51. Limitler ve Sonsuzlar

Bu bölümde, içinde hem limiti hem de sonsuzları barındıran kavramlardan söz edeceğiz. Örneğin

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b,$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

ve

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

gibi eşitliklerin matematiksel anlamlarını vereceğiz. Birinci duruma bir örnek verelim.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1}$$

formülüyle tanımlanan fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyon her gerçel sayı için tanımlıdır. x çok çok büyüdüğü zaman bu fonksiyonun değerleri ne olur? Biraz düşününce anlaşılacağı üzere, x çok büyük olduğu zaman, $3x^2$ terimi paydaki

$$3x^2 - 4x + 5$$

terimine hükmeder, yani x çok büyük olduğunda, $3x^2$'nin yanında

$$-4x + 5$$

pek küçük kalır, esamesi bile okunmaz. Örneğin $x = 1000$ iken $3x^2$ sayısı 3 milyon civarındadır, ama $-4x + 5$ sayısı, mutlak değeri alındığında bile sadece 4000 dolayındadır. 3 milyonun yanında 4000'in sözü bile edilmez! x daha da büyüdükçe $3x^2$ ile $-4x + 5$ arasındaki fark astronomik olur. Benzer şey payda için de geçerlidir. Demek ki x çok çok büyük olduğunda, $f(x)$'in kabaca $3x^2/2x^2$, 3/2'ye eşittir:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1} \approx \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

x'e birkaç değer vererek, $f(x)$'i - örneğin Excel'de - hesaplayalım.

$f(1) = 1,3333...$
$f(2) = 1$
$f(3) = 1,052631...$
$f(10) = 1,31840...$
$f(100) = 1,480175991...$
$f(1.000) = 1,49800175..$
$f(10.000) = 1,49980001...$
$f(100.000) = 1,4998...$
$f(100.000) = 1,49998...$

Görüldüğü gibi x büyüdükçe $f(x)$ değeri 1,5 sayısına yani 3/2'ye çok yaklaşıyor. "x sonsuz olduğunda", $f(x)$ sanki tam 1,5 olacak! İşte bu bölümde "x sonsuz olduğunda" sözlerine anlam vereceğiz. Biz, "x sonsuz olduğunda" demeyeceğiz de (çünkü olmaz öyle şey!), "x sonsuza gittiğinde" diyeceğiz.

$f(x)$'in x büyüdükçe 3/2'ye çok yakın bir değer olduğu şöyle de anlaşılabilir: Payı ve paydayı x^2'ye bölelim.

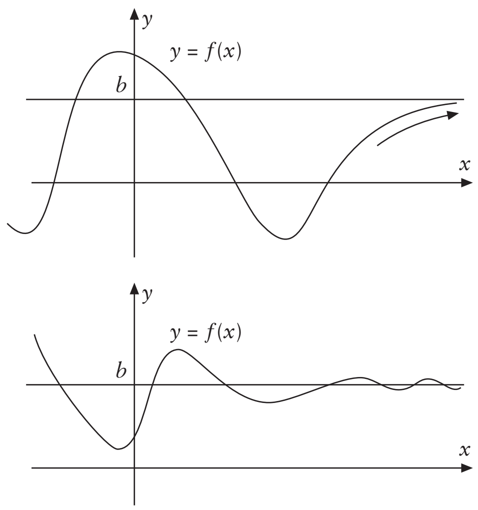
$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1} = \frac{3 - 4/x + 5/x^2}{2 + 1/x^2} \approx \frac{3}{2}.$$

Beliren $4/x$, $5/x^2$, $1/x^2$ gibi ifadeler, beliren 3 ve 2 sayıları yanında çok küçük kalırlar, x büyüdükçe bu ifadeler 0'a çok yaklaşırlar, sonsuz diye bir gerçel sayı olsa, 0 değerini alacaklar, ama öyle bir gerçel sayı olmadığından sadece 0'a yakınsamakla yetiniyorlar.

Bütün bu söylediklerimiz edebiyata girer şimdilik. Aşağıda, tanımları matematiksel olarak vereceğiz.

x Sonsuza Gittiğinde

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b \in \mathbb{R}$ olsun. "x sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye gider" ya da "b'ye yakınsar"ın matematiksel anlamını vereceğiz. Edebi anlamı şöyle: Eğer x'i yeterince büyük alırsak, $f(x)$'i b'ye istediğimiz kadar yaklaştırabiliriz, yani $f(x)$ ile b arasındaki farkı istediğimiz kadar küçük yapabiliriz, yeter ki x'i yeterince büyük alabilelim.



x sonsuza gittiğinde b'ye yakınsayan iki fonksiyonun grafiği

Örneğin, yukardaki örnekte $b = 3/2$ ve eğer x'i 10.000'den büyük alırsak, $f(x)$ ile 3/2 arasındaki fark 0,001'i geçmez. Eğer $f(x)$ ile 3/2 arasındaki farkın 0,000001'i geçmemesini istiyorsak, o zaman x'i daha da büyük almalıyız. (Ne kadar büyük almamız gerektiğini bulmak zorunda değiliz! Yeter ki yeterince büyük aldığımızda $f(x)$'in b'ye istediğimiz kadar yakın olacağını bilelim.)

Matematiksel tanımı verme zamanı geldi: Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$x > A \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir A sayısı varsa, o zaman, "x sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye yakınsar (ya da gider)" denir.

Birazdan kanıtlayacağımız üzere, b sayısı, olduğunda biriciktir; yani eğer x sonsuza gittiğinde $f(x)$ bir sayıya yakınsıyorsa, $f(x)$ ikinci bir sayıya daha yakınsayamaz. Bundan aldığımız cesaretle,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

yazacağız.

İlk örneğimizin x sonsuza giderken 3/2'ye yakınsadığını matematiksel tanıma uygun olarak kanıtlayalım.

Örnek. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1} = \dfrac{3}{2}.$

Kanıt: $\varepsilon > 0$, verilmiş olsun. Öyle bir A bulacağız ki, her $x > A$ için,

$$|f(x) - 2/3| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak. (Burada $f(x)$, limiti alınacak kesirli ifadeyi simgeliyor.) Bunu yapmak için

$$|f(x) - 2/3|$$

ifadesiyle oynayıp, bu ifadenin ε'dan küçük olması için A'nın ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız.

$$\left|\frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3x^2 - 4x + 5) - 3(2x^2 + 1)}{2(2x^2 + 1)}\right|$$

$$= \left|\frac{-8x + 7}{2(2x^2 + 1)}\right| = \frac{|-8x + 7|}{2(2x^2 + 1)} \ldots$$

Bu aşamada x'i 1'den büyük almaya and içelim ki paydaki

$$-8x + 7$$

ifadesi negatif olsun. Hesaplara devam edelim:

Şimdi x'i $4/\varepsilon$'dan büyük alırsak istediğimiz eşitsizliğe ulaşırız.

$$\cdots = \left|\frac{3x^2-4x+5}{2x^2+1}-\frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3x^2-4x+5)-3(2x^2+1)}{2(2x^2+1)}\right|$$

$$= \left|\frac{-8x+7}{2(2x^2+1)}\right| = \frac{|-8x+7|}{2(2x^2+1)} < \frac{8x-7}{2x^2+1}$$

$$< \frac{8x}{2x^2+1} < \frac{8x}{2x^2} = \frac{4}{x}\ldots$$

ε'u bir de ayrıca 1'den büyük almalıydık. Demek ki A sayısını $\max\{1, 4/\varepsilon\}$ olarak seçebiliriz.

Alıştırmalar

1. Şu eşitlikleri tanımdan hareketle kanıtlayın:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-5}{2x^2-1} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+4x-5}{-2x^2+7} = \frac{-5}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+4x-5}{-2x^3+7} = 0.$$

2. Aşağıdaki limitleri bulun ve bulduğunuz limitin ifadenin gerçekten limiti olduğunu tanımdan hareketle kanıtlayın.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+4x-5}{4x^2-1},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+4x-5}{4x^3-1}.$$

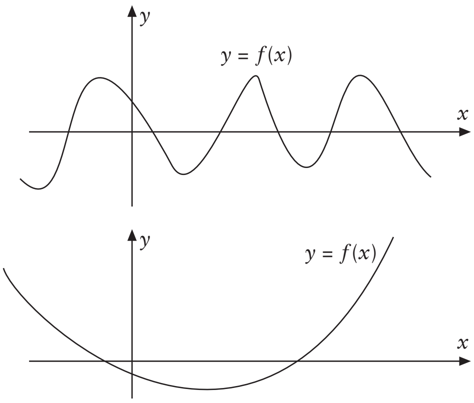
Yukardaki alıştırmalarda, limiti alınan fonksiyonların her gerçel sayıda tanımlanmadığı dikkatinizi çekmiştir. Örneğin en son alıştırmada, $x = 1/4^{1/3}$ için $f(x)$ tanımsızdır. Ama ne önemi var ki!.. "x sonsuza giderken" $f(x)$'in kaça yakınsayacağı x'in çok büyük değerlerini ilgilendiren bir soru, $f(x)$'in birkaç sayıda aldığı değerden bağımsız. Örneğin, f ve g fonksiyonları belli bir B sayısından sonra eşitlerse, yani her $x > B$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa, o zaman, x sonsuza giderken $f(x)$'in limiti varsa x sonsuza giderken $g(x)$'in de limiti vardır ve bu iki limit birbirine eşittir. Bunu görmek için, tanımdaki A sayısını B'den büyük seçmek yeterli.

Demek ki aslında x sonsuza giderken $f(x)$'in limitini almak için fonksiyonun bütün $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı olması gerekmiyor, sadece tanım kümesinde x'in sonsuza gidebilmesi, yani tanım kümesinin üstten sınırlı olmaması yeterli. Verdiğimiz tanımı genişletelim.

Tanım. $X \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı olmayan bir küme olsun.
$$f : X \to \mathbb{R},$$
bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,
$$(x \in X \text{ ve } x > A) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$
önermesini sağlayan bir A sayısı varsa, o zaman, "x sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye *yakınsar* (ya da ***gider***)" denir.

Dikkat edilirse, $X = \mathbb{N}$ olduğunda, $f(x)$'in x sonsuza gittiğinde b'ye yakınsamasıyla $(f(n))_n$ dizisinin n sonsuza gittiğinde b'ye yakınsaması aynı kavramlardır.

x sonsuza gittiğinde hiçbir sayıya yakınsamayan fonksiyon örneği vermek zor değildir. $f(x) = x$ ve $f(x) = x^2$ fonksiyonları x büyüdüğünde sürekli büyürler ve hiçbir sayıya yakınsamazlar. Ama sınırlı olup da x sonsuza gittiğinde hiçbir sayıya yakınsamayan fonksiyon örnekleri de vardır. -1 ile 1 arasında yer alan $\sin x$ fonksiyonu böyle bir örnektir (üstelik süreklidir); bunun kanıtını önümüzdeki birkaç sayı içinde göreceğiz. Belki yapay bulunabilecek bir örnek:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin \mathbb{N} \text{ ise} \end{cases}$$
fonksiyonu alttan ve üstten sınırlıdır ama x sonsuza giderken limiti yoktur.



x sonsuza gittiğinde hiçbir sayıya yakınsamayan iki fonksiyonun grafiği

Şimdi limitin - olduğunda - bir tane olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 51.1. $X \subseteq \mathbb{R}$, *üstten sınırlı olmayan bir küme olsun.*

$$f : X \to \mathbb{R},$$

bir fonksiyon olsun. Eğer x sonsuza gittiğinde $f(x)$, *b'ye yakınsıyorsa o zaman x sonsuza gittiğinde* $f(x)$ *başka bir sayıya yakınsayamaz.*

Kanıt: x sonsuza gittiğinde $f(x)$ hem b'ye hem de c'ye yakınsasın ve $b \neq c$ olsun. $\varepsilon = |c - b|/2$ olsun. B ve C sayıları,

$$(x \in X \text{ ve } x > B) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ve

$$(x \in X \text{ ve } x > C) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

önermelerini sağlayacak biçimde seçilsin. O zaman

$$x = |B| + |C| + 1$$

için,

$$\text{hem } |f(x) - b| < \varepsilon \text{ hem de } |f(x) - c| < \varepsilon$$

olur. Demek ki,

$$2\varepsilon = |b - c| \leq |b - f(x)| + |f(x) - c| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur. Bir çelişki. □

Demek ki gerçekten, x sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye yakınsıyorsa,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

yazabiliriz. (Birkaç tane olsaydı, limitlerden birini, örneğin en büyüğünü seçmek zorunda kalabilirdik, karekök fonksiyonunda yaptığımız gibi...)

Eğer $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ ise, X üstten sınırlı değilse ve $f : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x sonsuza giderken b'ye yakınsıyorsa, f'nin X'e kısıtlanışı olan $f_{|X}$ fonksiyonu da x sonsuza gittiğinde b'ye yakınsar. Elbette! Ama bunun tersi doğru değildir, yani x sonsuza gittiğinde f, b'ye ya da başka bir yere yakınsamadan da $f_{|X}$ fonksiyonu b'ye yakınsayabilir. Yan sütunda buna bir örnek verildi,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin \mathbb{N} \text{ ise} \end{cases}$$

örneği. Öte yandan x sonsuza gittiğinde $f_{|X}$ fonksiyonu b'ye yakınsıyorsa, f fonksiyonu - eğer bir yere yakınsıyorsa - ancak b'ye yakınsayabilir.

Teorem 51.2. $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$.

Kanıt: $f(x) = 1/x$ denklemiyle tanımlanan fonksiyonun tanım kümesini 0'ı içermeyen ve üstten sınırsız herhangi bir $X \subset \mathbb{R}$ olarak seçebiliriz. $\varepsilon > 0$ olsun. $A = 1/\varepsilon$ olsun. Eğer $x \in X$ sayısı, $x > A$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman

$$|f(x) - 0| = 1/|x| = 1/x < 1/A = \varepsilon$$

olur. İstediğimizi kanıtladık. □

Alıştırmalar

1. Eğer $f(x)$ sınırlı bir fonksiyonsa,

$$\lim_{x \to \infty} f(x)/x = 0$$

eşitliğini kanıtlayın.

2. $\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. x sonsuza gittiğinde $f(x)$'in limiti olsun.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \text{ ve } \lim_{n \to \infty} f(n) = b$$
eşitliklerinin eşdeğer olduklarını kanıtlayın.

x sonsuza giderken alınan limitlerde toplama, çarpma ve bölmede bir sorun çıkmaz, her şey aynen tahmin edildiği gibi olur.

Teorem 51.3. *$X \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı olmayan bir küme ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. $f, g : X \to \mathbb{R}$, birer fonksiyon olsun. Eğer x sonsuza gittiğinde $f(x)$* ve *$g(x)$, sırasıyla b ve c'ye yakınsıyorsa o zaman x sonsuza gittiğinde $f(x) \pm g(x)$, $rf(x)$* ve *$f(x)g(x)$ sırasıyla $b + c$, rb ve bc'ye yakınsar. Eğer $c \neq 0$ ise, $1/g(x)$ fonksiyonu $1/c$'ye yakınsar.*

Kanıt: Teorem 7.1'in kanıtından pek bir farkı yok. Okura bırakıyoruz. □

Alıştırmalar

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 2}{5x^2 + 1} = \dfrac{3}{5}$ eşitliğini kanıtlayın. Bunu önce tanıma başvurarak, sonra da yukarda kanıtlanan sonuçları kullanarak yapın.

2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 4x + 2}{6x^3 + 1}$ limitini bulun.

Bileşkeyle limitin ilişkisi biraz daha problematiktir.

Teorem 51.4. *$X \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı olmayan bir küme olsun.*
$$f : X \to \mathbb{R},$$
bir fonksiyon olsun.
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$
olsun. $f(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ için $g : Y \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca (b'nin Y'nin bir yoğunlaşma noktası olduğunu ve)

$$\lim_{x \to b} g(x) = c$$

eşitliğini varsayalım. Bir de, eğer $f^{-1}(b)$ *kümesi üstten sınırsız olduğunda* $g(b) = c$ *eşitliğini varsayalım. O zaman*

$$\lim_{x \to \infty} g(f(x)) = c$$

olur.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun.

$$\lim_{x \to \mathrm{b}} g(x) = c$$

olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $y \in Y$,

$$0 < |y - b| < \delta$$

eşitsizliklerini sağlıyorsa,

$$|g(y) - c| < \varepsilon$$

olur. Öte yandan,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

olduğundan öyle bir A vardır ki, her $x > A$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in X$ için,

$$|f(x) - b| < \delta$$

olur. Eğer $f^{-1}(b)$ kümesi üstten sınırlıysa, A'yı

$$(A, \infty) \cap f^{-1}(b) = \varnothing$$

olacak kadar büyük seçelim.

Şimdi $x \in X$ sayısı $x > A$ eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|f(x) - b| < \delta$$

olur ve eğer $f(x) \neq b$ ise (örneğin $f^{-1}(b)$ kümesi üstten sınırlıysa), bundan,

$$|g(f(x)) - c| < \varepsilon$$

çıkar. Eğer $f^{-1}(b)$ kümesi üstten sınırlı değilse, $f(x) = b$ eşitliğinin sağlandığı x noktalarında da gene

$$|g(f(x)) - c| = |g(b) - c| = 0 < \varepsilon$$

olur. □

Sonuç 51.5. $X \subseteq \mathbb{R}$, *üstten sınırlı olmayan bir küme olsun.*

$$f : X \to \mathbb{R},$$

bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

olsun.

$$f(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$$

için $g : Y \to \mathbb{R}$, b'de sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\lim_{x \to \infty} g(f(x)) = c$$

olur.

Alıştırma. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = b$ ile $\lim_{x \to \infty} f(1/x) = b$ eşitlikleri arasında nasıl bir mantıksal bağ olabilir?

x Eksi Sonsuza Gittiğinde

Yukarda yaptıklarımızı motamo x eksi sonsuza yakınsarken de yapabiliriz. Tanımı verelim.

Tanım. $X \subseteq \mathbb{R}$, alttan sınırlı olmayan bir küme olsun.

$$f : X \to \mathbb{R},$$

bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$(x \in X \text{ ve } x < A) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir A sayısı varsa, o zaman, "x eksi sonsuza gittiğinde $f(x)$, ***b'ye yakınsar*** (ya da ***gider***)" denir.

x, eksi ya da artı sonsuza yakınsadığındaki limitler arasında çok yakın bir ilişki vardır.

Teorem 51.6. $X \subseteq \mathbb{R}$, *alttan sınırlı olmayan bir küme* ve

$$f : X \to \mathbb{R},$$

bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki iki önerme eşdeğerdir:

a) x, *eksi sonsuza gittiğinde*, $f(x)$, *b'ye yakınsar.*

b) $\lim_{x \to \infty} f(-x) = b$.

Kanıt: Çok bariz. □

Yukardaki teorem sayesinde, bir önceki bölümde kanıtladıklarımızdan aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

Sonuç 51.7. $X \subseteq \mathbb{R}$, *alttan sınırlı olmayan bir küme olsun.*

$$f : X \to \mathbb{R},$$

bir fonksiyon olsun. Eğer x eksi *sonsuza gittiğinde* $f(x)$, *b'ye yakınsıyorsa, o zaman, x eksi sonsuza gittiğinde* $f(x)$ *başka bir sayıya yakınsayamaz.*

Kanıt: Ya aynen Önsav 1'deki gibi kanıtlanır ya da Teorem 51.3 ve Önsav 51.1 kullanılır. □

Dolayısıyla eğer *x eksi sonsuza gittiğinde* $f(x)$, *b*'ye yakınsıyorsa $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ yazabiliriz.

Sonuç 51.8. *Teo.* 51.3, *x*, *eksi sonsuza giderken de geçerlidir.*

Sonsuza Yakınsamak

Bazen bir fonksiyon belli bir noktaya yaklaştığında sınırsız biçimde büyüyebilir. Örneğin

$$f(x) = 1/x^2$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon x, 0'a çok yakınken çok büyür. Bu durumda, "x, 0'a giderken $f(x)$ sonsuza ıraksar (ya da gider)" deriz.

Biçimsel tanım şöyle:

Tanım. $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. a, X'in bir yoğunlaşma noktası olsun. Eğer her A için,

$$(x \in X \text{ ve } 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) > A$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa, o zaman, x, a'ya giderken $f(x)$ ***sonsuza ıraksar*** (ya da ***gider***) ya da $f(x)$'in ***a'da limiti sonsuzdur*** denir ve bu

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

olarak yazılır.

Eksi sonsuza ıraksamayı da tanımlayalım:

Tanım. $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. a, X'in bir yoğunlaşma noktası olsun. Eğer her A için,

$$(x \in X \text{ ve } 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) < A$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, o zaman, x, a'ya giderken $f(x)$ ***eksi sonsuza ıraksar*** (ya da ***gider)*** denir ya da $f(x)$'in ***a'da limiti eksi sonsuzdur*** denir ve bu

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

olarak yazılır.

Eğer bir fonksiyonun a'daki limiti ∞ ise, başka bir sayı ya da $-\infty$ olamaz elbette.

Sonsuza ıraksamak, aynen yakınsamak gibi toplama ve çarpma işlemleriyle uyumludur. Hatta sayfa 30-34'teki sonuçları sonsuzlarla işlem yapıldığı durumlara uyarlayabiliriz.

Teorem 51.8. $\lim_{x \to a} f(x)$ *ve* $\lim_{x \to a} g(x)$ *gerçel sayı ya da* $\pm\infty$ *olsunlar, yani*

$$\underline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

kümesinde olsunlar. $\underline{\mathbb{R}}$ *kümesinde toplamayı, çarpmayı ve bölmeyi şöyle tanımlayalım:*

$+$	$-\infty$	b	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\varnothing$
a	$-\infty$	$a+b$	∞
∞	$\varnothing$	∞	∞

$\times$	$-\infty$	$b < 0$	0	$b > 0$	∞
$-\infty$	∞	∞	$\varnothing$	$-\infty$	$-\infty$
$a < 0$	∞	ab	0	ab	$-\infty$
0	$\varnothing$	0	0	0	$\varnothing$
$a > 0$	$-\infty$	ab	0	ab	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	$\varnothing$	∞	∞

$\div$	$-\infty$	$b < 0$	0	$b > 0$	∞
$-\infty$	$\varnothing$	0	0	0	$\varnothing$
$a < 0$	∞	b/a	0	b/a	$-\infty$
0	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$a > 0$	$-\infty$	b/a	0	b/a	∞
∞	$\varnothing$	0	0	0	$\varnothing$

(sütun/sıra)

(*Boşküme yazan hanelerde işlem tanımlanmamıştır.*) * *işlemi, toplama, çarpma ya da bölme işlemlerinden birini simgelesin ve*

$$(\lim_{x \to a} f(x)) * (\lim_{x \to a} g(x))$$

işlemi yukarıdaki tablolarda tanımlanmış olsun. O zaman,

$$\lim_{x \to a} (f(x) * g(x)),$$

ifadesi

$$(\lim_{x \to a} f(x)) * (\lim_{x \to a} g(x))$$

nesnesine eşit olur.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Sonuç 51.9. $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *ise ve* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *bir gerçel sayıysa,*

$$\lim_{x \to a} rf(x) = r \lim_{x \to a} f(x)$$

eşitliği sağlanır. □

Sonuç 51.10. $f : X \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* a, X*'in bir yoğunlaşma noktası olsun. O zaman,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to a} -f(x) = -\infty$$

ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \to a} 1/f(x) = 0$$

önermeleri doğrudur. □

İkinci önermedeki $\Rightarrow$ işareti $\Leftrightarrow$ işaretiyle değiştirilemez. Örneğin

$$f(x) = x$$

fonksiyonu x, 0'a giderken 0'a gider ama $1/x$ fonksiyonu x, 0'a giderken sonsuza gitmez.

Öte yandan, $f(x) = 1/x$ fonksiyonu x sağdan 0'a giderken sonsuza, soldan 0'a giderken de eksi sonsuza yakınsar. Bu terimleri de tanımlayalım:

Tanım. $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. a, X'in sağında bir yoğunlaşma noktası olsun. Eğer her A için,

$$(x \in X \text{ ve } 0 < a - x < \delta) \Rightarrow f(x) > A$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, o zaman, x, a'ya soldan giderken $f(x)$ ***sonsuza ıraksar*** (ya da ***gider)*** denir ve bu

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

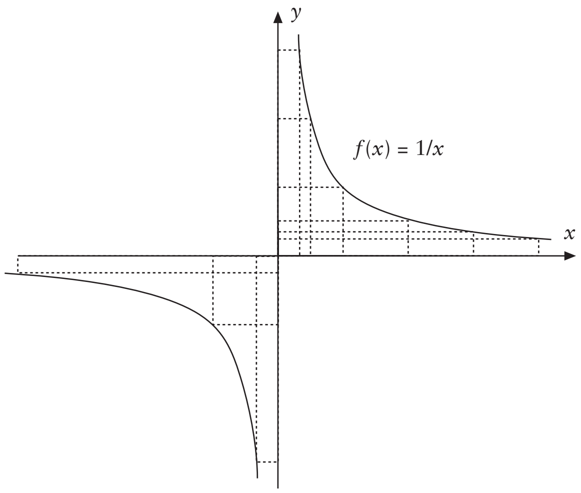
olarak yazılır.

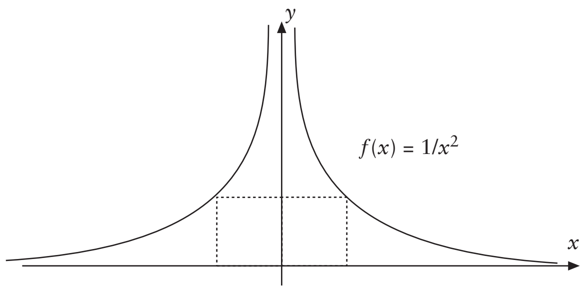
$\lim_{x \to a^\pm} \pm f(x) = \pm\infty$ tanımlarını vermeyi ve bu tanımlar için Teorem 51.8'in analogunu kanıtlamayı okurlara bırakıyoruz.

Örneğin,

$$\lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 0^+} 1/x = \infty,$$
$$\lim_{x \to 0^-} 1/x^2 = \infty,$$
$$\lim_{x \to 0^+} 1/x^2 = \infty.$$

$f(x) = 1/x$ ve $f(x) = 1/x^2$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıda.





x Sonsuza Giderken $f(x)$'in Sonsuza Gitmesi

Son olarak, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ifadesine bir anlam verelim. Sadece $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ifadesini tanımlamak yeterli diye düşünüyoruz.

İfadenin sezgisel anlamı açık olmalı: x çok çok çok büyüdüğünde $f(x)$'in de çok çok çok büyüdüğü anlamına gelir. Örneğin,

$\lim_{x \to \infty} x = \lim_{x \to \infty} x^2 = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$.

Bir başka örnek daha:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 - 4x + 2}{6x^3 + 1} = \infty.$$

İşte tanım:

Tanım. $X \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı olmayan bir küme olsun.

$$f : X \to \mathbb{R},$$

bir fonksiyon olsun. Eğer her B sayısı için,

$$(x \in X \text{ ve } x > A) \Rightarrow f(x) > B$$

önermesini sağlayan bir A sayısı varsa, o zaman, "***x sonsuza gittiğinde*** $f(x)$ ***sonsuza ıraksar*** (ya da ***gider***)" denir. Bu durumda,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

yazarız.

Diğer tanımları ve tanımların toplama, çarpma ve bölmeyle uyumlarını kanıtlamayı ce aşağıdaki sonuçları okura bırakıyoruz.

Teorem 51.11. *$f \neq 0$ ve $g \neq 0$ iki polinom olsun. a ve b bu polinomların başkatsayısıysa, $\varepsilon = ab/|ab| = \pm 1$ olsun.*

Eğer $\deg f < \deg g$ *ise* $\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x) = 0$,

Eğer $\deg f > \deg g$ *ise* $\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x) = \varepsilon\infty$,

Eğer $\deg f = \deg g$ *ise* $\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x) = a/b$

olur. □

Sandviç Teoremi'nin uygun versiyonu da bu tür limitler için geçerlidir:

Teorem 51.12. *f ve g, tanım kümeleri üstten sınırlı olmayan iki fonksiyon olsun. Eğer $f \le g$ ise ve $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ise $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ olur.* □

Alıştırmalar

1. Eğer $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ ise,

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = \infty$$

eşitliğini kanıtlayın.

2. Bu bölümde kanıtlanmamış sonuçları kanıtlayın.

3. Aşağıdaki limitleri bulun.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^4+4x+2}{6x^3+1}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{-6x^2+4x+2}{6x^3+1},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^3+4x+2}{4x^3+1}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2+4x+2}{10x^2+1}.$$

4. $\lim_{x \to \infty} \exp x = \infty$ ve $\lim_{x \to \infty} \exp(-x) = 0$ eşitliklerini kanıtlayın.

5. Aşağıdaki limitleri bulun.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\exp x - 3}{5\exp x + 7}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2\exp x - 3}{5\exp 2x + 7},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\exp(-x) - 3}{5\exp(-x) + 7}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{4\exp 3x - \exp x}{7\exp 3x + \exp 2x}.$$

Limit Alıştırmaları

1. $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 12)$ limitini bulun.

2. Aşağıdaki limitleri bulun:

3. a herhangi bir sayı olsun.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3},\ \lim_{x\to 3}\frac{x^3-8x^2+9x+18}{x^2-5x+6},$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\exp x-\exp 3}{x-3},\ \lim_{x\to 3}\frac{\exp 2x-\exp 6}{x-3}.$$

limitini bulun.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^3-a^3}{x}$$

4. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-27}{7x+4},\ \lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+9x+18}{x^3-5x+6},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-27}{5x^3+2x-3},\ \lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+9x+18)^3}{x^6-5x^2+6}.$$

5. Aşağıdaki limitleri bulun:

6. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-27}{7x+4},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{8x^2+9x+18}{-x^3-5x+6},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-27}{-5x^3+2x-3},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{[x]},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-2x^2+9x+18)^3}{x^6-5x^2+6},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-27}{-5x^3+2x-3}\right)\left(\frac{5x^2-7}{2x-3}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{x-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x^2}-\frac{2x-5}{3x+3}\right),\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{x^2}-\frac{2x^2-5}{3x+3}\right).$$

7. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^3-27}{7x},\ \lim_{x\to0^-}\frac{x^3-27}{7x},$$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{3x^2-17}{-x^3+27},\ \lim_{x\to-3^-}\frac{x^2-1}{-x^3-27}.$$

8. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x},\ \lim_{x\to0}\exp(x^2)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(8-x)^{1/3}-2}{x},\ \lim_{x\to0}\frac{\exp(2x)-1}{\exp x-1}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+34}-\sqrt{x}\right),\ \lim_{x\to\infty}\left((x-5)^{1/3}-x^{1/5}\right).$$

9. Aşağıdaki limitleri bulun:

10. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1}, \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1}.$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1}, \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1}.$$

11. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to\infty} \exp x, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp x,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\exp x, \quad \lim_{x\to 0} x\exp x,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to 0^-} \exp\frac{1}{x}.$$

x, sonsuza, eksi sonsuza, 0^+'ya ve 0^-'ye giderken f'nin limitleri-

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x}, \ \lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^2}, \ \lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}).$$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x} & \text{eğer } x > 0 \text{ ise} \\ 3x & \text{eğer } x \le 0 \text{ ise} \end{cases}$ olarak tanımlansın.

ni bulun.

13. Her n doğal sayısı için,

eşitliğini kanıtlayın. ("Eksponansiyel büyüme" tabirinin menşei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^n} = \infty$$

bu limittir.)

14. n bir doğal sayı olsun.

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \exp x$$

limitini bulun.

15. $\lim_{x\to-\infty} \exp(\exp x)$ limitini bulun.

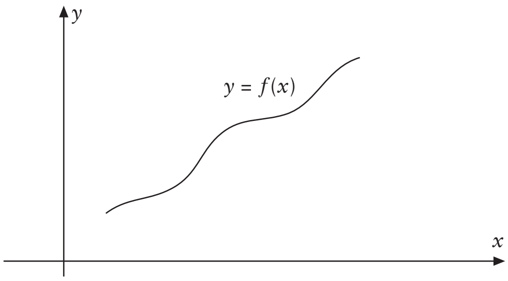
16. $\lim_{x\to\infty} \exp(\exp x)$ limitini bulun.

17. $\lim_{x\to-\infty} \exp(1/\exp(1/x))$ limitini bulun.

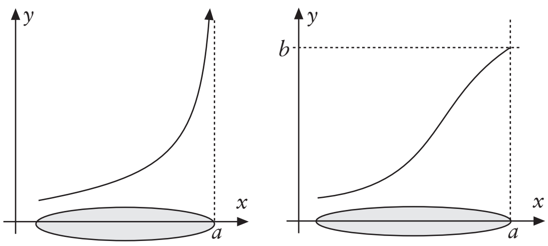
18. $\lim_{x\to 0} x/\sin x$ limitini bulun.

52. Monoton Fonksiyonların Limitleri

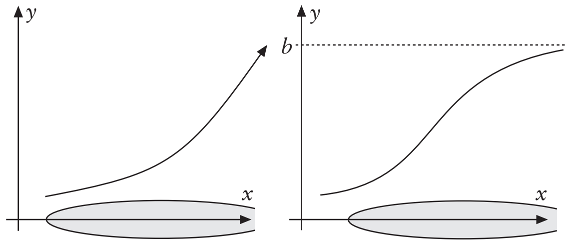
Bir $X \subseteq \mathbb{R}$ kümesi üzerine tanımlanmış **artan** bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düşünelim. Örneğin şöyle bir şey:



x, tanım kümesinin üstsınırına (soldan tabii ki) gittiğinde, fonksiyonun sonlu ya da sonsuz bir limiti olması - her zaman doğru olmasa da - makul bir öngörüdür. Aşağıda olası dört durum görünüyor:



$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to a} f(x) = b$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

Artan bir fonksiyonun, x, tanım kümesinin üstsınırına gittiğinde, sonlu ya da sonsuz bir limiti var mıdır ve varsa bu limit nedir?

Her ne kadar yukardaki şekillerde fonksiyonlar sürekli gibi görünse de, fonksiyonların sürekli olmalarına pek gerek yok sanki. Fonksiyon sürekli de olsa süreksiz de olsa, limit olmalı sanki...

Ama biraz düşününce bir iki teknik sorunla karşılaşırız. Önce o sorunları tartışıp halledelim. (Tartışmadan hoşlanmayanlar doğrudan teoreme ve kanıtına gidebilirler. Zaten teorem de kanıtı da birkaç satırı geçmiyor.)

Örneğin eğer $X = (0, 1) \cup \{2\}$ ise, $f(x)$'in x, 2'ye giderken limiti alınamaz, çünkü 2, X'ten ayrık bir sayıdır, X'in bir yoğunlaşma noktası değildir. (Limit kavramının tanımını anımsayın: Bir fonksiyonun limiti ancak tanım kümesinin yoğunlaşma noktalarında alınabilir.)

Bu sorunu halletmenin en kolay yolu, $\sup X \in \mathbb{R}$ olduğunda, $\sup X$ sayısının X'in bir yoğunlaşma noktası olduğunu varsaymaktır. Ama aynı sorunu böyle bir kısıtlama getirmeden, daha şık biçimde de çözebiliriz: $f(x)$'in limitini, x, $\sup X$'e giderken almaya kalkışacağımıza, limiti, x, $\operatorname{limsup} X$'e giderken almaya çalışabiliriz. O zaman yukardaki sorun kaybolur. (Önsav 26.6'dan anımsayalım: $\operatorname{limsup} X$, eğer sonlu bir sayıysa, X'in yoğunlaşma noktalarının en büyüğüdür. X'in yoğunlaşma noktası yoksa zaten o zaman yapacak bir şey yok, hiçbir noktada limit alamayız.)

Sorun olmasa da bir soru var ve bu soru yanıtlanmazsa kanıt aşamasında soru soruna dönüşebilir: x, limsup X'e giderken $f(x)$'in limiti hangi sayı olacaktır?

Fonksiyon artan olduğundan, x, limsup X'e giderken f'nin limitinin sup $f(X)$ olmasını beklemek makul gibi görünüyor. Ama maalesef bu her zaman doğru değil. Örneğin, $X = [0, 1]$ ise ve f fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanmışsa, o zaman, X'in limsup'ü 1'dir ve

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 \neq 1 = \sup f(X)$$

olur.

Bu sorunu çözmek için, x, limsup X'e giderken $f(x)$'in limitinin sup $f(X)$ değil de limsup $f(X)$ olduğu tahmininde bulunabiliriz ama bu tahmin de yetersiz kalır çünkü örneğin f sabit bir fonksiyon olduğunda limsup $f(X)$ yoktur.

x, limsup X'e giderken f'nin limitinin

$$\sup\{f(x) : x \in X \text{ ve } x \leq \limsup X\}$$

olması gerektiği biraz daha doğru bir tahmindir. Ama bu da tam doğru bir tahmin olmaz. Bu sefer şöyle bir sorun belirebilir: limsup X, sağdan da X'in bir yoğunlaşma noktası olabilir ve f fonksiyonu limsup X'in sağında sorun yaratabilir. Örneğin,

$$X = (0, 1) \cup \{1 + 1/n : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

ve

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ise, limsup $X = 1$ olur ve $\lim_{x\to 1} f(x)$ limiti yoktur.

Bu sorunun da çözümü var: Normal limit alacağımıza, limiti soldan alalım; $f(x)$'in limitini, x, limsup X'e giderken değil, x, limsup X'e **soldan** giderken alalım.

Bazı okurları sıkabilecek bu uzun tartışmadan sonra artık baklayı ağzımızdan çıkarıp teoremimizi yazabiliriz:

Teorem 52.1. *$X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$, artan bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$a = \text{limsup } X \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

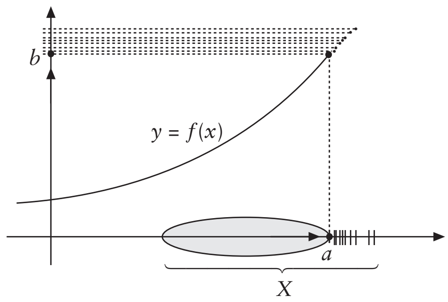
ise ve

$$b = \sup\{f(x) : x \in X \text{ ve } x < a\}$$

ise o zaman,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

olur. ($a = \infty$ ise, $a^- = \infty$ anlaşmasını yapalım.)



Dikkat: X'in limsup'ü olmayabilir, o zaman teorem hiçbir şey dememektedir.

Benzer bir sonuç, elbette azalan fonksiyonlar ve inf ve liminf'ler için de geçerlidir.

Bu arada artan ve azalan fonksiyonların tanımını yapalım da hiçbir şey gizli kalmasın:

$$X \subseteq \mathbb{R} \text{ ve } f : X \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyon olsun. Eğer X'in her $x < y$ elemanları için $f(x) \leq f(y)$ oluyorsa, f'ye ***artan*** fonksiyon denir. Eğer X'in her $x < y$ elemanı için $f(x) < f(y)$ oluyorsa, f'ye ***mutlak artan*** fonksiyon denir. Benzer tanımlar azalan ve mutlak azalan fonksiyonlar için de yapılır. Artan ya da azalan fonksiyonlara ***monoton*** fonksiyonlar adı verilir.

Teoremin Kanıtı: a ve b'nin $\mathbb{R}$'de olduklarını varsayalım.

Diyelim teorem doğru değil. O zaman öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki, $\delta > 0$ ne olursa olsun,

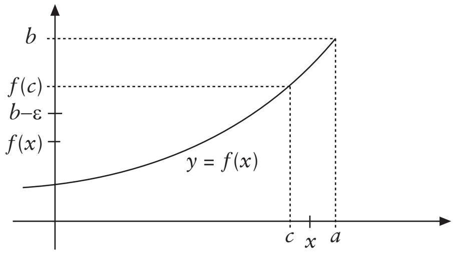
$$\text{hem } x \in X \cap (a - \delta, a) \text{ hem de } b - f(x) > \varepsilon$$

ilişkilerini sağlayan bir x buluruz. Bu ε sayısını sabitleyelim.

b'nin tanımından dolayı, X'in,

$$b - \varepsilon < f(c) \le b$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $c < a$ elemanı vardır.



Şimdi ilk paragraftaki δ'yı $a - c$ sayısına eşit alalım. O zaman, hem

$$x \in X \cap (a - \delta, a) = X \cap (c, a)$$

hem de

$$b - f(x) > \varepsilon$$

ilişkilerini sağlayan bir x buluruz. Demek ki, hem

$$c < x$$

olur hem de

$$f(x) < b - \varepsilon < f(c)$$

olur, ki bu iki eşitsizlik f'nin artan olmasıyla çelişir.

a ve b'den birinin ya da her ikisinin birden sonsuz olduğu durumların kanıtı da benzerdir ve okura bırakılmıştır. □