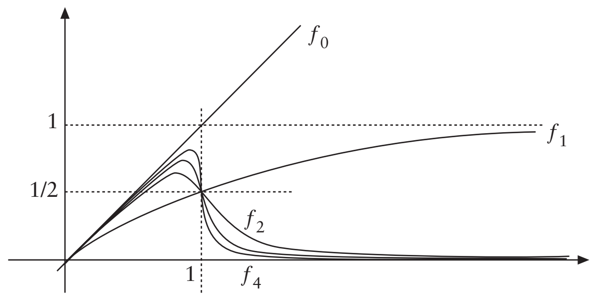
4. Öyle sürekli $(f_n : [0, 1] \to \mathbb{R})_n$ fonksiyon dizisi bulun ki sürekli bir fonksiyona noktasal yakınsasın ama düzgün yakınsamasın.

5. Her f_n fonksiyonu sınırlıysa ve $(f_n)_n$ düzgün yakınsaksa $(f_n)_n$ dizisinin sınırlı bir dizi olduğunu gösterin.

6. $[0, \infty)$ aralığından $\mathbb{R}$'ye giden

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n}$$

fonksiyon dizisinin noktasal yakınsadığını ama düzgün yakınsamadığını kanıtlayın. Bu fonksiyon dizisinin düzgün yakınsadığı bir altküme bulun. (f_n fonksiyonlarını sizin için aşağıda çizdik.)



7. $x \in \mathbb{R}$ için

$$f_n(x) = x\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

olsun. β fonksiyonu irrasyonellerde 0 değerini alsın ve birbirine asal a ve b tamsayıları için

$$\beta(a/b) = |b|$$

olsun.

$$g_n(x) = \beta(x) + 1/n$$

olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$ dizilerinin her sonlu aralıkta düzgün yakınsadığını ama $(f_n g_n)_n$ dizisinin hiçbir sonlu aralıkta düzgün yakınsamadığını kanıtlayın.

8. $x \in (0, 1)$ için

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$$

olsun. $(f_n)_n$ dizisinin $(0, 1)$ üzerinde noktasal yakınsadığını ama düzgün yakınsamadığını kanıtlayın.

9. Eğer X kapalı bir aralıksa ve $(f_n : X \to \mathbb{R})_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ve

$$g : X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

fonksiyonu sürekliyse, $(f_n/g)_n$ dizisinin f/g fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

10. Her f, $g \in \ell^\infty(X)$ için,

$$|\|f\| - \|g\|| \leq \|f + g\|$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

11. $Y = \mathbb{R}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

ise ve $\lim_{n \to \infty} f_n \overset{u}{=} 0$ ise

$$\Sigma_{n\geq 0}\ (-1)^n f_n(x)$$

dizisinin düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli (bkz. Bölüm 42, Örnek 42.8'den hemen sonra) ve her $n > 0$ doğal sayısı için

$$f_n(x) = f(x + 1/n)$$

olsun. $(f_n)_n$ dizisinin f'ye düzgün yakınsadığını kanıtlayın. Eğer f düzgün sürekli değilse bunun doğru olmayabileceğini gösterin.

13. $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. X'in $(x_n)_n$ dizisi x noktasına yakınsasın. $(f_n(x_n))_n$ dizisinin $f(x)$'e yakınsadığını kanıtlayın.

57. Weierstrass M-Testi ve Sonuçları

57.1. Kuvvet Serileri

Kuvvet serilerini önceki sayılarımızda görmüştük. Anımsatalım. Bunlar,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

biçiminde yazılan ifadelerdi. Burada her a_n bir gerçel sayıdır. x ise gerçel sayılarda değer alan bir değişken olarak görülebilir. İfadede x'i sabit bir gerçel sayı olarak alıp, sonsuz bir toplamı anımsatan

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

ifadesini,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

sayısı olarak görmek istiyoruz; tabii böyle bir limit varsa... Yoksa, serinin x sayısında ıraksak olduğunu söylüyoruz. (Serinin x'te tanımsız olduğunu da söyleyebiliriz.) Örneğin $x = 0$ ise, limit vardır ve a_0 değerine eşittir. Diğer sayılarda limit olabilir de olmayabilir de. Şunu kanıtlamıştık [bkz. Teorem 35.1]: Öyle bir $R \geq 0$ vardır ki, $x \in (-R, R)$ için yukardaki limit vardır ve $x \notin [-R, R]$ için ise limit yoktur. $x = \pm R$ için ise limit olabilir de olmayabilir de, kuvvet serisine göre değişir. Bu R,

$$R = \frac{1}{\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{1/n}}$$

olarak belirlenmiştir ve adına yakınsaklık yarıçapı denir. R'nin ∞ ya da 0 olabileceğini de anımsatalım. Örneğin, exp x, sin x, cos x kuvvet serilerinde R sonsuzdur ve bu kuvvet serileri $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden birer fonksiyon verirler. Öte yandan,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

kuvvet serisi için $R = 1$'dir ve bu kuvvet serisi sadece $(-1, 1)$ aralığında bir fonksiyon tanımlar. (Bu fonksiyon da, $f(x) = (1-x)^{-1}$ fonksiyonudur.)

57.2. Fonksiyonların Sonsuz Toplamı

Kuvvet serileri, a_ix^i gibi **fonksiyonların** (sonsuz) toplamı olarak algılanabilir. Böyle algılandığında, kuvvet serilerini genelleştirmek işten bile değildir: a_ix^i fonksiyonları toplanabildiği gibi herhangi $f_i(x)$ fonksiyonları da toplanabilir. Hatta bu durumda x, herhangi bir X kümesinden bir eleman olarak da görülebilir.

X herhangi bir küme olsun. Her i doğal sayısı için,

$$f_i \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$$

olsun. Bu fonksiyonları teker teker toplayıp,

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$$

fonksiyonlarına bakabiliriz. Ardından bu sonlu toplamların n sonsuza giderken limitini alabiliriz:

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f_i$$

tanımını yapalım. "Tanım yapalım" dedik ama bu aslında çok eksik bir tanımdır. Tanımda iki sorun var:

1) Tanımda limitin noktasal limit mi yoksa düzgün limit mi olduğu söylenmemiş.

2) Limit yoksa tanım ne demek oluyor?

Birinci sorun o kadar önemli değil çünkü her şeyden önce eğer düzgün yakınsaklık varsa noktasal yakınsaklığın da olduğunu ve bu durumda noktasal limitle düzgün limitin birbirine eşit olduklarını biliyoruz. Ayrıca hangi yakınsaklık sözkonusuysa o yakınsaklığın adını ayrıca zikredebiliriz; fonksiyonların toplamının noktasal ya da düzgün yakınsak olduğunu söylemek bu sorunu çözer.

İkinci soruna gelince: Nitekim bu sonsuz toplam (yani limit) bazı noktalarda yakınsak olabilir, bazı noktalarda da olmayabilir. Bu sorunu da sonsuz toplamın hangi kümede yakınsak olduğunu belirtmekle çözeriz.

Demek ki, söylenmesi gereken,

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

serisinin X'in bir A altkümesinde noktasal ya da düzgün yakınsak olduğudur. Böylece tanımdaki belirsizlikler giderilmiş olur.

Örneğin exp, cos ve sin fonksiyonları - bilindiği üzere - $\mathbb{R}$ üzerine noktasal yakınsaktır ama $\mathbb{R}$ üzerine düzgün yakınsak değildirler. Ama - birazdan kanıtlayacağımız üzere - $\mathbb{R}$'nin her sınırlı altkümesi üzerine bu seriler düzgün yakınsaktır.

Bir başka örnek,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

serisi $(-1, 1)$ aralığı üstünde noktasal yakınsaktır ama düzgün yakınsak değildir öte yandan her $0 < a < 1$ için seri $[-a, a]$ aralığı üstünde düzgün yakınsaktır. (Birazdan göreceğiz bunları.)

57.3. Weierstrass M-Testi

Bir fonksiyon serisinin düzgün yakınsak olup olmadığını anlamanın en kolay yolu ***Weierstrass M-testi*** adı verilen aşağıdaki testi uygulamaktır.

Teorem 57.1. Weierstrass M-Testi. *X herhangi bir küme olsun. $(f_i)_i$, $\ell^\infty(X)$'de herhangi bir fonksiyon dizisi olsun. Her i için, $\|f_i\| \le M_i$ eşitsizliğini sağlayan ve*

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i$$

serisinin yakınsak olduğu M_i sayıları varsa o zaman

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

serisi düzgün yakınsaktır.

Testin ne kadar uygulanabilir olduğu her halinden belli, ne de olsa düzgün yakınsaklık gibi zor bir kavramı, gerçel sayı serileride normal yakınsaklığa indirgiyor.

Weierstrass M-Testi'nin Kanıtı: Teoremi kanıtlamak için,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} f_i\right)_n$$

dizisinin süpnorm için bir Cauchy dizisi olduğunu kanıtlamak yeterli (Teorem 57.4). Bu dizinin iki teriminin farkının süpnormunu belirleyelim. $n > m$ olsun. Hesaplayalım:

$$\left\|\sum_{i=0}^{n} f_i - \sum_{i=0}^{m} f_i\right\| = \left\|\sum_{i=m+1}^{n} f_i\right\| \le \sum_{i=m+1}^{n} \|f_i\|$$
$$\le \sum_{i=m+1}^{n} M_i = \sum_{i=0}^{n} M_i - \sum_{i=0}^{m} M_i.$$

En sondaki sayıyı küçültebilir miyiz? Evet!

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i$$

serisi yakınsak olduğundan,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} M_i\right)_n$$

dizisi yakınsaktır, dolayısıyla bir Cauchy dizisidir. Şimdi verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için, N'yi, her $n > m > N$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} M_i - \sum_{i=0}^{m} M_i < \varepsilon$$

eşitsizliği doğru olacak biçimde seçelim. Böylece her n, $m > N$ için,

$$\left\|\sum_{i=0}^{n} f_i - \sum_{i=0}^{m} f_i\right\| = \left\|\sum_{i=m+1}^{n} f_i\right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n}\|f_i\|$$
$$\leq \sum_{i=m+1}^{n} M_i = \sum_{i=0}^{n} M_i - \sum_{i=0}^{m} M_i < \varepsilon$$

olur ve böylece Weierstrass M-Testi'nin kanıtı tamamlanır. □

Teoremi uygularken seçilen M_i'nin x'ten bağımsız olmasına özen göstermeli.

Hemen uygulamalara geçelim.

Sonuç 57.2. exp, cos *ve* sin *fonksiyonlarının serileri olan*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!},\ \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!},\ \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

serileri $\mathbb{R}$*'nin her sınırlı altkümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.*

Kanıt: Düzgün yakınsaklığı $[-R, R]$ aralığı için kanıtlamak yeterli. Öyle yapalım. Bu aralıktan herhangi bir x alalım. Önce exp'in dizisini sınırlayalım:

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right| \leq \sum_{i=0}^{n}\frac{|x|^i}{i!} \leq \sum_{i=0}^{n}\frac{R^i}{i!} \to \exp R$$

olduğundan, Weierstrass M-Testi'nde, $f_i(x) = x^i/i!$ ve M_i'yi $R^i/i!$ olarak almak yeterli.

Şimdi cos x'in serisine bakalım.

$$\left|\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\right| \leq \sum_{i=0}^{n}\left|(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\right| = \sum_{i=0}^{n}\frac{|x|^{2i}}{(2i)!}$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n}\frac{R^{2i}}{(2i)!} \leq \sum_{i=0}^{2n}\frac{R^i}{i!} \to \exp R.$$

Bu sefer de M_i'yi $R^{2i}/(2i)!$ olarak almak yeterli.

sin x serisi okura bırakılmıştır. □

Yukardaki sonuçtan çok daha genel bir sonuç geçerlidir. Zaten sonucun kanıtından da hissetmişsinizdir daha genel bir teoremin doğru olduğunu:

Teorem 57.3. *R, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı olsun. $S < R$ olsun. O zaman*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

serisi $[-S, S]$ *aralığı üstünde düzgün yakınsaktır.*

Kanıt: Teorem 35.1'e göre, seri S'de mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| S^i$$

serisi yakınsaktır. Weierstrass M-Testi'ni $f_i(x) = a_i x^i$ fonksiyonlarına ve $M_i = |a_i| S^i$ sayılarına uygulayalım. □

Teoremden kuvvet serilerinin yakınsaklığının oldukça güçlü olduğu çıkıyor.

Sonuç 57.4. *Kuvvet serileri yakınsaklık yarıçapları içinde süreklidir.*

Kanıt: Kuvvet serisi

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

olsun. Yakınsaklık yarıçapı R olsun. a, $|a| < R$ eşitsizliğini sağlasın. S, $|a| < S < R$ eşitsizliklerini sağlayan herhangi bir sayı olsun. $[-S, S]$ kapalı aralığı içinde,

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

fonksiyonları (polinomiyal olduklarından) sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca, yukardaki teoreme göre bu kapalı aralık üzerinde,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) \overset{u}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

olur, yani yakınsaklık düzgündür. Demek ki, sürekli fonksiyonların düzgün limiti olan serimiz $[-S, S]$ kapalı aralığı üzerinde süreklidir [Teorem 57.1]. Dolayısıyla a'da da süreklidir. □

Sonuç 57.5. exp, sin, cos *fonksiyonları süreklidir*.
Kanıt: Yukardakilerden doğrudan çıkar. □

Alıştırmalar

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli olsun (bkz. Bölüm 42, Örnek 42.8'den hemen sonra).

$$f_n(x) = f(x + 1/n)$$

olsun. $(f_n)_n$ dizisinin f'ye düzgün yakınsadığını kanıtlayın. Eğer f düzgün sürekli değilse bunun doğru olmayabileceğini gösterin.
ğını kanıtlayın.

2. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} \sin\left(\frac{x}{3^k}\right)$ dizisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsadı-

3. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^i}$ dizisi $\mathbb{R}$'nin hangi altkümeleri üzerine düz-

4. Şu serilerin düzgün yakınsak olduklarını kanıtlayın:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$. **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}}$. **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

5. Şu serinin düzgün yakınsak olduğu bir aralık var mıdır?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$