49. Sürekli Fonksiyon Genişletmek ve Üs Almak

49.1. Sürekli Fonksiyon Genişletmek

Bölüm 4'te, her q kesirli sayısı ve her a pozitif gerçel sayısı için, adına "a'nın q'üncü kuvveti" denilen ve a^q diye yazılan bir sayı tanımlamıştık. (a^q sayısının varlığı, Aradeğer Teoremi'nden de çıkar, bkz. Bölüm 46, Alıştırma 3.)

$q \in \mathbb{Z}$ iken, a^q, ilkokuldan beri bildiğimiz güç almaydı. $q = 1/2$ iken de a^q sayısını yıllar öncesinden öğrenmiştik: $a^{1/2} = \sqrt{a}$, yani a'nın karekökü.

Demek ki, örneğin $(\sqrt{2})^{3/5}$ diye bir sayının varlığını - tam olarak hesaplayamasak da - biliyoruz, ancak $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ diye, hatta $2^{\sqrt{2}}$ diye bir sayının varlığını henüz bilmiyoruz çünkü bir gerçel sayının $\sqrt{2}$ gibi kesirli olmayan bir gücünü şimdiye kadar hiç tanımlamadık. İşte bu bölümde pozitif bir gerçel sayının **gerçel** bir gücünü almasını ve çok daha fazlasını öğreneceğiz.

Yapacağımız iş aslında oldukça basit. Eğer $a > 0$ ve r herhangi birer gerçel sayıysa ve $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi r'ye yakınsıyorsa, o zaman a^r sayısı $(a^{q_n})_n$ dizisinin limiti olacak, yani (tanım gereği)

$$a^r = \lim_{n \to \infty} a^{q_n}$$

olacak.

$a \in \mathbb{R}^{>0}$, sabit bir sayı olsun.

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $f(q) = a^q$ olarak tanımlansın. (Aslında f fonksiyonu değerlerini $\mathbb{R}^{>0}$ kümesinde alır; ama bunun önemi olmayacak.) f'yi $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden (aslında $\mathbb{R}^{>0}$ kümesine giden) ve gene sürekli olan bir fonksiyona genişletmek istiyoruz. Bunu yapmak için dört olguya ihtiyacımız olacak:

1) f sürekli bir fonksiyondur.

2) Eğer $(q_n)_n$, terimleri kesirli sayılar olan bir Cauchy dizisiyse, $(f(q_n))_n$ de bir Cauchy dizisidir. (Her sürekli fonksiyonun bu özelliği olmayabilir; bkz. Örnek 42.3. Bu özelliği olan sürekli bir fonksiyona ***Cauchy-sürekli*** denir ve Cauchy sürekli fonksiyonlar süreklidirler. Bkz. Bölüm 48.6.)

3) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de yoğundur, yani herhangi iki gerçel sayı arasında kesirli bir sayı vardır. Bunun bir başka eşdeğer ifadesi, her gerçel sayıya yakınsayan bir kesirli sayı dizisinin varlığıdır.

Üçüncü olgunun doğruluğunu Teorem 3.10'dan biliyoruz, ama ilk iki olgunun kanıtlanması gerekiyor. Gereksineceğimiz dördüncü olgu ise "teorem" adını fazlasıyla hakediyor:

Teorem 49.1. *A, $\mathbb{R}$'nin yoğun bir altkümesi ve*

$$f : A \to \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca eğer $(a_n)_n$, terimleri A'da olan bir Cauchy dizisiyse, $(f(a_n))_n$ de bir Cauchy dizisi olsun. (Yani f ayrıca Cauchy-sürekli olsun.) O zaman, $g_{|A} = f$ eşitliğinin sağlandığı bir ve bir tane

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyonu vardır. Ayrıca eğer r herhangi bir gerçel sayıysa ve terimleri A'dan olan $(a_n)_n$ sayı dizisi r'ye yakınsıyorsa, o zaman

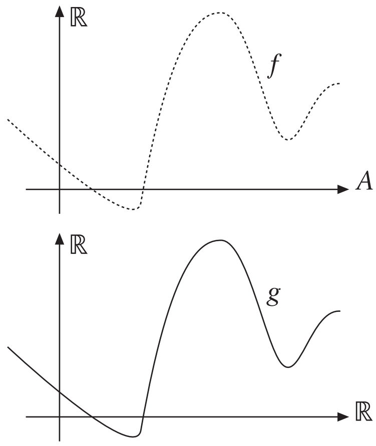
$$g(r) = \lim_{n \to \infty} f(a_n)$$

olur.

A, $\mathbb{R}$'de ***yoğun*** demek, $\mathbb{R}$'nin herhangi iki değişik elemanının arasında A'dan bir eleman var demektir; ya da her $x \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in A$ var demektir; ya da verilmiş her gerçel sayıya yakınsayan terimleri A'dan seçilmiş bir sayı dizisi var demektir.

Bir sonraki şekil teoremi görselleştiriyor.

Teoremdeki g fonksiyonunun (eğer varsa) bir tane olduğunu kanıtlamak pek zor değil, hemen kanıtlayalım:



Teorem 49.2. *Eğer* $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}$*'ye giden iki sürekli fonksiyon* $\mathbb{R}$*'nin yoğun bir altkümesinde birbirlerine eşitlerse, o zaman bu iki fonksiyon her yerde eşittir.*

Kanıt: Eğer g_1 ve g_2, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden iki sürekli fonksiyonsa ve $\mathbb{R}$'nin yoğun bir altkümesinde birbirlerine eşitlerse, o zaman $g_1 - g_2$ olarak tanımlanan h fonksiyonu $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve $\mathbb{R}$'nin yoğun bir altkümesinde sabit 0 değeri alan bir fonksiyondur. h'nin $\mathbb{R}$ üzerinde sabit 0 değeri aldığını kanıtlamak yeterli.

h'nin 0 değeri aldığı yoğun altkümeye A diyelim. $a \in \mathbb{R}$, herhangi bir gerçel sayı olsun. A, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan, terimleri A'da olan ve limiti a olan bir $(a_n)_n$ dizisi vardır. h sürekli olduğundan,

$$h(a) = h(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} h(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

olur (bkz. Teorem 45.1). Teorem 49.2 kanıtlanmıştır. □

$f(q) = a^q$ fonksiyonunun kanıtlamaya söz verdiğimiz ilk iki özelliğini kanıtlamayı bölümün sonuna bırakıp Teorem 49.1'in kanıtına girişelim.

Teorem 49.1'in Kanıtı: $x \in \mathbb{R}$ olsun. A, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan, terimleri A'da olan ve x'e yakınsayan bir $(a_n)_n$ dizisi vardır. $(a_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan bir Cauchy dizisidir. Varsayıma göre $(f(a_n))_n$ de bir Cauchy dizisidir, dolayısıyla bu dizinin $\mathbb{R}$'de bir limiti vardır. g fonksiyonunun x'teki değerini,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

olarak tanımlamak istiyoruz. Ama bunu yapmadan önce,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

değerinin, x'e yakınsayan $(a_n)_n$ dizisinin seçiminden bağımsız olduğunu, sadece ve sadece x'e göre değiştiğini kanıtlayalım; yani terimleri A kümesinden olan $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ Cauchy dizilerinin $\mathbb{R}$'deki limitleri eşitse (limitler x'e eşitse), o zaman

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

eşitliğinin doğru olması gerektiğini kanıtlayalım. [Dikkat, kanıtın burasında bir hinlik var.] Nitekim, $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizisi $\mathbb{R}$'de aynı noktaya yakınsadıklarından,

$$a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$$

dizisi de bu noktaya yakınsar (Alıştırma 1); dolayısıyla bu yeni dizi de bir Cauchy dizisidir. Varsayıma göre,

$$f(a_0), f(b_0), f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), \ldots$$

dizisi de bir Cauchy dizisidir ve $\mathbb{R}$'de bir limiti vardır. Bu dizinin altdizileri olan $(f(a_n))_n$ ve $(f(b_n))_n$ dizileri de zorunlu olarak bu limite yakınsarlar.

Demek ki

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

tanımı geçerli bir tanımdır, bu tanım, $(a_n)_n$ dizisine göre değil, sadece x'e göre değişir. $g_{|A} = f$ eşitliği, $a \in A$ için,

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a)$$

eşitliği sayesinde bariz olduğundan, iş, g'nin sürekli olduğunu kanıtlamaya kaldı. Kanıtlayalım:

$x \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun. g'nin x'te sürekli olduğunu kanıtlayacağız.

Önce şu savı kanıtlayalım:

Sav: *$x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki eğer $a \in A$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman $|g(x) - f(a)| < \varepsilon$ eşitsizliği de sağlanır.*

Sav'ın Kanıtı: x'i sabitleyelim. Diyelim sav yanlış. O zaman öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki, her $n > 0$ doğal sayısı için,

$$\text{hem } |x - a_n| < 1/n \text{ hem de } |g(x) - f(a_n)| \geq \varepsilon$$

eşitsizliklerinin sağlandığı bir $a_n \in A$ sayısı bulunur. Ama o zaman da A'nın $(a_n)_n$ dizisi x'e yakınsar ama $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ olmaz. Bu da g'nin tanımıyla çelişir. Sav kanıtlanmıştır. □

Şimdi g'nin sürekli olduğunu kanıtlayabiliriz.

Birinci Kanıt: $x \in \mathbb{R}$ olsun. $(x_n)_n$, x'e yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Bir n göstergecini sabitleyelim. Sav'a göre, her $k > 0$ tamsayısı için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $a \in A$ sayısı

$$|x_n - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman

$$|g(x_n) - f(a)| < 1/k$$

eşitsizliği de sağlanır. A yoğun olduğundan, hem

$$|x_n - a_{n,k}| < \min\{\delta, 1/k\}$$

hem de

$$|g(x_n) - f(a_{n,k})| < 1/k$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $a_{n,k} \in A$ vardır. Şimdi $(a_{n,n})_n$ dizisine bakalım. $|x_n - a_{n,n}| < 1/n$ olduğundan, yani

$$x_n - 1/n < a_{n,n} < x_n + 1/n$$

olduğundan, Sandviç Teoremi'ne göre,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,n} = x$$

olur. Bundan ve g'nin tanımından da

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_{n,n})$$

çıkar. Öte yandan $|g(x_n) - f(a_{n,n})| < 1/n$, yani

$$f(a_{n,n}) - 1/n < g(x_n) < f(a_{n,n}) + 1/n$$

olduğundan, gene Sandviç Teoremi'ne göre,

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_{n,n}) = g(x)$$

elde edilir. Teorem 1 kanıtlanmıştır.

İkinci Kanıt: (Bizim tercihimiz birinci kanıttan yana, ama çeşit çeşit zevk var.) $x \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $\delta > 0$, yukardaki savdaki gibi olsun, ama δ sayısı ε için değil de $\varepsilon/2$ için seçilmiş olsun, yani eğer $a \in A$ sayısı

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman

$$|g(x) - f(a)| < \varepsilon/2$$

eşitsizliği sağlansın. Her

$$y \in (x - \delta/2, x + \delta/2)$$

için,

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini kanıtlayarak teoremin kanıtını bitirmek istiyoruz. Diyelim bu doğru değil. O zaman

$$|x - y| < \delta/2$$

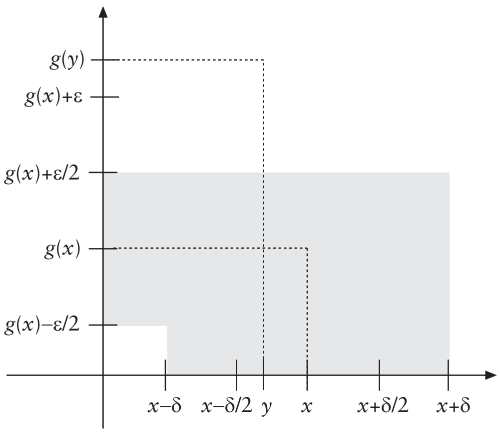
ve

$$|g(x) - g(y)| \geq \varepsilon$$

eşitsizliklerini sağlayan bir y sayısı vardır. Diyelim,

$$g(y) \geq g(x) + \varepsilon.$$

(Bkz. aşağıdaki şekil. Diğer durumun kanıtı benzerdir.)



O zaman, eğer $a \in A$ sayısı, y'nin en fazla $\delta/2$ kadar yakınındaysa,

$$|x - a| \le |x - y| + |y - a| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

olduğundan,

$$|g(x) - f(a)| < \varepsilon/2$$

eşitsizliği sağlanmalı, dolayısıyla,

$$f(a) < g(x) + \varepsilon/2 < g(x) + \varepsilon \le g(y)$$

olmalı. Ama o zaman da,

$$\begin{aligned} |g(y) - f(a)| &= g(y) - f(a) \\ &> g(y) - (g(x) + \varepsilon/2) \\ &\ge g(x) + \varepsilon - (g(x) + \varepsilon/2) = \varepsilon/2 \end{aligned}$$

olur. Demek ki her $a \in A$ sayısı için, eğer

$$|y - a| < \delta/2$$

ise,

$$|g(y) - f(a)| \ge \varepsilon/2$$

eşitsizliğini kanıtladık. Bu da g'nin tanımıyla bariz bir çelişkidir. Teorem 49.1 ikinci kez kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

f ve g, Teorem 49.1'deki gibi olsunlar.

1. f sabit fonksiyonsa g'nin de sabit olduğunu kanıtlayın.

2. f sınırlı bir fonksiyonsa g'nin de sınırlı olduğunu ve sınırların değişmediğini kanıtlatın.

3. f artansa g'nin de artan olduğunu kanıtlayın.

49.2. Gerçel Sayılarda Üs Almaya Doğru

Şimdi en sona bıraktığımız ilk iki olguyu kanıtlayalım.

Teorem 49.3. *$a \in \mathbb{R}^{>0}$, sabit bir sayı olsun.*

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{>0}$$

fonksiyonu $f(q) = a^q$ olarak tanımlansın. O zaman

i) *f süreklidir.*

ii) *Eğer $(q_n)_n$, terimleri kesirli sayılar olan bir Cauchy dizisiyse, $(f(q_n))_n$ de bir Cauchy dizisidir.*

Teorem 49.1 ve 49.3 sayesinde, her $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ve her $b \in \mathbb{R}$ için, a^b olarak gösterilen, daha önce bildiğimiz güç alma fonksiyonuyla uyumlu olan ve b'ye göre sürekli bir fonksiyona sahip oluruz.

Teorem 49.3'ün Kanıtı: i) Bir an için f'nin 0'da sürekli olduğunu varsayalım. $p \in \mathbb{Q}$, herhangi bir kesirli sayı olsun. f'nin p'de de sürekli olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ olsun. f, 0'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $|q| < \delta$ ise,

$$|1 - a^q| = |a^0 - a^q| = |f(0) - f(q)| < \varepsilon/a^p$$

olur. Şimdi $q \in \mathbb{Q}$ kesirli sayısı, $|q - p| < \delta$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman,

$$\begin{aligned}|f(p) - f(q)| = |a^p - a^q| &= |a^p - a^{p+(q-p)}|\\ &= a^p|1 - a^{(q-p)}| < \varepsilon\end{aligned}$$

olur, yani f, p'de de süreklidir. Demek ki f'nin 0'da sürekli olduğunu kanıtlamak yeterli.

Eğer $a = 1$ ise, f, sabit 1 fonksiyonu olduğundan f elbette süreklidir. Bundan böyle a'nın 1 olmadığını varsayalım.

Bir an için, eğer $a < 1$ ise f'nin sürekli olduğunu bildiğimizi varsayalım. O zaman $a > 1$ ise de f'nin sürekli olduğunu gösterelim. $a > 1$ ve $b = 1/a$ olsun. O zaman $b < 1$ olur. Demek ki, varsayıma göre,

$$g(q) = b^q$$

olarak tanımlanan

$$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{>0}$$

fonksiyonu süreklidir. Öte yandan,

$$f(q) = a^q = (1/b)^q = 1/b^q = 1/g(q)$$

olduğundan, yani $f = 1/g$ olduğundan, f de süreklidir (bkz. Teorem 43.9). Demek ki bundan böyle

$$0 < a < 1$$

eşitsizliklerini varsayabiliriz. Varsayalım.

f'nin 0'da sürekli olduğunu kanıtlamamız gerektiğini anımsatalım. Meşhur $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer q kesirli sayısı $|q| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, $|1 - a^q| < \varepsilon$ olacak. ε'u 1'den küçük almanın hiçbir mahsuru olamaz; öyle yapalım. Demek ki

$$0 < 1 - \varepsilon < 1.$$

Dilediğimiz δ'yı önce pozitif q sayıları için bulacağız (ve bulacağımız bu δ'ya δ_1 diyeceğiz). ε üzerine yukarda yaptığımız varsayımdan dolayı,

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \varepsilon)^n = 0$$

olur (bkz. Teorem 8.1). Dolayısıyla bir

$$u \in \mathbb{N}$$

doğal sayısı için,

$$(1 - \varepsilon)^u < a$$

olur. $\delta_1 = 1/u$ olsun. q kesirli sayısı $0 < q < \delta_1$ eşitsizliklerini sağlasın. Demek ki,

$$1 - \varepsilon < a^{1/u} = a^{\delta_1} < a^q$$

ve

$$|1 - a^q| = 1 - a^q < \varepsilon.$$

Bu durumda istediğimiz gibi bir δ_1 bulduk. (Bir başka deyişle f'nin 0'ın sağında sürekli olduğunu kanıtladık.)

Şimdi negatif kesirli sayıları için bir $\delta_2 > 0$ bulacağız. $\varepsilon > 0$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \varepsilon)^n = \infty$$

olur. Dolayısıyla, öyle bir N vardır ki,

$$1/a < (1 + \varepsilon)^N$$

olur. $\delta_2 = 1/N$ olsun. q negatif kesirli sayısı, $-q = |q| < \delta_2$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman,

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < 1 < a^q = (1/a)^{-q} &< (1 + \varepsilon)^{-Nq} \\ &= (1 + \varepsilon)^{-q/\delta_2} = 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

olur, yani

$$1 - \varepsilon < a^q < 1 + \varepsilon,$$

yani $|1 - a^q| < \varepsilon$ olur.

Son olarak, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Eğer q, $|q| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir kesirli sayıysa,

$$|a^q - a^0| = |a^q - 1| < \varepsilon$$

olur, yani f, 0'da süreklidir.

ii) Şimdi, $(q_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. $(f(q_n))_n$ dizisinin de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ olsun. $(q_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır [bkz. Teorem 11.4]. O zaman $(f(q_n))_n$ dizisi de sınırlıdır [bkz. Teorem 4.8.i]. Her n için $f(q_n) < A$ olsun. f fonksiyonu 0'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $q \in \mathbb{Q}$ sayısı $|q| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman

$$|f(q) - 1| = |f(q) - f(0)| < \varepsilon/A$$

olur. $(q_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her $n, m > N$ için, $|q_n - q_m| < \delta$ olur. Şimdi hesap yapalım: $n, m > N$ için,

$$\begin{aligned} |f(q_n) - f(q_m)| &= |a^{q_n} - a^{q_m}| = a^{q_m}|a^{q_n - q_m} - 1| \\ &= a^{q_m}|f(q_n - q_m) - 1| \\ &\leq A|f(q_n - q_m) - 1| \\ &< A\times(\varepsilon/A) = \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da $(f(q_n))_n$ dizisinin Cauchy olduğunu gösterir. Teorem tamamıyla kanıtlanmıştır. □

Dizi Alıştırmaları

1. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri aynı sayıya yakınsıyorsa, o zaman

$$a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$$

dizisinin de aynı sayıya yakınsadığını kanıtlayın.

2. $(x_n)_n$ dizisi x'e yakınsıyorsa ve a_n sayıları,

$$|x_n - a_n| < 1/n$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman $(a_n)_n$ sayı dizisinin de x'e yakınsadığını kanıtlayın.

3. $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. Sonsuz tane n için $x_n \leq 0$ ve sonsuz tane n için $x_n \geq 0$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

eşitliğini kanıtlayın.

49.3. Gerçel Sayılarda Üs Alma

Teorem 49.1'in ve yukarda yaptıklarımızın sonucunu çıkaralım.

Sonuç 49.4. *$a > 0$ bir gerçel sayıysa, her $q \in \mathbb{Q}$ için*

$$f_a(q) = a^q$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane sürekli

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$$

fonksiyonu vardır. Eğer r herhangi bir gerçel sayıysa ve $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi r'ye yakınsıyorsa, o zaman $f_a(r)$ sayısı $(f_a(q_n))_n$ dizisinin limitidir, yani

$$f_a(r) = \lim_{n\to\infty} f_a(q_n)$$

olur. □

Sonuç 49.4'te var olduğu söyleyen f_a fonksiyonunun bir r gerçel sayısındaki imgesini a^r olarak yazacağız. Demek ki,

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}.$$

Her $r \neq 0$ için 0^r sayısını 0 olarak tanımlayacağız. 0^0, bu bölümlük tanımsız olacak. a^r sayısı "*a* ***üssü*** *r*" olarak okunur.

49.4. Üs Alma Fonksiyonunun Özellikleri

Bir üstte tanımlanan üs alma fonksiyonlarının tahmin edilen (ve ilk ve orta öğretimde sorgulanmadan kabul ettirilen) özellikleri vardır. Bu özellikleri teker teker kanıtlayalım. Bütün bu özellikler 1) kesirli sayılarda tanımlanan üs alma fonksiyonun özelliklerinden ve 2) gerçel sayılarda tanımlanan üs alma fonksiyonun tanımından çıkacaktır.

Sonuç 49.5. *Her a, $b > 0$ ve her r, s gerçel sayıları için şu özellikler doğrudur.*

i. $a^{r+s} = a^r a^s$.

ii. $a^0 = 1^r = 1$.

iii. $1/a^r = a^{-r}$.

iv. $(a^r)^s = a^{rs}$.

v. $(ab)^r = a^r b^r$.

vi. *$r \mapsto a^r$ fonksiyonu eğer $a > 1$ ise artandır, $a < 1$ ise azalandır.*

vii. *Eğer $a \neq 1$ ise*

$$r \mapsto a^r$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{R}^{>0}$ arasında bir eşlemedir.

viii. *Eğer $a > 1$ ise,*

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty,$$

eğer $a < 1$ ise,

$$\lim_{x \to \infty} a^x = 0$$

olur.

Kanıt: $(r_n)_n$ ve $(s_n)_n$, sırasıyla r'ye ve s'ye yakınsayan kesirli sayı dizileri olsun. Kanıtta yukardaki f_a yazılımını kullanmak yararlı olacak:

$$f_a(r) = a^r.\ f_a$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu ve eşitliklerin r ve s kesirli sayı olduklarında doğru olduklarını kullanacağız. [bkz. Teorem 4.8].

(**i**) Hesap ortada:

$$\begin{aligned} f_a(r)f_a(s) &= \lim_{n\to\infty} f_a(r_n)\lim_{n\to\infty} f_a(s_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_a(r_n)f_a(s_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_a(r_n + s_n) \\ &= f_a(\lim_{n\to\infty}(r_n + s_n)) \\ &= f_a(r + s) \end{aligned}$$

olur. Her eşitliğin neden doğru olduğunu okur kurcalamalıdır.

(**ii ve iii**) Kanıt okura bırakılmıştır. Aynen yukardaki gibi ele alınmalı.

(**iv**) Önce s'nin bir doğal sayı olduğunu varsayalım. O zaman, (i)'e göre (s üzerine tümevarımla), $a^{rs} = (a^r)^s$ olur, yani bu durumda eşitlik doğrudur.

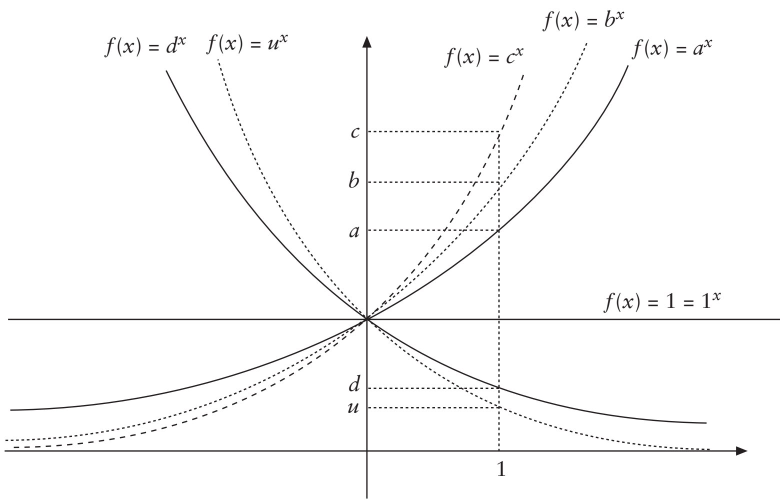
Şimdi s pozitif bir kesirli sayı olsun. u, v, pozitif doğal sayılar olmak üzere $s = u/v$ yazalım. O zaman, birinci bölüme göre,

$$(a^{rs})^v = a^{rsv} = a^{ru} = (a^r)^u$$

olur, yani

$$a^{rs} = (a^r)^{u/v} = (a^r)^s.$$

Demek ki s, pozitif bir kesirli sayı iken de eşitlik doğru. Eşitliğin her kesirli sayı için doğru olduğu (ii) ve (iii)'ten çıkar.



Şimdi s bir gerçel sayı olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} a^{rs} &= f_a(rs) = f_a(r \lim_{n\to\infty}(s_n)) \\ &= f_a(\lim_{n\to\infty}(r s_n)) = \lim_{n\to\infty} f_a(r s_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_{a^r}(s_n) = f_{a^r}(s) = (a^r)^r \end{aligned}$$

olur. (Her adımın neden doğru olduğunu kontrol edin lütfen.)

(v) Doğrudan hesap:

$$\begin{aligned} (ab)^r &= \lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} b^{r_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^r b^r. \end{aligned}$$

(vi) $a > 1$ olsun. $r \le s$ olsun. O zaman r ve s'ye yakınsayan $(r_n)_n$ ve $(s_n)_n$ dizilerini her n için

$$r_n \le s_n$$

olacak biçimde seçebiliriz ve, $a > 1$ olduğundan,

$$f_a(r) = \lim_{n\to\infty} f_a(r_n) \le \lim_{n\to\infty} f_a(s_n) = f(s)$$

elde ederiz. Eğer $a < 1$ ise kanıt benzerdir.

(vii) $a > 1$ varsayımını yapalım. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$$

olur. $b \in \mathbb{R}^{>0}$ herhangi bir sayı olsun. O zaman n ve m doğal sayıları için,

$$a^{-m} < b < a^n$$

eşitsizlikleri sağlanır. Aradeğer Teoremi'ne göre belli bir x için

$$b = a^x$$

olur. Demek ki f_a örtendir.

Şimdi f_a'nın birebir olduğunu kanıtlayalım.

$$a^r = a^s$$

olsun ama $r \ne s$ olsun. Diyelim $r < s$.

$$r < p < q < s$$

eşitliklerini sağlayan p ve q kesirli sayılarını seçelim. (vi)'dan dolayı

$$a^r \le a^p < a^q \le a^s = a^r$$

elde ederiz. Bir çelişki.

(viii) $a > 1$ varsayımını yapalım. Önerme,
$$\lim_{n \to \infty} a^n = \infty$$
eşitliğinden ve (vi)'dan çıkar. $a > 1$ durumu için 1'den büyük olan $1/a$'yı ele alın ve birinci kısımdan yararlanın. □

Alıştırmalar

1. $r \in \mathbb{R}$, sabit bir sayı olsun. $g(x) = x^r$ kuralıyla tanımlanmış $g : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin. g ne zaman bir eşleşmedir?

2. $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sabit bir sayı olsun. $(x_n)_n$, limiti olan bir dizi olsun.
$$\lim_{n\to\infty} x_n{}^r = (\lim_{n\to\infty} x_n)^r$$
eşitliğini kanıtlayın.

3. $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sabit bir sayı olsun. $(x_n)_n$, sonsuza ıraksayan bir dizi olsun.
$$\lim_{n\to\infty} x_n{}^r = \infty$$
eşitliğini kanıtlayın.

4. Eğer $a > 1$ ise,
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0,$$
eğer $a < 1$ ise,
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$$
eşitliklerini kanıtlayın.

5. $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$ limitini bulun.

6. Teorem 37.1'i kesirli p sayılarından gerçel p sayılarına genelleştirin, yani şu teoremi kanıtlayın:

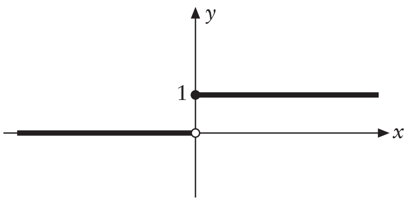
Teorem. *p gerçel bir sayı olsun. O zaman,*
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$
serisi $p > 1$ ise yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır.

50. Sağdan Soldan Limit

Örnek 42.2'ye bir daha bakalım:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu fonksiyonun grafiği şöyle:

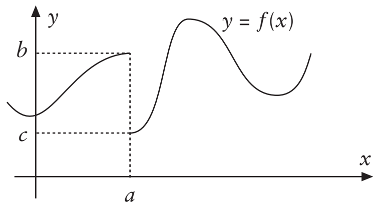


Fonksiyon 0'da sürekli değil ama belli ki bu fonksiyon 0'da o kadar da kötü davranmıyor; fonksiyon 0 dolayında soldan 0'a sağdan da 1'e yakınsıyor... Bu söylediğimizi birazdan matematikselleştireceğiz.

Öte yandan, kesirli sayılarda 1, kesirli olmayan sayılarda 0 değerini alan fonksiyon, 0'da (ve diğer noktalarda da) sürekli olmamakla kalmıyor, bir önceki fonksiyondan çok daha vahşice ve acımasızca davranıyor.

Bu bölümde, ilk örneğimizde olduğu gibi, belki süreksiz ama gene de süreksiz olduğu noktalarda ele avucu gelen fonksiyonlarla uğraşacağız.

Grafiği aşağıda olan fonksiyonu ele alalım. Fonksiyon belli ki a noktasında sürekli değil, çünkü x, a'ya giderken $f(x)$ kâh b'ye kâh c'ye yakın oluyor. Daha doğrusunu söyleyelim, x, a'ya soldan yaklaşırken $f(x)$, b'ye yaklaşıyor ama x, a'ya sağdan



yaklaşırken $f(x)$, c'ye yaklaşıyor. Buradan $f(x)$'in bir soldan bir de sağdan olmak üzere iki limiti olduğu düşüncesi doğabilir. Nitekim bu örnekte f'nin bir sol limiti bir de sağ limiti vardır.

Matematiksel tanımı yapmaya çalışalım: $A \subseteq \mathbb{R}$ bir gerçel sayılar kümesi olsun. $a \in \mathbb{R}$, A'nın bir yoğunlaşma noktası olsun. $b \in \mathbb{R}$ olsun. Ve nihayet

$$f : A \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$(a - \delta, a) \cap A$$

kümesindeki her x sayısının

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

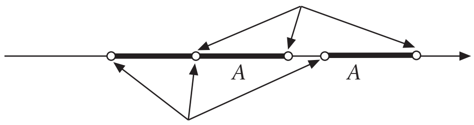
eşitsizliğini sağladığı bir $\delta > 0$ varsa, o zaman, "x, a'ya soldan giderken $f(x)$'in ***limiti*** b'dir" ya da "$f(x)$'in a'da soldan limiti b'dir" denir.

Ama bu tanımda bir şey eksik. Çünkü a, A'nın bir yoğunlaşma noktası olabilir ama pozitif bir δ için $(a - \delta, a) \cap A$ kümesi boşküme olabilir ve bu durumda her b sayısı f'nin a'da soldan limiti olur. Bunu kabul edilemez bir durum olarak addettiğimizden a ile A arasındaki ilişkiyi düzeltmeliyiz.

Eğer her $\delta > 0$ için $(a - \delta, a) \cap A \neq \emptyset$ oluyorsa, bu durumda a'ya A'nın ***sağındaki yoğunlaşma*** noktası diyelim. Örneğin 1 sayısı $(0, 1)$ aralığının sağında bir yoğunlaşma noktasıdır ama solunda bir yoğunlaşma noktası değildir. 0, 1, 3 ve 4 noktaları

$$(0, 1) \cup (1, 2) \cup (3, 5)$$

kümesinin soldan yoğunlaşma noktalarıdır; 1 ve 5 aynı zamanda sağdan yoğunlaşma noktasıdır. Her soldan yoğunlaşma nok-



tası bir yoğunlaşma noktasıdır ama bunun tersi doğru değidir. Şimdi tanımı verebiliriz:

Tanım: $A \subseteq \mathbb{R}$ bir gerçel sayılar kümesi olsun. $a \in \mathbb{R}$, A'nın sağında bir yoğunlaşma noktası olsun. $b \in \mathbb{R}$ olsun. Ve nihayet

$$f : A \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$(a - \delta, a) \cap A$$

kümesindeki her x sayısının

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağladığı bir $\delta > 0$ varsa, o zaman, "x, a'ya soldan giderken $f(x)$'in ***limiti*** b'dir" ya da "$f(x)$'in a'da soldan limiti b'dir" denir.

Yani x, a'ya giderken $f(x)$'in soldan limitinin b olması için, her pozitif ε sayısı için öyle bir pozitif δ sayısı olmalı ki,

$$x \in (a - \delta, a) \cap A$$

koşulu,

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerektirmeli.

Bu koşul daha simgesel olarak şöyle yazılır:

$$\forall \varepsilon{>}0\ \exists \delta{>}0\ \forall x{\in}A\ (0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Sağdan limit benzer şekilde tanımlanır.

Sağdan ve soldan limitler daha önce gördüğümüz limit kavramından pek değişik kavramlar değiller ve hemen hemen aynı özellikleri sağlarlar.

Aşağıdaki önsav ve teoremlerde, aksi belirtilmedikçe, bir f fonksiyonunun a'da soldan limiti varsa, a'nın fonksiyonun tanım kümesinin sağdan bir yoğunlaşma noktası olduğunu varsayacağız.

Önsav 50.1. *Soldan limit varsa biriciktir.*

Kanıt: Aynen Önsav 48.2 gibi. Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Önsav 50.1 sayesinde, x, a'ya soldan yaklaşırken $f(x)$'in limiti varsa, bu limiti,

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

olarak yazma hakkını kendimizde buluruz. Sağdan limit de

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

yazılır.

Önsav 50.2. *f, g ve h üç fonksiyon olsun. Tanım kümelerinin kesişimine A diyelim. a sayısı A'nın sağdan yoğunlaşma noktası olsun. Eğer f ve h'nin a'da soldan limitleri varsa ve bu limitler birbirlerine eşitlerse ve pozitif bir α sayısı için*

$$(a - \alpha, a) \cap A$$

kümesindeki her x sayısı,

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman g'nin de a'da soldan limiti vardır ve bu üç limit de birbirine eşittir.

Kanıt: f ve h'nin a'daki soldan limitlerine b diyelim. $\varepsilon > 0$ rastgele olsun.

$$\delta_1 > 0 \text{ ve } \delta_2 > 0$$

sayıları, tanım kümesindeki her $x \in A$ için,

$$0 < a - x < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ve

$$0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - b| < \varepsilon$$

önermelerini sağlasın. $\delta = \min\{\alpha, \delta_1, \delta_2\}$ olsun. O zaman,

$$0 < a - x < \delta$$

ise,

$$f(x) - b \le g(x) - b \le h(x) - b,$$

dolayısıyla

$$|g(x) - b| \le \max\{h(x) - b, -(f(x) - b)\} < \varepsilon$$

olur. Kanıt bitmiştir. □

Önsav 50.3. *f'nin 0'da sağdan limiti varsa*

$$g(x) = f(-x)$$

eşitliğiyle tanımlanan g fonksiyonunun soldan limiti vardır ve iki limit birbirine eşittir.

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Aynı önermeler sağ ile sol terimleri değiş tokuş yapıldığında da geçerlidir elbet.

Teorem 50.4. *Bir fonksiyonun bir noktada limiti olması için yeter ve gerek koşul, fonksiyonun o noktada soldan ve sağdan limiti olması ve bu limitlerin birbirine eşit olmalarıdır. Ayrıca bu durumda üç limit de birbirine eşittir, yani*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

olur.

Kanıt: Fonksiyonun bir noktada limiti varsa, fonksiyonun o noktada soldan ve sağdan limiti olduğu ve bu limitlerin eşit olduğu tanımlardan dolayı bariz.

Şimdi fonksiyonun a noktasında soldan ve sağdan limiti olduğunu ve bu limitlerin eşit olduklarını varsayalım. Sol ve sağ limitlere b diyelim. Fonksiyonun a'da limitinin b olduğunu kanıtlayacağız.

$\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. b, f'nin soldan limiti olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki,

$$(a - \delta_1, a) \cap A$$

kümesinin her x sayısı

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca b, f'nin sağdan limiti olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki,

$$(a, a + \delta_2) \cap A$$

kümesinin her x sayısı

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar. Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Elbette $\delta > 0$. Elbette $(a - \delta, a + \delta) \cap A$ kümesinin her x sayısı

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar. □

Örnek. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1.$

Burada limiti alınacak fonksiyonun tanım kümesine 0'ı dahil etmemek gerek, çünkü ifade 0'da tanımsız. Limiti almak için bir de 0'ın tanım kümesinin yoğunlaşma noktası olması gerek. Tanım kümesini $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alabiliriz örneğin.

Limiti alınacak ifadeyle oynayalım:

$$\frac{\exp x - 1}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

En sağdaki ifadenin x, 0'a giderken limitini alacağız. Doğrusu pek kolaya benzemiyor. Neyse ki ifadenin soldan ve sağdan limitini alabiliriz. Önce x'in pozitif olduğunu varsayalım. O zaman,

$$1 < \frac{\exp x - 1}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp x$$

olur. Demek ki, $x > 0$ olduğunda,

$$1 < \frac{\exp x - 1}{x} < \exp x$$

elde ederiz. Ama exp x, sürekli bir fonksiyon, dolayısıyla 0'da limiti var ve bu limit de exp 0'a, yani 1' eşit. Önsav 50.2'ye göre

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Şimdi x negatif olsun. $y = -x > 0$ olsun. O zaman,

$$\frac{\exp x - 1}{x} = \frac{\exp(-y) - 1}{-y} = \frac{\frac{1}{\exp y} - 1}{-y} = \frac{1}{\exp y}\,\frac{\exp y - 1}{y}$$

eşitliğinden ve $y > 0$ olduğundan (biraz önce yapılanlardan dolayı),

$$\exp x = \frac{1}{\exp y} < \frac{\exp x - 1}{x} < 1$$

elde ederiz. Gene Önsav 50.2'ye göre,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$$

elde ederiz.

Teorem 50.4'e göre, son iki sonuçtan,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$$

eşitliği elde edilir.

Alıştırma. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = \exp x$ eşitliğini kaeşitliğini kanıtlayın.

Limit Alıştırmaları

1a. "$|x + 3| < \delta \Rightarrow |4x - 12| < 0{,}04$" önermesini doğrulayan en büyük δ'yı bulun.

1b. Limit tanımını uygulayarak,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

eşitliğini kanıtlayın.

2. Merkezi 7 olan ve

$$\left|\sqrt{x-3}-2\right|<1$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük aralığı bulun.

3. $\lim_{x\to 2}(3x^2+4x-5)$ limitini bulun.

4. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=3$ eşitliğini kanıtlayın.

5. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x^2-x-6}$ limitini bulun.

6. $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{eğer } x\geq 3 \text{ ise} \\ 4x+1 & \text{eğer } x<3 \text{ ise}\end{cases}$ olsun.

$\lim_{x\to 3} f(x)$ limitini bulun.

7. Aşağıdaki limitleri bulun.

a. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+4}$, **b.** $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8}{x-4}$,

c. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+2}{2+4x-x^2}$, **d.** $\lim_{x\to 5}\dfrac{2x^2-3x-35}{x-5}$,

e. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^3+9x^2}{x^3+8x^2-4x-57}$

8. $f(x)=\begin{cases} 4x-2 & \text{eğer } x\geq 3 \text{ ise} \\ 2x+1 & \text{eğer } x<3 \text{ ise}\end{cases}$ olsun.

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=10$ ve $\lim_{x\to 3^-} f(x)=7$ eşitliklerini kanıtlayın.

9. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}$ ve $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}$ limitlerini bulun.

10. $a>0$ olsun. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$ limitini bulun. $a=0$ ise limit var mıdır?

11. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\exp(2x) - 1}{x} = 2$ eşitliğini kanıtlayın.

12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\exp(3x) - 1}{2x}$ limitini bulun.

13. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\exp x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ eşitliğini kanıtlayın.