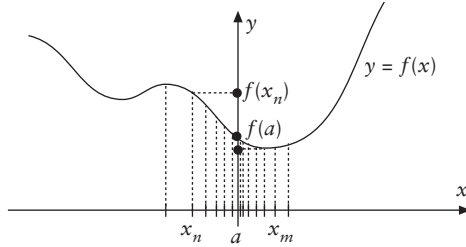


## 45. Diziler ve Süreklilik

**H**er zamanki gibi sezgilere seslenen bir giriş yapacağız. Bir  $a$  noktasında sürekli bir  $f$  fonksiyonu ele alalım. Eğer  $x$  noktası  $a$ 'ya çok yakınsa,  $f(x)$  noktası da  $f(a)$ 'ya çok yakındır. Dolayısıyla eğer bir  $(x_n)_n$  dizisi  $a$ 'ya yakınsıyorsa,



$(f(x_n))_n$  dizisinin de  $f(a)$ 'ya yakınsamasını beklemeye hakkımız var. Nitekim öyle de olur. Hatta bunun tersi de doğrudur: Bu özelliği olan her fonksiyon  $a$  noktasında sürekli dir. Yani aşağıdaki teorem sürekliliğin bir başka tanımını olarak da algılanabilir.

**Teorem 45.1.**  $a \in X \subseteq \mathbb{R}$  ve  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için aşağıdaki iki koşul eşdeğerdir:

1.  $f$  fonksiyonu  $a$ 'da süreklidir.
2.  $X$ 'in  $a$ 'ya yakınsayan her  $(x_n)_n$  dizisi için,  $(f(x_n))_n$  dizisi  $f(a)$ 'ya yakınsar.

**Kanıt:**  $(1 \Rightarrow 2)$ .  $(x_n)_n$ ,  $X$ 'te  $a$ 'ya yakınsayan bir dizi olsun.  $\varepsilon > 0$  olsun. Pozitif  $\delta$  sayısını, her  $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$  için,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

olacak biçimde seçelim. Ayrıca  $N$  sayısını, her  $n > N$  için,

$$|x_n - a| < \delta$$

olacak biçimde seçelim. O zaman, her  $n > N$  için, önce

$$|x_n - a| < \delta,$$

sonra,

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$$

olur. Demek ki  $(f(x_n))_n$  dizisi  $f(a)$ 'ya yakınsar.

$(2 \Rightarrow 1)$ .  $f$ 'nin  $a$ 'da sürekli olmadığını varsayalım. O zaman öyle bir  $\varepsilon > 0$  vardır ki,  $\delta > 0$  ne olursa olsun,  $X$ 'te,

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan ama

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlamayan, yani

$$|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir  $x$  vardır. Demek ki her  $n > 0$  doğal sayısı için,  $X$ 'te,

$$|x_n - a| < 1/n$$

ve

$$|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

eşitsizliklerini sağlayan bir  $x_n$  vardır ( $\delta = 1/n$  alın). Buradan,  $(x_n)_n$  dizisinin  $a$ 'ya yakınsadığı ama  $(f(x_n))_n$  dizisinin  $f(a)$ 'ya yakınsamadığı anlaşılır. Bir çelişki. Teorem kanıtlanmıştır.  $\square$

**Sonuç 45.2.**  $X \subseteq \mathbb{R}$  ve  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için aşağıdaki iki koşul eşdeğerdir:

1.  $f$  fonksiyonu sürekli.

2.  $x_n \in X$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$  ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

olur.  $\square$

Yani “limit alma”yla “ $f$  değerini alma” birbiriyle değişen işlemlerdir.

Öte yandan, eğer  $(x_n)_n$  bir Cauchy dizisiyse,  $f$  sürekli bile olsa,  $(f(x_n))_n$  bir Cauchy dizisi olmayabilir. Örneğin  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  olsun.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x > 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman  $f$  fonksiyonu süreklidir [sayfa 21, Örnek 3]. Şimdi  $x_n = (-1)^n/n$  olsun.  $(x_n)_n$  bir Cauchy dizisidir çünkü  $\mathbb{R}$ 'de ( $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'da değil!) limiti vardır (bu limit 0'dır.) Ama  $(f(x_n))_n$  dizisi 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... dizisidir ve elbette Cauchy dizisi değildir.

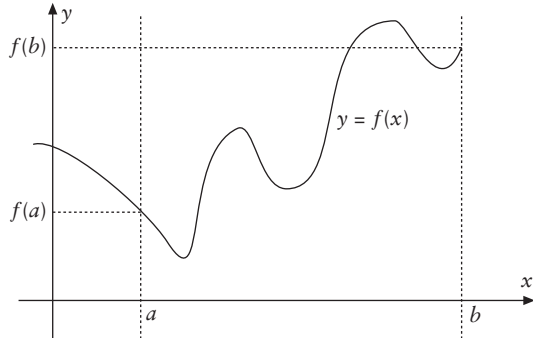
**Örnek:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{1/n} = 1$ .

**Kanıt:**  $e^{1/n} = \exp(1/n)$  ve  $\exp$  fonksiyonu (her noktada olduğu gibi) 0'da da sürekli. Demek ki,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(1/n) \\ &= \exp(\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n) = \exp 0 = 1. \end{aligned}$$

## 46. Aradeğer Teoremi

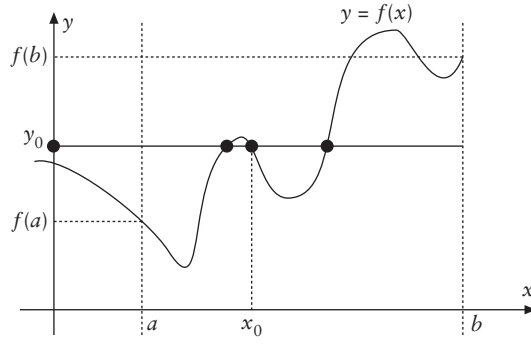
**S**ürekli bir  $f$  fonksiyonu düşünelim. Tanım kümesinde bulunan  $a < b$  sayıları için  $f(a) < f(b)$  olsun. Bu fonksiyonun temsili grafiğini çizelim:



Fonksiyonun grafiğinin düzlemde nasıl bir eğri çizdiğini tam olarak bilemeyiz elbet ama bu eğrinin, düzlemin  $(a, f(a))$  noktasından  $(b, f(b))$  noktasına kadar **kesintisiz** olarak gittiğini biliyoruz. Dolayısıyla fonksiyonun grafiği,  $y = f(a)$  ile  $y = f(b)$  yatay doğruları arasında kalan her yatay doğruyu kesmeli. Demek ki  $y_0 \in (f(a), f(b))$  ne olursa olsun,

$$f(x_0) = y_0$$

eşitliğini sağlayan bir  $x_0 \in (a, b)$  noktası olmalı. Bir sonraki şekilde temsili bir resim çizdik.



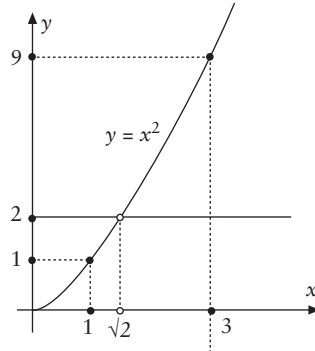
$y = y_0$  doğrusu, fonksiyonun grafiğini en az bir noktada (şekilde üç noktada) keser.

Doğruluğunu yukarda (matematiksel olarak değil) sezgisel olarak açıkladığımız bu olguya *Aradeğer Teoremi* adı verilir. Teoremi kanıtlamadan önce teoreme bir karşıörnek verelim!

**Karşıörnek 1.**  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  fonksiyonu  $f(x) = x^2$  kuralı tarafından tanımlanmış olsun. Polinomiyal olduğundan,  $f$ 'nin sürekli olduğunu biliyoruz. Şimdi  $a = 1$ ,  $b = 3$  olsun. O zaman  $f(a) = 1 < 9 = f(b)$  olur.  $y_0 = 2$  olsun.  $f(a) < 2 < f(b)$  olduğundan, yukarda söylenenlere inanacak olursak, 1'le 3 arasında

$$x_0^2 = f(x_0) = 2,$$

eşitliğini sağlayan bir  $x_0 \in \mathbb{Q}$  olmalı. Ama bunun doğru olmadığını biliyoruz, çünkü  $\sqrt{2}$ , kesirli bir sayı değildir! Demek ki Aradeğer Teoremi  $\mathbb{Q}$  için yanlış.

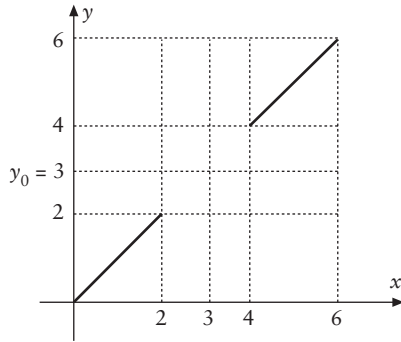


Bir başka karşıörnek daha verelim!

**Karşıörnek 2.**  $f$ ,  $(0, 2) \cup (4, 6)$  aralığından  $\mathbb{R}$ 'ye giden

$$f(x) = x$$

kuralıyla tanımlanan fonksiyon olsun.  $f$  süreklidir [Örnek 42.7 ya



da Bölüm 42, Alıştırma 2].  $a = 1$  ve  $b = 5$  olsun. O zaman

$$f(1) = 1 < 5 = f(5)$$

olur. Şimdi  $y_0 = 3$  olsun.  $1 < 3 < 5$  olmasına karşın, gene  $f(x) = 3$  eşitliğini sağlayan bir  $x$  noktası yoktur (çünkü  $x = 3$  tanım kümesinde değildir.)

Buradaki sorun da fonksiyonun  $[1, 5]$  aralığında değil de

$$(0, 2) \cup (4, 6)$$

kümesinde tanımlanmamış olması.

Her iki örnekte de sorun, fonksiyonun tanım kümesinde “delik”lerin olması. Birincisinde  $\sqrt{2}$  tanım kümesinde değil, ikincisinde ise  $[2, 4]$  aralığı tanım kümesinde değil. Sürekli fonksiyonlar sürekli olduklarından, iki değer aldıklarında bu iki değer arasındaki tüm değerleri alırlar, yeter ki tanım kümesinde delikler bulunmasın.

Aradeğer Teoremi’nin sınırlarını çizdik. Şimdi teoremi yazıp kanıtlayalım.

**Teorem 46 [Aradeğer Teoremi].**  $a \leq b$  olmak üzere

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman  $f$  fonksiyonu  $f(a)$  ile  $f(b)$  arasındaki tüm değerleri alır.

**Kanıt:** Gerekirse  $f$  yerine gene sürekli olan  $-f$  fonksiyonun olarak,

$$f(a) \leq f(b)$$

eşitsizliğini varsayabiliriz. (Teoremi  $-f$  için kanıtlarsak, teoremin  $f$  için de kanıtlanacağına ikna olun.)

$$f(a) \leq y_0 \leq f(b)$$

eşitsizliğini sağlayan bir  $y_0$  alalım. Eğer

$$y_0 = f(a) \text{ ya da } y_0 = f(b)$$

ise bu durumda önerme doğrudur. Bundan böyle

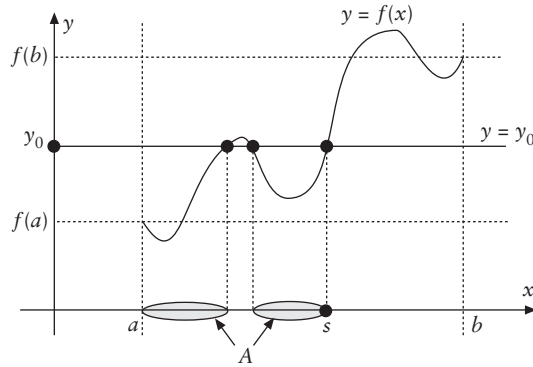
$$f(a) < y_0 < f(b)$$

eşitsizliklerini varsayalım.

$A$  kümesi şöyle tanımlansın:

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}.$$

$A$  boşküme değildir çünkü  $a$ ,  $A$ 'nın bir elemanıdır. Ayrıca  $A$  kümesi  $b$  tarafından üstten sınırlıdır. Demek ki  $A$ 'nin bir en küçük

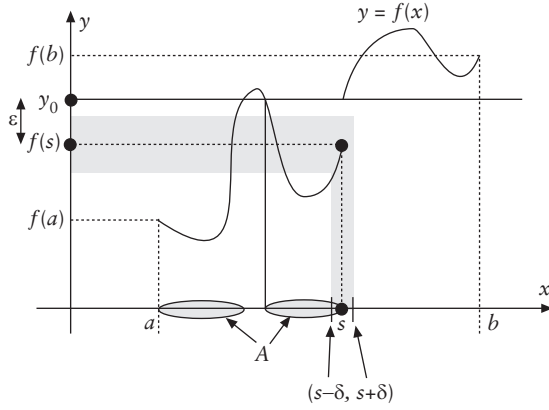


üstsınırı vardır. Bu üstsınırı  $s$  diyelim:  $s = \sup A$ . (Birinci karşı-örneğimizde böyle bir  $s$  olmayabilirdi, gerçel sayılarda çalışıyor olmamız işimize yarıyor.)

$f(s) = y_0$  eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için önce  $f(s) \geq y_0$ , sonra  $f(s) \leq y_0$  eşitsizliğini kanıtlayacağız.

**Sav 1.**  $f(s) \geq y_0$ .

**Sav 1'in Kanıtı:** Diyelim  $f(s) < y_0$ . Bu varsayımdan bir çelişki elde edeceğiz. Çelişkinin nerden kaynaklanacağını aşağıdaki şekilde göstermeye çalıştık. Okur kanıtı okurken bir yandan da göz ucuyla aşağıdaki şekle bakmalıdır.



$s = b$  olsa, o zaman  $y_0 < f(b) = f(s) < y_0$  gibi bir saçmalık elde ederiz. Demek ki  $s < b$ .

Sav'ın kanıtının anahtarı Sonuç 43.15'te kanıtlanan olgu: Sürekli bir fonksiyon bir noktada belli bir sayıdan küçük değerler alıyorsa, fonksiyon o noktanın bir komşuluğunda da o sayıdan küçük değerler alır. Bu olguyu burada tekrarlayalım:

**Olgu.**  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a \in X$  ve  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  noktasında sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer  $f(a) < c$  ise, öyle bir  $\alpha > 0$  vardır ki, her  $x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$

için  $f(x) < c$  olur.

Bu olguda,  $X$  yerine  $[a, b]$ ,  $a$  yerine  $s$  ve  $c$  yerine  $y_0$  alalım.  $f(s) < y_0$  ve  $f$  sürekli olduğundan, her

$$x \in (s - \delta, s + \delta) \cap [a, b]$$

için,

$$f(x) < y_0 \quad (1)$$

eşitsizliğin sağlandığı bir  $\delta > 0$  olduğunu buluruz. Ama  $b > s$  olduğundan,

$$(s, s + \delta) \cap [a, b] \neq \emptyset.$$

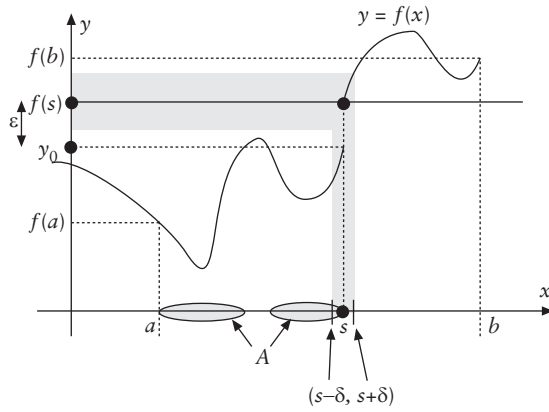
Bu keşimden bir  $x$  alırsak, (1)'den dolayı,

$$f(x) < y_0$$

olur. Öte yandan  $x > s = \sup A$  olduğundan,  $x \notin A$  olur ve  $f(x) > y_0$  eşitsizliği sağlanır. Çelişki.

**Sav 2.**  $f(s) \leq y_0$ .

**Sav 2'nin Kanıtı:** Gene bir çelişki elde etmek amacıyla  $f(s) > y_0$  eşitsizliğini varsayalım. Çelişkinin nerden kaynaklanacağını bir sonraki şekilde göstermeye çalıştık.



$s = a$  olsa, o zaman  $y_0 > f(a) = f(s) > y_0$  gibi bir saçmalık elde ederiz. Demek ki  $a < s$ .

Sav'ın kanıtının matematiksel özü Sonuç 43.16'da. Bu sonucu tekrar yazalım:

**Olgu.**  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a \in X$  ve  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  noktasında sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer  $f(a) > c$  ise, öyle bir  $\alpha > 0$  vardır ki, her

$$x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

için  $f(x) > c$  olur.

Bu olguda,  $X$  yerine  $[a, b]$ ,  $a$  yerine  $s$  ve  $c$  yerine  $y_0$  alalım.  $f(s) > y_0$  ve  $f$  sürekli olduğundan, yukardaki Olgu'ya göre öyle bir  $\delta > 0$  vardır ki, her

$$x \in (s - \delta, s + \delta) \cap [a, b]$$

için,

$$f(x) > y_0$$

olur.  $s > a$  ve  $s = \sup A$  olduğundan,

$$(s - \delta, s) \cap A \neq \emptyset$$

olur. Bu kesişimden bir  $x$  seçelim. O zaman hem

$$f(x) > y_0,$$

hem de  $(x \in A$  olduğundan),

$$f(x) \leq y_0$$

olur. Gene çelişki. Kanıtımız tamamlanmıştır.  $\square$

Aradeğer Teoremi analizin en önemli teoremlerinden biridir. Birkaç sonucunu irdeleyelim.

**Sonuç 46.1.**  $a \leq b$  olmak üzere,

$$[a, b] \subseteq X \subseteq \mathbb{R} \text{ ve } f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer  $y_0$  sayısı  $f(a)$  ile  $f(b)$  arasında-ysa,

$$f(c) = y_0$$

eşitliğini sağlayan bir  $c \in [a, b]$  vardır.

**Kanıt:** Teoremi  $f$ 'nin  $[a, b]$  aralığına kısıtlanmışına uygulamak yeterli. (Teorem 42.3'e göre  $f$ 'nin kısıtlanması da sürekli-dir.)  $\square$

**Sonuç 46.2 [Bolzano Teoremi].** Eğer sürekli bir fonksiyon bir aralıkta hem negatif hem de pozitif değerler alıyorsa 0 değerini de alır.

**Kanıt:**  $f(a) \leq 0 \leq f(b)$  ise, Sonuç 46.1'e göre  $a$  ile  $b$  arasında  $f(c) = 0$  eşitliğini sağlayan bir  $c$  vardır.  $\square$

Bölümün en başında verdiğimiz ikinci örnek, “aralık” sözcüğünü attığımızda Sonuç 46.2’nin doğru olmadığını gösteriyor.

Her ne kadar Sonuç 46.2, Aradeğer Teoremi’nin özel bir hali gibi duruyorsa da, Sonuç 46.2’den Aradeğer Teoremi’ni kanıtlamak mümkündür. Bu kanıtı verelim:

**(Bolzano Teoremi  $\Rightarrow$  Aradeğer Teoremi):**  $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$  olsun. Sürekli olduğunu bildiğimiz

$$g(x) = f(x) - y_0$$

fonksiyonunu ele alalım. O zaman  $g(a) \leq 0 \leq g(b)$  olur. Bolzano Teoremi’ne göre  $a$  ile  $b$  arasında  $g(c) = 0$  eşitliğini sağlayan bir  $c$  vardır.  $g$ ’nin tanımına geri dönersek,  $f(c) = y_0$  bulunur.  $\square$

Teoremin sonuçlarını irdelemeye devam edelim. Önce polinomlarla ilgili birkaç önemli sonuç verelim.

**Sonuç 46.3.** *Derecesi tek olan gerçel katsayılı bir polinomun gerçel sayılarda bir kökü vardır.*

**Kanıt:**  $p$ , tek dereceli bir polinom olsun.  $p$ ’yi başkatsayısına bölerek,  $p$ ’nin başkatsayısının 1 olduğunu varsayabiliriz. O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty$$

olur [bkz. Sonuç 24.12]. Demek ki, yeterince büyük bir  $b \in \mathbb{R}$  için  $p(b) > 0$  olur.  $p$ ’nin derecesi tek olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(-n) = -\infty$$

eşitliğini de kanıtlamak zor değil. Demek ki  $a \in \mathbb{R}$  için  $p(a) < 0$  olur. Sonuç 46.2’ye göre  $p$ ’nin ( $a$  ile  $b$  arasında) bir kökü vardır.  $\square$

**Örnek:** İlla bir örnek gerekiyorsa işte bir örnek:

$$x^5 - \pi x^4 + \sqrt{2}x^3 - 100x + e = 0$$

eşitliğini sağlayan bir gerçel sayı vardır.

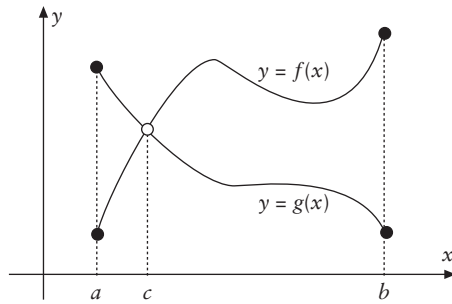
**Sonuç 46.4.**  $\mathbb{R}[X]$ 'in indirgenemez bir polinomunun derecesi ya 1 ya da çift olmak zorundadır.

Aslında, Cebirin Temel Teoremi'ne göre,  $\mathbb{R}[X]$ 'in indirgenemez polinomlarının derecesi 1 ya da 2 olmak zorundadır.

**Sonuç 46.4'ün Kanıtı:** Eğer  $f \in \mathbb{R}[X]$ , derecesi tek olan bir polinomsa, Sonuç 46.3'e göre  $f$ 'nin bir kökü vardır. Bu köke  $a$  diyelim. O zaman  $X - a$  polinomu  $f$ 'yi böler (en temel cebir bilgisi gerekiyor burada).  $f$  indirgenemez olduğundan, bundan, bir  $b \in \mathbb{R}$  için  $f(X) = b(x - a)$  çıkar. Yani  $f$ 'nin derecesi 1'dir.  $\square$

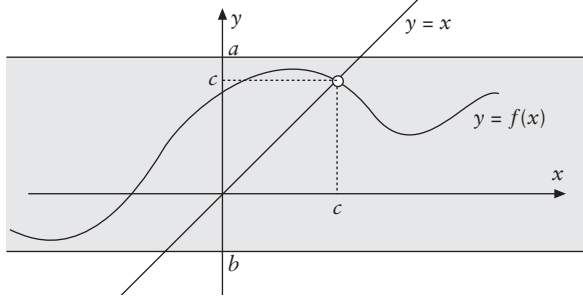
Bir sonraki teorem, kesişmeleri gereken fonksiyon grafiklerinin gerçekten kesiştiklerini söyleyecek:

**Sonuç 46.5.**  $f$  ve  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer  $f(a) \leq g(a)$  ve  $f(b) \geq g(b)$  eşitsizliklerini sağlayan  $a$  ve  $b$  gerçel sayıları varsa  $f(c) = g(c)$  eşitliğini sağlayan bir  $c$  gerçel sayısı vardır.



**Kanıt:** Sonuç 46.2'yi sürekli olduğunu bildiğimiz  $h = f - g$  fonksiyonuna ve  $a$  ve  $b$  noktalarına uygulayın.  $\square$

**Sonuç 46.6.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , üstten ve alttan sınırlı sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman bir  $c$  sayısı için  $f(c) = c$  olur.



**Kanıt:**  $a = \sup \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + 1$  ve

$$b = \inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} - 1$$

olsun. O zaman her  $x \in \mathbb{R}$  için

$$b < f(x) < a$$

olur.

$$g(x) = f(x) - x$$

olsun.  $g$ 'nin sürekli olduğunu biliyoruz. Yukardaki eşitsizliklerden dolayı

$$g(a) < 0 < g(b).$$

Şimdi Sonuç 46.2'yi  $g$ 'ye uygularsak,  $g(c) = 0$  eşitliğini sağlayan bir  $c$  sayısının varlığını görürüz.  $g$ 'nin tanımından da  $f(c) = c$  çıkar.  $\square$

**Teorem 46.7.**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun.  $I \subseteq X$  bir aralık olsun. O zaman  $f(I)$  da bir aralıktır.

**Kanıt:** Eğer  $\alpha < \beta$ ,  $f(I)$ 'dan iki eleman  $\alpha$  ve  $\beta$  arasındaki her  $\gamma$  elemanın  $f(I)$ 'da olduğunu kanıtlamamız yeterli.  $a, b \in I$  için,  $\alpha = f(a)$ ,  $\beta = f(b)$  olsun. O zaman, Aradeğer Teoremi'ne göre  $a$  ile  $b$  arasında  $f(c) = \gamma$  eşitliğini sağlayan bir  $c$  vardır.  $c$ , elbette  $I$ 'dadır, yani  $\gamma = f(c) \in f(I)$ .  $\square$

**Dikkat:** Eğer yukarda  $I$  sınırlı bir aralıksa,  $f(I)$  sınırsız bir aralık olabilir. Örnek:  $I = (0, 1)$  ve  $f(x) = 1/x$ .

Teorem 46.7 daha ileri bir düzeyde doğrudur:

- 1) Eğer  $I$  kapalı bir aralıksa,  $f(I)$  da kapalı bir aralıktır.
- 2) Eğer  $I$  kapalı ve sınırlı bir aralıksa,  $f(I)$  da kapalı ve sınırlı bir aralıktır.

3) Sürekli bir fonksiyon, kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde maksimum değerlerini alır.

Bütün bunları yakında kanıtlayacağız.

Her sürekli fonksiyonun “Aradeğer Özelliği”ni sağladığını kanıtladık. Peki Aradeğer Özelliğini sağlayan her fonksiyon sürekli midir? Yani eğer

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu her  $a < b$  ve  $f(a)$  ile  $f(b)$  arasındaki her değeri alıyorsa o zaman  $f$  sürekli olmak zorunda mıdır? Hayır değildir. Bunun standart örneği

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon Aradeğer Özelliği’ni sağlar ama 0’da sürekli değildir.

Aradeğer Teoremi’ni sağlayan fonksiyonlara *Darboux fonksiyonları* denir<sup>1</sup>.

### Alıştırmalar

1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$ ’nin görüntüsü sonlu bir kümeysse  $f$ ’nin sabit bir fonksiyon olduğunu gösterin.

2)  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  sürekli bir fonksiyon ise

$$f(x) = x$$

eşitliğini sağlayan bir  $x$  sayısının varlığını kanıtlayın.

3)  $n > 0$  bir doğal sayı ve

$$a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

olsun.

<sup>1</sup> Darboux fonksiyonlarıyla ilgili daha fazla bilgi için Zafer Ercan, Uğur Gül ve Mine Menekşe, Aradeğer Teoremi’ni sağlayan Ama Sürrekli Olmayan Fonksiyonlar, MD-2010-II, sayfa 73-76.

$$a = b^n$$

eşitliğini sağlayan bir

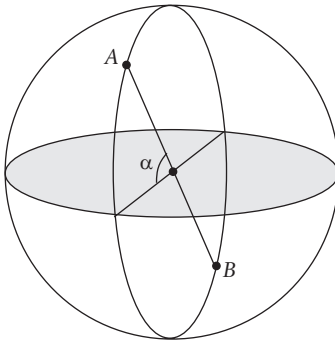
$$b \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

sayısının varlığını Aradeğer Teoremi'yle kanıtlayın, yani  $a^{1/n}$  sayısının varlığını kanıtlayın.

### Aradeğer Teoremi'nin Popüler Matematik Uygulamaları

**Popüler Teorem 1.** *Yeryüzünde, herhangi bir anda, yeryüzünün tam diğer tarafındaki noktayla aynı hava basıncında olan en az bir nokta vardır.*

**Kanıt:** Herhangi bir meridyen alalım. Bu meridyeni kesen ve dünyanın merkezinden geçen bir doğruya bakalım. Bu doğru meridyenimizi  $A$  ve  $B$  uç noktalarında kessin.  $f(A)$  ve  $f(B)$ , bu noktalardaki hava basıncı olsun. Meridyenin ekvator düzlemiyle yaptığı açı  $\alpha$  derece ise,



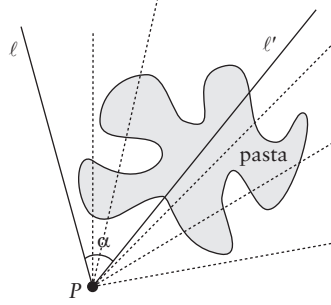
$$g(\alpha) = f(A) - f(B)$$

olsun.  $\alpha$  değiştikçe, yani doğru, dünyanın merkezi etrafında meridyenimizi hep kesecek biçimde döndüğünde,  $g(\alpha)$  değişir ama sürekli değişir, yani  $g$ ,  $[0, 360)$  aralığından  $\mathbb{R}$ 'ye giden sürekli bir fonksiyondur.

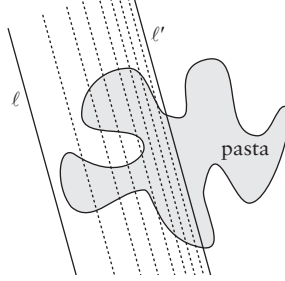
Meridyen 180 derece döndüğünde bu değer eksisine dönüşür, çünkü o zaman  $A$  noktası  $B$  noktası,  $B$  noktası da  $A$  noktası olur. Aradeğer teoreminden dolayı,  $\alpha$  ile  $\alpha + 180$  arasında  $g(\beta) = 0$  eşitliğini sağlayan bir  $\beta$  açısı vardır. Demek ki, ekvator düzlemiyle bu  $\beta$  açısını yapan doğru, meridyenimizi,  $f(A) = f(B)$  eşitliğini sağlayan  $A$  ve  $B$  uç noktalarında keser.  $\square$

**Popüler Teorem 2.** *Şekli şemali ne olursa olsun, bir pasta tek bir bıçak darbesiyle iki eşit parçaya bölünebilir.*

**Birinci Kanıt:** Pastayı kesmeyen bir  $\ell$  doğrusu seçelim. (Bkz. aşağıdaki şekil) Pasta sınırlı olduğundan böyle bir doğru vardır. Bu doğru üstünde bir  $P$  noktası seçelim. Doğruyu  $P$  noktasını sabit tutarak döndürürsek, doğru pastayı bir zaman sonra kesmeye başlar, pastayı iki parçaya ayırır. Bu parçalardan birinin hacmi 0'dan başlayarak artar, ta ki bu parça pastanın tamamı olana dek. Pastanın ve maddenin sürekli olduğunu varsayarsak, bu artış, doğrunun  $\ell'$ 'yle yaptığı  $\alpha$  açısına göre sürekli olarak değişir. Pastanın toplam hacmine 1 dersek, doğrunun kestiği parçalardan biri 0 hacimden 1 hacme kadar sürekli olarak artar, dolayısıyla bir zaman sonra  $1/2$  olmak zorundadır.



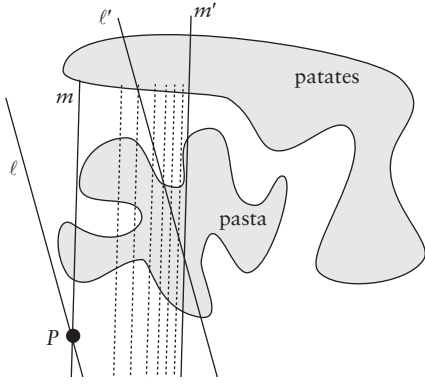
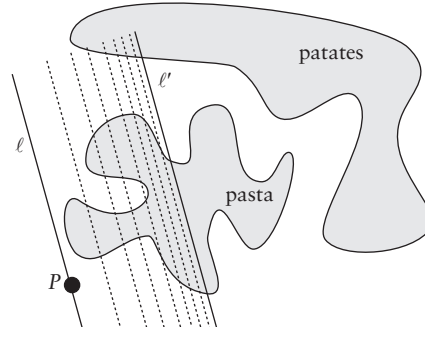
**İkinci Kanıt:** Gene pastayı kesmeyen bir  $\ell$  doğrusu seçelim ve bir sonraki şekilden takip edelim.  $\ell$  doğrusunu pastanın olduğu yöne doğru kaydıralım (öteleyelim). Kanıt bir önceki kanıt gibi devam eder. Bu kanıtta başlangıçta aldığımız doğrunun pastayı kesmemesi koşulunun gereksiz olduğuna dikkatinizi çekeriz, çünkü pasta sınırlı olduğundan, her doğru yeterince ötelenirse pastayı kesmez.  $\square$



**Popüler Teorem 3.** *Tek bir bıçak darbesiyle hem bir pasta hem de bir patates aynı anda iki eşit parçaya bölünebilir.*

**Kanıt:** Herhangi bir  $P$  noktası ve bu noktadan geçen herhangi bir  $\ell$  doğrusu seçelim.  $\ell$ 'yi öteleyerek pastayı iki eşit parçaya bölebileceğimizi biliyoruz. Muhtemelen, pastayı tam ortadan ikiye bölen bu doğru, patatesi iki eşit parçaya ayırmamıştır. Şimdi  $P$  noktasını sabit alarak  $\ell$  doğrusunu hafifçe döndürelim.

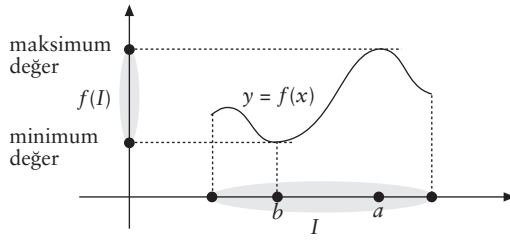
Elde ettiğimiz yeni doğruya  $m$  adını verip, aynen yukardaki gibi,  $m$ 'yi öteleyerek pastayı iki eşit parçaya ayıralım. Bu da patatesi iki eşit parçaya ayırmayabilir. Doğruları  $P$  noktası etrafında döndürmeye devam edelim. Açı değiştikçe, pastayı iki eşit parçaya ayıran doğrular patatesi de değişik oranlarda bölecek. Pastayı iki eşit parçaya bölen doğruların  $\ell$  ile yaptıkları açılar 0 dereceden 180 dereceye kadar değişebileceğinden pastayı iki eşit parçaya bölen doğrulardan birinin patatesi iki eşit parçaya böleceğini kanıtlamak zor değil: Bir doğru patatesi 3'e 4 oranında bölüyorsa, 180 derece döndürülmüş doğru patatesi 4'e 3 oranında böler, dolayısıyla belli bir açıda patates iki eşit parçaya (3,5 - 3,5 oranında!) bölünmeli.  $\square$



**Alıştırma:** Yukardaki kesimlerde bıçak dikey tutulmuş ve pasta dikey darbelerle kesilmişti. Dikey olmayan kesimlere de izin verirse, hareket özgürlüğümüz 2'den (bir nokta etrafında döndürmek ve düzlemde ötelemek) 3'e çıkar (bir nokta etrafında döndürmek, düzlemde ötelemek ve bıçağın masanın düzlemiyle yaptığı açıyı değiştirmek) ve böylece hem pastayı hem patatesi hem de bir tabak makarnayı tek bir bıçak darbesiyle ikiye eşit parçalara ayırabiliriz. Afiyet olsun.

## 47. Sürekli Fonksiyonların Uç Değerleri

**A**radeğer Teoremi'nden, bir aralığın sürekli bir fonksiyon altındaki imgesinin gene bir aralık olduğunu biliyoruz; bunu Teorem 46.7'de kanıtlamıştık. Bu bölümde kapalı ve sınırlı bir aralığın sürekli bir fonksiyon altındaki imgesinin gene kapalı ve sınırlı bir aralık olduğunu göreceğiz. Bundan da



Sürekli bir fonksiyon, kapalı ve sınırlı bir  $I$  aralığında hem minimum hem de maksimum değerlerini alır. Aradeğer Teoremi'nden dolayı, fonksiyon bu uç değerler arasındaki her değeri de alır. Yani  $f(I)$  da kapalı ve sınırlı bir aralıktır.

sürekli bir fonksiyonun kapalı ve sınırlı bir aralıkta uç değerlerini (infimum ve supremum değerlerini) aldığı anlaşılır. Bu, matematiksel analizin çok kullanılan, hem teoride hem de pratikte sık sık başvurulan teoremlerden biridir.

**Teorem 47.1 [Uç Değer Teoremi].**  $I \subseteq \mathbb{R}$ , *kapalı ve sınırlı bir aralık olsun.*

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

*sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman öyle bir  $a, b \in I$  vardır ki, her  $x \in I$  için*

$$f(b) \leq f(x) \leq f(a)$$

*olur. Yani  $f(b) = \inf f(I)$  ve  $f(a) = \sup f(I)$  eşitliğini sağlayan  $a, b \in I$  sayıları vardır.*

Bu teoremi kısaca, “sürekli bir fonksiyon kapalı ve sınırlı bir aralıkta maksimum değerini alır” diye ifade edilir. Tabii bu sonuç doğruysa,  $f$  yerine  $-f$  alarak, sürekli bir fonksiyon kapalı ve sınırlı bir aralıkta minimum değerini aldığını da anlarız. Maksimum ve minimum değerlerin olduğu da böylece - üstü kapalı bir biçimde söylenmişse de - anlaşılıyor, yani kapalı ve sınırlı bir aralığın sürekli bir fonksiyon altında imgesi de sınırlıdır. Demek ki bütün bu dediklerimiz aslında şu teoremde saklı:

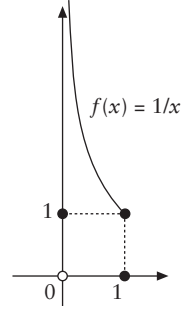
**Teorem 47.2.** *Kapalı ve sınırlı bir aralığın sürekli bir fonksiyon altındaki imgesi gene kapalı ve sınırlı bir aralıktır.*

**Sonuç 47.3.**  $X \subseteq \mathbb{R}$  bir altküme,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon ve  $I \subseteq X$ , *kapalı ve sınırlı bir aralık olsun. O zaman her  $x \in I$  için,*

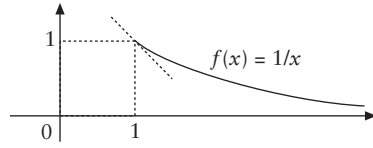
$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

*eşitsizliklerini sağlayan  $a$  ve  $b \in I$  sayıları vardır.*

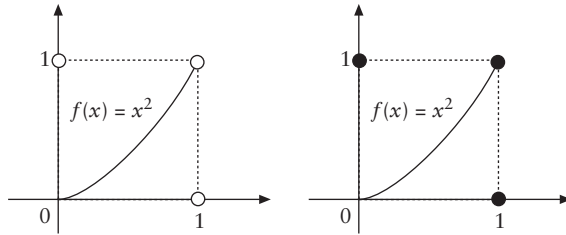
Teoremin kanıtına başlamadan önce, teoremin kapalı olmayan aralıklarda yanlış olduğunu farkedelim. Nitekim  $(0, 1]$  aralığı üstünde tanımlanmış olan  $f(x) = 1/x$  fonksiyonu sürekli dir ama üstten sınırlı değildir, değer kümesi  $[1, \infty)$  aralığıdır.



Teorem, kapalı ama sınırsız aralıklarda da yanlıştır. Örneğin yukardaki gibi  $f(x) = 1/x$  kuralıyla tanımlanan  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun imgesi kapalı olmayan  $(0, 1]$  aralığıdır.



Oldukça aydınlatıcı bir örnek de şu:  $(0, 1)$  aralığında  $f(x) = x^2$  kuralıyla tanımlanmış fonksiyon, değerlerini gene  $(0, 1)$  aralığında alır. Bu fonksiyonun değerleri 1'e çok yaklaşırlar ama



hiç 1 olmazlar (bkz. soldaki grafik.) Fonksiyon, 0 ile 1 arasında her değeri alır ama 1 değerini almaz. Bunun nedeni fonksiyonun tanım kümesinin  $(0, 1)$  açık aralığı olmasıdır. Oysa tanım kümesini  $[0, 1]$  kapalı aralığı olarak tanımlasaydık, fonksiyon maksimum değerini 1'de alacaktı:  $1^2 = 1$  (bkz. sağdaki grafik.)

**Teorem 47.2'nin Kanıtı:** Kapalı ve sınırlı aralığa  $I$ , sürekli fonksiyona da  $f$  diyelim.  $f(I)$ 'nin bir aralık olduğunu biliyoruz [bkz. Teorem 46.7].

Önce fonksiyonun, yani görüntü kümesi  $f(I)$ 'nin üstten sınırlı olduğunu kanıtlayalım.  $f(I)$ 'nin sınırlı olmadığını varsayalım. O zaman her  $n$  doğal sayısı için,  $f(x_n) > n$  eşitsizliğini sağlayan bir  $x_n \in I$  bulunur. Elbette

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

dur. Bu aşamada Bolzano-Weierstrass Teoremi'ne (Teorem 18.1) ihtiyacımız olacak.

Bolzano-Weierstrass Teoremi'ne göre  $I$  aralığı tarafından sınırlanmış olan  $(x_n)_n$  dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt diziyi  $(x'_n)_n$  diyelim.  $(f(x'_n))_n$  sonsuza ıraksadığından, bu dizinin bir alt dizisi olan  $(f(x''_n))_n$  dizisi de sonsuza ıraksar. (Neden? Bkz. Alıştırma 1.) Ama  $f$  sürekli olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n) \in \mathbb{R}$$

olur (Teorem 45.1) ki bu bir çelişkidir.

Demek ki  $f$ , yani  $f(I)$  kümesi üstten sınırlı. Aynı nedenden  $-f$  de üstten sınırlı. Bu da  $f$  alttan sınırlı demektir. Böylece  $f(I)$ 'nin sınırlı bir aralık olduğunu kanıtladık.

Şimdi  $c$ ,  $f(I)$ 'nin en küçük üst sınırı olsun.  $c$ 'nin  $f(I)$ 'da olduğunu kanıtlayacağız.

$c$ ,  $f(I)$ 'nin en küçük üst sınırı olduğundan,  $f(I)$  kümesinde  $c$ 'ye yakınsayan bir  $(y_n)_n$  dizisi vardır. Her  $n$  için  $y_n \in f(I)$  olduğundan,  $y_n = f(x_n)$  eşitliğini sağlayan  $x_n \in I$  vardır. Bolzano-Weierstrass Teoremi'ne (Teorem 18.1) göre  $I$  aralığı tarafından sınırlanmış olan  $(x_n)_n$  dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt diziyi  $(x'_n)_n$  ve limitine de  $a$  diyelim. Eğer  $I = [u, v]$  ise, her  $n$  için  $u \leq x'_n \leq v$  olduğundan, Sandviç Teoremi'ne göre (Teorem 6.1),  $u \leq a \leq v$ , yani  $a \in I$  olur. Hesap zamanı geldi:

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = f(a) \in f(I). \end{aligned}$$

Kanıtımız tamamlanmıştır.  $\square$

### Teorem 47.2'nin Yarısının Bir Başka Kanıtı

$K$ , kapalı bir aralık ve  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun.  $f(K)$ 'nin sınırlı olmadığını varsayalım. Bir  $b \in \mathbb{R}$  sabitleyelim. Her  $n$  doğal sayısı için öyle bir  $x_n \in K$  elemanı bulalım ki,  $d(f(x_n), b) \geq n$  olsun.  $K$  kapalı bir aralık olduğundan, Bolzano-Weierstrass Teoremi'ne göre  $(x_n)_n$  dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır (teorem 18.1). Bu yakınsak alt diziyi  $(x_{n_k})_k$  diyelim. Limitine de  $x$  diyelim. O zaman,  $f$  sürekli olduğun-

dan,

$$\begin{aligned} d(f(x), b) &= d(f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}), b) = d(\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}), b) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(f(x_{n_k}), b) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty. \end{aligned}$$

Bir çelişki.  $\square$

### Alıştırmalar

1. Sonsuza yakınsayan bir dizinin her altdizisinin de sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

2.  $f(x) = x^2$  kuralıyla tanımlanmış

$$f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun aldığı en küçük ve en büyük değerleri bulun.

**Popüler Teorem.** *Sabit uzunlukta bir telle, en büyük alanı kaplayacak bir dikdörtgen yapılabilir. Telin uzunluğu  $p$  ise bu en büyük alan  $p^2/16$ 'dır.*

**Kanıt:** Telin uzunluğu  $p$  olsun. Çevresi  $p$  olan bir dikdörtgenin bir kenarı  $x$  ise, diğer kenarı  $p/2 - x$ 'tir; dolayısıyla alanı

$$f(x) = x \left( \frac{p}{2} - x \right) = -x^2 + \frac{px}{2}$$

olur.  $x$ 'in değeri 0 ile  $p/2$  arasında değiştiğine göre,  $f$  fonksiyonunu  $[0, p/2]$  aralığından  $\mathbb{R}$ 'ye giden bir fonksiyon olarak görebiliriz.  $f$  sürekli olduğundan, bölümde kanıtlanan teoreme göre, kapalı ve sınırlı olan bu aralıkta  $f$  en büyük değerini alır.

$$f(p/4) = p^2/16$$

olduğundan, bu en büyük değer  $p^2/16$ 'dan küçük olamaz. Hatta fonksiyonun grafiği bir parabol olduğundan, fonksiyon en büyük değeri, 0 ile  $p/2$  olan iki kökünün

tam ortasında, yani  $x = p/4$  için alır.  $\square$

