43. Toplama, Çarpma, Sıralama ve Süreklilik

Okur mutlaka eğitim hayatı boyunca $x^2/2 + \sin x$ türünden ifadelere rastlamıştır. Bu ifade aslında $x^2/2$ ile $\sin x$ fonksiyonlarının toplamını simgelemektedir. Görüldüğü gibi sadece sayılar değil, fonksiyonlar da toplanabilir, hatta çarpılabilir. Fonksiyonlarla yapılan standart işlemleri matematiksel olarak tanımlayalım. Daha sonra bu işlemlerle süreklilik arasındaki ilişkiyi irdeleyeceğiz.

Eğer X herhangi bir kümeyse ve $f, g : X \to \mathbb{R}$ iki fonksiyonsa, gene X'ten $\mathbb{R}$'ye giden

$$f + g : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyon şu kuralla tanımlanır:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Yani $f + g$ fonksiyonunun bir $x \in X$ elemanındaki imgesini bulmak için f ve g'nin x'te aldıkları değerler toplanır.

Yukarda bir örnek verdik. Bir örnek daha verelim.

$$f(x) = x^3 + 2x$$

ve

$$g(x) = \sqrt{x}$$

olsun. Fonksiyonların kalkış kümesi olan X'i de tanımlamalıyız.

$$X = [1, \infty)$$

olsun (mesela!) O zaman,

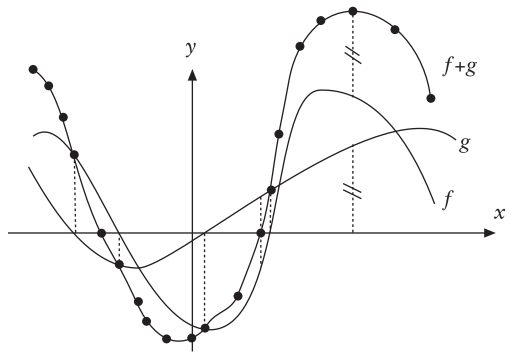
$$f + g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 2x + \sqrt{x}$$

olarak tanımlanır.

Eğer f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmişse, $f + g$ fonk-



siyonunun grafiğini çizmek oldukça kolaydır. Aşağıdaki şekildeki gibi yapılır.

Fonksiyonları çarpabiliriz de. Eğer f ve g yukardaki gibi X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyonsa, gene X'ten $\mathbb{R}$'ye giden

$$fg : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu şu kuralla tanımlanır:

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

Yani bu sefer $f(x)$ ve $g(x)$ değerlerini toplayacağımıza çarparız.

Eğer $g : X \to \mathbb{R}$, hiç 0 değerini almayan bir fonksiyonsa, o zaman her f fonksiyonunu g'ye bölebiliriz:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

Örneğin $X = \mathbb{R}$ ve $g(x) = 1 + x^2$ olabilir ve o zaman,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$$

fonksiyonunu elde ederiz.

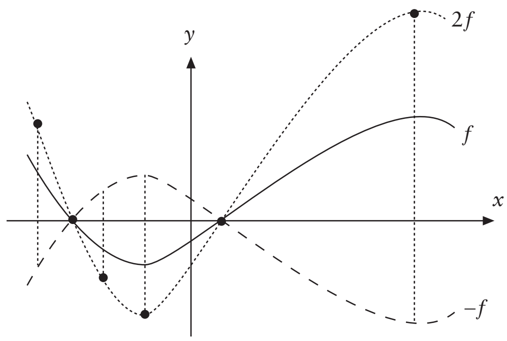
Değerleri gerçel sayı olan bir f fonksiyonunu sabit bir a sayısıyla çarpabiliriz de:

$$(af)(x) = a \cdot f(x).$$

Ayrıca, f fonksiyonu verilmişse, $-f$ fonksiyonunu $(-1)f$ olarak da tanımlayabiliriz:

$$(-f)(x) = ((-1)f)(x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x).$$

Aşağıda f'nin grafiğinden $2f$ ve $-f$'nin grafiğinin nasıl elde edilebileceğini görüyorsunuz.



Bu bölümde, süreklilikle fonksiyonların toplama ve çarpma gibi işlemleri arasındaki ilişkiyi göreceğiz. Tahmin edilebileceği gibi, süreklilik bu işlemler altında bozulmuyor. Toplamadan başlayalım.

Toplama

Teorem 43.1. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f, g : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun. O zaman $f + g$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: $\varepsilon > 0$, herhangi pozitif bir sayı olsun.

$$|(f + g)(x) - (f + g)(a)|$$

sayısının ε'dan küçük olması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiğini bulacağız. Bunun için bu ifadeyle oynayıp, ifadenin içine, x'i a'ya yakın alarak küçültebileceğimizi bildiğimiz

$$|f(x) - f(a)|$$

ve

$$|g(x) - g(a)|$$

ifadelerini sokuşturmalıyız. Hesaplarımıza başlıyoruz:

$$\begin{aligned}|(f + g)(x) - (f + g)(a)| &= |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| \\ &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\le |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|.\end{aligned}$$

En sağdaki terimi ε'dan küçük yapabilirsek işimiz iş. Ama bu işten bile değil, çünkü f ve g fonksiyonları a'da sürekli olduklarından,

$$|f(x) - f(a)| \text{ ve } |g(x) - f(a)|$$

terimlerini, x'i a'ya çok yakın seçerek $\varepsilon/2$'den küçük yapabiliriz. Nitekim, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer

$$x \in X, |x - a| < \delta_1$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki, eğer

$$x \in X, |x - a| < \delta_2$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Eğer $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Bu kanıtı kitaplarda yazdığı gibi yazalım:

Kanıt: $\varepsilon > 0$, herhangi pozitif bir sayı olsun. f fonksiyonu a'da sürekli olduğundan öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer

$$x \in X, |x - a| < \delta_1$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$$

olur. g fonksiyonu da a'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki, eğer $x \in X$, $|x - a| < \delta_2$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Eğer $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$\begin{aligned}
&|(f + g)(x) - (f + g)(a)| \\
&\quad = |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| \\
&\quad = |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\
&\quad \le |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\
&\quad < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Çarpma

Toplamayla başladık, çarpmayla devam edelim. Nasıl iki sürekli fonksiyonun toplamı da sürekli oluyorsa, iki sürekli fonksiyonun çarpımı da sürekli olur. Ama kanıt daha zordur.

Teorem 43.2. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f, g : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun. O zaman fg fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: $\varepsilon > 0$, herhangi bir pozitif sayı olsun.

$$|(fg)(x) - (fg)(a)|$$

sayısının ε'dan küçük olması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiğini bulacağız. Bunun için bu ifadeyle oynayıp, ifadenin içine, x'i a'ya yakın alarak küçültebileceğimizi bildiğimiz $|f(x) - f(a)|$ ve $|g(x) - g(a)|$ ifadelerini bir biçimde sokuşturmalıyız. Hesaplarımıza başlıyoruz:

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \\
&= |f(x)(g(x) - g(a)) + (f(x) - f(a))g(a)| \\
&\le |f(x)(g(x) - g(a))| + |(f(x) - f(a))g(a)| \\
&= |f(x)||g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)||g(a)|
\end{aligned}$$

En sağdaki terimi ε'dan küçük yapabilirsek işimiz iş... Demek ki

$$|f(x)||g(x) - g(a)| \text{ ve } |f(x) - f(a)||g(a)|$$

terimlerinin **her ikisini birden** $\varepsilon/2$'den küçük yapabilirsek istediğimize ulaşırız.

$$|f(x) - f(a)||g(a)|$$

terimini küçültmek o kadar zor değil, çünkü $|g(a)|$ sabit bir sayı ve x'i a'ya yeterince yakın seçerek $|f(x) - f(a)|$'i istediğimiz kadar küçültebiliriz. Nitekim eğer $\delta_1 > 0$ sayısı, $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta_1$ eşitsizliğini sağladığında,

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2|g(a)|}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)||g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Ama burada bir hata var, bu akıl yürütme $g(a) = 0$ ise geçerli değildir, çünkü bu durumda $|g(a)|$'ya bölemeyiz ve

$$\frac{\varepsilon}{2|g(a)|}$$

ifadesinden bahsedemeyiz. Çok önemli değil, bunun da üstesinden geliriz: $|g(a)|$'ya böleceğimize $|g(a)| + 1$'e bölelim: $\delta_1 > 0$ sayısını, x sayısı $|x - a| < \delta_1$ eşitsizliğini sağladığında,

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2(|g(a)| + 1)}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde seçelim. O zaman,

$$|f(x) - f(a)||g(a)| < \frac{\varepsilon|g(a)|}{2(|g(a)| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Böylece ikinci terimi küçülttük. Sıra geldi birinci terime, yani

$$|f(x)||g(x) - g(a)|$$

terimine. Burada $|g(x) - g(a)|$ terimini küçültebiliriz ama eğer en baştaki $|f(x)|$ terimi çok büyürse, bu iki terimin çarpımını dilediğimiz kadar küçültemeyebiliriz. Bu yüzden $|f(x)|$'in çok büyüyemeyeceğini, sınırlı kalacağını kanıtlamamız lazım, en azından, küçük de olsa, a'nın etrafındaki bir aralıkta f sınırlı kalmalı. Bu, yeni bir teoremi gerektirecek kadar önemli bir sonuçtur. (Teorem 43.2'nin kanıtına daha sonra devam edeceğiz.)

Teorem 43.3. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. O zaman öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, f fonksiyonu*

$$X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

aralığında sınırlıdır, yani

$$f(X \cap (a - \alpha, a + \alpha))$$

kümesi sınırlıdır.

Kanıt: Sürekliliğin tanımındaki ε'u 1 olarak alalım. O zaman öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, eğer $x \in X$ elemanı $|x - a| < \alpha$ eşitsizliğini sağladığında, yani

$$x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

olduğunda,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon = 1$$

olur, yani

$$f(x) \in (f(a) - 1, f(a) + 1)$$

olur. Bu da istediğimizi kanıtlar. □

Teorem 43.2'nin Kanıtının Devamı: Anımsarsanız

$$|f(x)||g(x) - g(a)|$$

terimini $\varepsilon/2$'den küçük yapmak istiyorduk ama çok büyüyebilecek olan $|f(x)|$ teriminden rahatsız olmuştuk. Neyse ki Teorem 43.3'e göre, öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, f fonksiyonu

$$X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

aralığında sınırlıdır, diyelim her

$$x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

için

$$|f(x)| < M$$

olur. Bu arada M'nin 0 olamayacağına, pozitif olmak zorunda olduğuna dikkatini çekeriz. Demek ki her

$$x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

için

$$|f(x)||g(x) - g(a)| < M|g(x) - g(a)|$$

eşitsizliği geçerli. Şimdi işimiz kolaylaştı. g fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, öyle bir δ_2 vardır ki,

$$|x - a| < \delta_2$$

eşitsizliğini sağladığında,

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

eşitsizliği de sağlanır.

Kanıtın sonuna geldik: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \alpha\}$ olsun. O zaman $\delta > 0$ olur ve

$$|x - a| < \delta$$

koşulunu sağlayan her $x \in X$ için,

$$|x - a| < \alpha$$

olduğundan,

$$|f(x)||g(x) - g(a)| < |g(x) - g(a)|$$

olur ve $|x - a| < \delta_2$ olduğundan,

$$|f(x)||g(x) - g(a)| < M|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$$

olur. Böylece $|x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için,

$$|(fg)(x) - (fg)(a)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur ve Teorem 2 kanıtlanır. Kanıtı aşağıda toparladık. □

Teorem 43.2'nin Toparlanmış Kitabi Kanıtı:

$\varepsilon > 0$, herhangi pozitif bir sayı olsun.

1. f fonksiyonu a'da sürekli olduğundan öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer $x \in X$, $|x - a| < \delta_1$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2(|g(a)| + 1)}$$

olur.

2. f fonksiyonu da a'da sürekli olduğundan, Teorem 43.3'e göre, öyle $\alpha > 0$ ve $M > 0$ sayıları vardır ki, eğer $x \in X$ sayısı $|x - a| < \alpha$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman, $|f(x)| < M$ olur.

3. g fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, öyle bir δ_2 vardır ki, $|x - a| < \delta_2$ eşitsizliğini sağladığında,

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

eşitsizliği de sağlanır.

Final: Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \alpha\}$ olsun. Eğer $x \in X$ sayısı
$$|x - a| < \delta$$
eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,
$$\begin{aligned}|(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)|\\ &= |f(x)(g(x) - g(a)) + (f(x) - f(a))g(a)|\\ &\le |f(x)||g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)||g(a)|\\ &\le M|g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)|(|g(a)| + 1)\\ &\le M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(|g(a)| + 1)}(|g(a)| + 1) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$
olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Bir Sabitle Çarpma

Bir fonksiyonu sabit bir b sayısıyla da çarpabiliriz. O zaman da süreklilik bozulmaz elbet.

Sonuç 43.4. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$, $b \in \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. O zaman bf fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: $g(x) = b$ olarak tanımlansın. O zaman $gf = bf$ olduğundan, istediğimiz sonuç, Teorem 43.2'den çıkar. □

Çıkarma

Sürekli bir fonksiyon sürekli bir fonksiyondan çıkarılınca da süreklilik bozulmaz.

Sonuç 43.5. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f, g : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun. O zaman $f - g$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: Teorem 43.1 ve Sonuç 43.4'ten, eğer $b \in \mathbb{R}$ ise $f + bg$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir. Şimdi $b = -1$ alalım. □

Polinomiyal Fonksiyonlar

Bu paragrafta yukarda kanıtladıklarımızın sonuçlarına katlanacağız.

Eğer $p(T)$ katsayıları gerçel sayılar olan bir polinomsa, yani
$$p_0, p_1, p_2, ..., p_n \in \mathbb{R}$$
gerçel sayıları için
$$p(T) = p_0 + p_1T + p_2T^2 + \cdots + p_nT^n$$
biçiminde bir ifadeyse, o zaman, p polinomu $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve
$$x \mapsto p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n$$
kuralıyla tanımlanan bir fonksiyon verir. (T değişkeni yerine x sayısı konulur.) Bu fonksiyonu p ile göstermek bir hatadır ama çoğu matematikçi bu hatayı çoğu zaman bile bile yapar. (Kimi durumlarda polinomlarla polinomların tanımladığı fonksiyonları birbirinden ayırmak elzem olabilir.) Bir polinom tarafından tanımlanan fonksiyonlara ***polinomiyal fonksiyonlar*** denir.
$$f(x) = x^2$$
kuralıyla tanımlanmış fonksiyon polinomiyaldir, ve elbette T^2 polinomu tarafından tanımlanmıştır. Özdeşlik fonksiyonu Id de polinomyaldir, T polinomu tarafından tanımlanmıştır. Sabit fonksiyonlar da polinomiyaldirler, sabit polinomlar tarafından tanımlanmıştırlar.

Gerçel katsayılı polinomlar kümesi $\mathbb{R}[T]$ olarak simgelenirler.

Sonuç 43.6. *Polinomiyal fonksiyonlar her noktada süreklidir.*

Kanıt: Örnek 42.6 ve 42.7'den dolayı sabit fonksiyonlar ve T polinomu tarafından verilen özdeşlik fonksiyonu süreklidirler. Gerisi yukarda kanıtlanan sonuçlardan kolayca çıkar. (Aslında daha matematiksel olmak istiyorsak, önce n üzerine tümevarımla T^n tarafından verilen polinomiyal fonksiyonların sürekli olduklarını, ardından polinomların dereceleri üzerine tümevarımla polinomiyal fonksiyonların sürekli olduklarını kanıtlamak gerekir.) □

Sonuç 43.7. $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ *ve* $f : X \to \mathbb{R}$, *a noktasında sürekli* *olan bir fonksiyon olsun.*

$$p(T) \in \mathbb{R}[T]$$

olsun. O zaman

$$x \mapsto p(f(x))$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon da a noktasında süreklidir.

Kanıt: Çok basit. Okura bırakılmıştır. (Teorem 43.2'ye göre her n doğal sayısı için $x \mapsto f(x)^n$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon a noktasında süreklidir.) □

Bir sonraki bölümde aynı sonucu çok daha genel olarak kanıtlayacağız.

Bölme

Şimdi bölmeye gelelim. $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve

$$f, g : X \to \mathbb{R},$$

a noktasında sürekli iki fonksiyon olsun. f/g fonksiyonunun a'da sürekli olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Ama bu fonksiyon,

$$x \mapsto f(x)/g(x)$$

kuralıyla tanımlandığından, böyle bir fonksiyonun var olması için g'nin X'in her noktasında 0'dan değişik olması gerekir. Öyle olduğunu varsayalım.

Ayrıca f/g fonksiyonu f ile $1/g$ fonksiyonlarının çarpımı olduğundan Teorem 43.2'ye göre $1/g$'nin sürekli olduğunu kanıtlamamız yeterlidir. Böylece f'den kurtulmuş olduk. Kanıtımıza başlayalım:

$\varepsilon > 0$ olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer $x \in X$ sayısı

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| < \varepsilon$$

olsun. Eşitsizliğin solundaki ifadeyle oynamaya başlayalım:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|}.$$

Sağdaki ifadenin ε'dan küçük olması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiğini bulacağız. g fonksiyonu a'da sürekli olduğundan, x'i a'ya yeterince yakın seçerek, paydaki $|g(a) - g(x)|$ ifadeyi istediğimiz kadar küçük yapabiliriz. Ya paydadaki ifade? Paydaki $|g(a)|$ bir sorun teşkil etmiyor, ne de olsa 0'dan değişik ve sabit bir sayı. Ama $|g(x)|$ potansiyel bir tehlike, çünkü x'i aldığımız aralıkta $|g(x)|$ sayısı çok çok küçülebilir ve

$$\frac{|\,g(a) - g(x)\,|}{|\,g(x)\,||\,g(a)\,|}$$

ifadesini ayyuka çıkarabilir. Bunu engelleyebilir miyiz? Yani eğer $g(a) \neq 0$ ise ve g fonksiyonu a noktasında sürekliyse, a'nın küçük de olsa bir "komşuluğunda" g'nin 0'dan "uzak olduğunu" kanıtlayabilir miyiz? Evet!

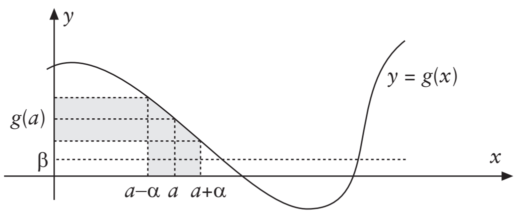
Önsav 43.8. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $g : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. Eğer $g(a) \neq 0$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ vardır ki, her*

$$x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

için,

$$|g(x)| > \beta$$

olur.



Eğer $g(a) > 0$ ise, $g(x)$, a merkezli belli bir aralıkta belli bir $\beta > 0$ sayısından daha büyüktür.

Kanıt: Aslında kanıtın anafikri oldukça açık. g fonksiyonu a'da sürekli olduğundan, a'ya yakın noktalarda $g(x)$, $g(a)$'ya çok yakındır. Ama $g(a) \neq 0$ olduğundan, a'ya çok yakın noktalarda $g(x)$'i 0'dan uzak tutabiliriz. Biçimsel kanıta geçelim:

Gerekirse g yerine $-g$ alarak $g(a)$'nın pozitif olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda, sürekliliğin tanımındaki ε'u $g(a)/2$ olarak alabiliriz. O zaman öyle bir $\delta > 0$ vardır ki,

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan her $x \in X$ için

$$|g(x) - g(a)| < g(a)/2,$$

yani

$$-g(a)/2 < g(x) - g(a) < g(a)/2,$$

olur ve bundan da,

$$g(a)/2 = g(a) - g(a)/2 < g(x),$$

yani $g(a)/2 < |g(x)|$ çıkar. Şimdi $\alpha = \delta$ ve $\beta = g(a)/2$ alalım. □

$1/g$'nin a'da sürekli olduğunun kanıtına kaldığımız yerden devam edelim. α ve β pozitif sayıları yukardaki Önsav'daki gibi olsunlar. Eğer bulacağımız δ'yı α'dan küçükeşit seçmeyi kabullenirsek,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|} < \frac{|g(a) - g(x)|}{\beta|g(a)|}$$

olur. İşimiz çok kolayladı. $\delta_1 > 0$, her

$$x \in X \cap (a - \delta_1, a + \delta_1)$$

için,

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon\beta|g(a)|$$

eşitsizliğini sağlayan bir sayı olsun. g fonksiyonu a'da sürekli olduğundan böyle bir δ_1 vardır. Demek ki $\delta = \min\{\alpha, \delta_1\}$ olarak seçersek, her

$$x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$$

için,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|} < \frac{|g(a) - g(x)|}{\beta|g(a)|} < \varepsilon$$

olur ve kanıtımız tamamlanır. Kanıtladığımız teoremi yazalım:

Teorem 43.9. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve f, $g : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$* ise, *o zaman f/g fonksiyonu da a noktasında süreklidir.* □

Sonuç 43.10. *$f(T)$, $g(T) \in \mathbb{R}[T]$ ve $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ise, o zaman, $x \in X$ için*

$$x \mapsto f(x)/g(x)$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon her noktada süreklidir.

Kanıt: Teorem 43.9'dan ve Sonuç 43.6'dan çıkar. □

Sonuç 43.11. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve f, $g : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun.*

$$Y = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$$

olsun. $a \in Y$ varsayımını yapalım. O zaman

$$f/g : Y \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu da a noktasında süreklidir.

Kanıt: Teorem 43.9'dan çıkar. □

Sıralama

Eğer f, $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları, her $x \in X$ için $f(x) < g(x)$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda,

$$f < g$$

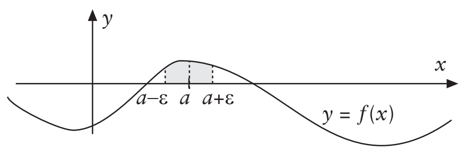
yazarız. Bu bir sıralamadır ama tamsıralama değildir, yani birbirleriyle karşılaştırılamayan fonksiyonlar olabilir.

Süreklilikle, tanımladığımız bu fonksiyon sıralaması arasında da bir ilişki vardır.

Sonuç 43.12. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $g : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. Eğer $g(a) > 0$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, g fonksiyonu*

$$X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

kümesinde hep pozitif değerler alır.



Kanıt: Önsav 43.8'in kanıtından çıkar. □

Elbette aynı sonuç "pozitif" yerine "negatif" sıfatı için de geçerlidir.

Sonuç 43.13. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $g : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. Eğer $g(a) \neq 0$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, g fonksiyonu*

$$X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

kümesinde hiç 0 olmaz.

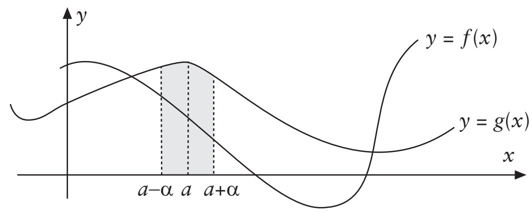
Kanıt: Sonuç 43.12'den çıkar. □

Sonuç 43.12'yi daha da genelleştirebiliriz.

Sonuç 43.14. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve f ve $g : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun. Eğer $f(a) < g(a)$ ise, öyle bir $\alpha >$ 0 vardır ki, her*

$$x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$

için $f(x) < g(x)$ olur.



Kanıt: Sonuç 12'yi, Sonuç 5'e göre a noktasında sürekli olan $g - f$ fonksiyonuna uygulamak yeterlidir. □

Sonuç 43.15. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a) < c$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, her*
$$x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$
için
$$f(x) < c$$
olur.

Kanıt: Sonuç 43.14'ü f'ye ve sabit c fonksiyonuna uygulamak yeterli. □

Benzer sonucu da yazalım:

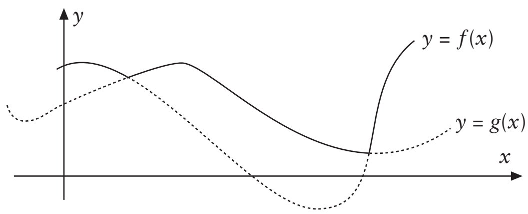
Sonuç 43.16. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a) > c$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, her*
$$x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$$
için $f(x) > c$ olur.

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Alıştırma. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her x için
$$f(x)^2 = f(x)$$
eşitliğini varsayalım. f'nin sabit bir fonksiyon olduğunu gösterin.

Max ve Min

$X \subseteq \mathbb{R}$ ve f ve $g : X \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun.
$$f \vee g : X \to \mathbb{R}$$
fonksiyonun, her $x \in X$ için,
$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
olarak tanımlayalım. Benzer şekilde,
$$f \wedge g : X \to \mathbb{R}$$
fonksiyonun, her $x \in X$ için,
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
olarak tanımlayalım.



$f \vee g$ fonksiyonu düz çizgiyle,
$f \wedge g$ fonksiyonu kesik çizgiyle belirtilmiştir.

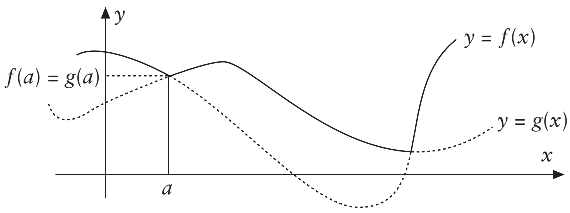
Teroem 43.17. *Eğer f ve g fonksiyonları sürekliyse, $f \vee g$ ve $f \wedge g$ fonksiyonları da süreklidir.*

Kanıt: $f \vee g$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayalım. Fonksiyonların tanım kümesine X diyelim. $a \in X$ olsun.

Eğer $f(a) > g(a)$ ise o zaman belli bir $\alpha > 0$ için, $(a - \alpha, a + \alpha) \cap A$ kümesinde $f > g$ ve dolayısıyla bu kümede $f \vee g = f$ olur. Demek ki $f \vee g$ fonksiyonu da f gibi süreklidir.

Eğer $f(a) < g(a)$ ise de kanıt benzerdir.

Şimdi $f(a) = g(a)$ varsayımını yapalım.



$\varepsilon > 0$ olsun. f sürekli olduğundan öyle $\delta_1 > 0$ vardır ki, her $x \in X \cap (a - \delta_1, a + \delta_1)$ için

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

olur. Aynı nedenden öyle $\delta_2 > 0$ vardır ki, her

$$x \in X \cap (a - \delta_2, a + \delta_2)$$

için

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

olur. Şimdi $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Herhangi bir

$$x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$$

alalım. Eğer $f(x) \geq g(x)$ ise,

$$|(f \vee g)(x) - (f \vee g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

olur, eğer $g(x) \geq f(x)$ ise,

$$|(f \vee g)(x) - (f \vee g)(a)| \leq |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

olur.

$f \wedge g$ fonksiyonu için kanıt benzerdir. □

Sonuç 43.18. *f fonksiyonu sürekliyse, $|f|$ fonksiyonu da süreklidir.*

Kanıt: $|f| = f \vee (-f)$ olduğundan, sonucumuz Teorem 43.17'nin bir sonucudur.

Süreklilik Üzerine Alıştırmalar

1 Eğer p ve q birbirine asal iki tamsayıysa, $f(p/q) = |p| + |q|$ olsun. Bu kuralla tanımlanmış olan $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun hiçbir noktada sürekli olmadığını kanıtlayın.

2. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ yukardaki gibi olsun. $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu, $g(x) = 1/f(x)$ kuralıyla tanımlansın. g fonksiyonun hiçbir noktada sürekli olmadığını kanıtlayın.

3. $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu yukardaki gibi olsun. $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu şu kuralla tanımlansın:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

h'nin 0'da sürekli olduğunu kanıtlayın. Aynı şeyi 0 yerine bir başka a sayısında yapsanız, h fonksiyonu a'da da sürekli olur mu?

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f \cdot f$ fonksiyonu sürekliyse, f fonksiyonu da sürekli midir?

5. Eğer

$$2f + 3g \text{ ve } 3f + 2g$$

fonksiyonları sürekliyse, f ve g fonksiyonlarının da sürekli olduklarını kanıtlayın.

6. $f(x) = \sqrt{x}$ formülüyle tanımlanmış

$$f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu sürekli midir?

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu sonlu sayıda değer alıyorsa, f'nin sabit fonksiyon olduğunu kanıtlayın.

8. Aşağıdaki fonksiyon sürekli midir?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{eğer } x \neq -3 \text{ ise} \\ -5 & \text{eğer } x = -3 \text{ ise} \end{cases}$$

Tadımlık Cebir

$X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. X'ten $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar kümesi Fonk(X, $\mathbb{R}$), yazının girişinde tanımladığımız toplama ve çarpma altında değişmeli bir halkadır. Bu halkanın tersinir elemanları, hiçbir noktada 0 olmayan fonksiyonlardır.

Yukarda kanıtladıklarımızdan, eğer $a \in X$ sabit bir sayıysa, a'da sürekli olan fonksiyonlar kümesinin, Fonk(X, $\mathbb{R}$) halkasının bir althalkası olduğu çıkıyor. Teorem 43.9'a göre bu althalkanın tersinir elemanları hiçbir noktada 0 olmayan ve a'da sürekli olan fonksiyonlardır.

Fonk(X, $\mathbb{R}$) aynı zamanda bir vektör uzayıdır da: Nitekim iki fonksiyonu toplayabiliriz ve bir fonksiyonu $\mathbb{R}$'nin bir elemanıyla (bir sabitle) çarpabiliriz. Sürekli fonksiyonlar kümesi, Fonk(X, $\mathbb{R}$) vektör uzayının altuzayıdır.

Demek ki Fonk(X, $\mathbb{R}$) kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerine bir cebirdir ve sürekli fonksiyonlar kümesi bu cebirin bir altcebiridir.

43A. exp Fonksiyonu Süreklidir

Geçen bölümde polinomiyal fonksiyonların sürekli olduklarını kanıtladık. Bu bölümde polinomiyal bir fonksiyon olmayan exp fonksiyonunun sürekli olduğunu göstereceğiz. (exp'in polinomiyal bir fonksiyon olmadığının kanıtı için yandaki gri kutuya bakın. O kutuda exp fonksiyonunun tüm polinomiyal fonksiyonlardan daha hızlı arttığı gösteriliyor.)

exp fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayabilmek için fonksiyonun tanımını bilmek gerekir elbette. Teorem 19.5'te

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

verdiğimiz tanımı anımsatalım:

Aslında, exp fonksiyonunun sürekli olduğu çok daha genel bir teoremin sonucudur ama o sonucun kanıtlanmasını bekleyecek kadar sabrımız yok.

Teorem 43.A.1 exp *sürekli bir fonksiyondur*.

Kanıt: Önce fonksiyonun $a = 0$ noktasında sürekli olduğunu kanıtlayalım.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, $|x| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|\exp x - \exp 0| < \varepsilon,$$

yani

$$|\exp x - 1| < \varepsilon$$

olacak. $|\exp x - 1| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanması için $|x|$'in ne kadar küçük olması gerektiğini, yani δ'nın ne olması gerektiğini bulalım. Bunu önce pozitif x sayıları için yapalım; daha sonra, aynı ε'nın negatif sayılar için de işe yaradığını göreceğiz. $x > 0$ olsun. O zaman $\exp x > \exp 0 = 1$ olur, dolayısıyla

$$|\exp x - 1| = \exp x - 1$$

olur. Şimdi, bir $x > 0$ gerçel sayısı için

$$\exp x - 1 < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için x'in ne kadar küçük olması gerektiğini bulalım. Hesaplara başlayalım:

$$\begin{aligned}\exp x - 1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = x\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i!}\right)\\ &= x\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\right) \le x\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\right) = x\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)\\ &= x\exp x.\end{aligned}$$

Bu aşamada, δ'yı 1'den küçükeşit alacağımız sözünü verelim ve bu sözü ilerde tutmaya çalışalım. O zaman, $x < \delta$ eşitsizliği sağlandığında, $x < 1$ eşitsizliği de sağlanır ve exp

$$x < \exp 1 = e$$

olur ve yukardaki hesaplardan,

$$\exp x - 1 < xe$$

çıkar. Demek ki, $\exp x - 1 < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanması için, $xe \le \varepsilon$ eşitsizliği yetiyor, yani $x \le \varepsilon/e$ olmalı. Bu arada $\delta \le 1$ sözümüzü unutmayalım. Demek ki, eğer

$$\delta = \min\{\varepsilon/e, 1\}$$

alırsak, o zaman istediğimize ulaşırız.

Yukarda pozitif sayılar için bulduğumuz δ'nın negatif sayılar için de işe yaradığını göstereceğiz. $-\delta < x < 0$ olsun. O zaman $\exp x < \exp 0 = 1$ olur. Bunu aklımızda tutalım. Ayrıca, $y = -x$

olsun. $0 < y < \delta$ olduğundan, $|1 - \exp y| < \varepsilon$ olur. Bunu da aklımızda tutalım. Bir de ayrıca

$$\exp x = \exp(-y) = (\exp y)^{-1}$$

olur [bkz. Sonuç 21.1]. Aklımızda tuttuklarımızla aşağıdaki hesapları yapalım:

$$\begin{aligned}|\exp x - 1| &= (\exp x)|1 - (\exp x)^{-1}| \\ &= (\exp x)|1 - \exp(-x)| \\ &= (\exp x)|1 - \exp y| \\ &< |1 - \exp y| < \varepsilon\end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece exp fonksiyonunun 0'da sürekli olduğu kanıtlandı.

Şimdi herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ alalım. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ seçelim. $\exp a \neq 0$ olduğundan,

$$|\exp x - \exp a| = \exp a \times \left|\frac{\exp x}{\exp a} - 1\right| = \exp a \times |\exp(x - a) - 1|$$

olur. $\delta > 0$ sayısını, $|y| < \delta$ olduğunda

$$|\exp y - 1| < \frac{\varepsilon}{\exp a}$$

olacak biçimde seçelim. O zaman, bir önceki hesaplara devam edersek, $|x - a| < \delta$ olduğunda,

$$|\exp x - \exp a| = \exp a \times \left|\frac{\exp x}{\exp a} - 1\right| = \exp a \times |\exp(x - a) - 1| < \varepsilon$$

çıkar ve böylece exp'in a noktasında sürekli olduğu kanıtlanmış olur.

Alıştırmalar

1. $\exp(\exp x) = 1$ denkleminin çözümü var mıdır?

2. $\exp(\exp x) = e$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

3. $f(x) = x\exp(x^3 + x + 1)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

4. sin ve cos fonksiyonlarının sürekli olduklarını kanıtlayın.

Exp Polinomiyal Değildir

p, derecesi d olan gerçel katsayılı bir polinom olsun. p'yi açık biçimde yazalım:

$$p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 + \cdots + p_dX^d.$$

p'yi bir $n > 0$ doğal sayısında değerlendirelim:

$$p(n) = p_0 + p_1n + p_2n^2 + \cdots + p_dn^d$$

sayısını buluruz. p'nin derecesi d olduğundan, $p_d \neq 0$'dır. Çıkan sayıyı n^d'ye bölelim:

$$\frac{p(n)}{n^d} = \frac{p_0}{n^d} + \frac{p_1}{n^{d-1}} + \cdots + \frac{p_{d-1}}{n} + p_d$$

elde ederiz. Şimdi n'yi sonsuza götürelim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^d} = p_d \neq 0$$

bulunur. Öte yandan eğer $k > d$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = 0$$

bulunur ve $k < d$ ise, p_d'nin pozitif ya da negatif oluşuna göre, bulunur. Demek ki p polinomunun derecesi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ilişkisini sağlayan **yegâne** doğal sayıdır. Dolayısıyla bir f fonksiyonunun polinomiyal olmadığını kanıtlamak için, yukarda bulduklarımızın doğru olmadığını kanıtlamak yeterlidir. Demek ki eğer her k doğal sayısı için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(n)}{n^k} = \infty$$

olduğunu kanıtlayabilirsek, o zaman exp fonksiyonunun polinomiyal bir fonksiyon olmadığını da kanıtlamış oluruz. Bunun da kanıtı kolay, çünkü her $k > 0$ doğal sayısı için şu olur:

$$\frac{\exp(n)}{n^k} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!}}{n^k} \geq \frac{\sum_{i=0}^{k+1} \frac{n^i}{i!}}{n^k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!}\frac{1}{n^{k-i}} + \frac{1}{k!} + \frac{n}{(k+1)!} \to \infty.$$

44. Fonksiyonların Bileşkesi ve Süreklilik

Bölüm 43'te fonksiyonlarla yapılan toplama, çarpma, çıkarma ve bölme gibi işlemlerin sürekliliği etkilemediğini görmüştük. Fonksiyonlarla yapılan bir başka işlem daha vardır: Bileşke almak. Anımsatalım:

$f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ iki fonksiyonsa, g ve f'nin ***bileşkesi*** olarak adlandırılan

$$g \circ f : X \to Z$$

fonksiyonu, her $x \in X$ için,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

olarak tanımlanmıştır. Örneğin,

$$X = Y = Z = \mathbb{R}$$

ise ve f ve g fonksiyonları

$$f(x) = x + 1 \text{ ve } g(x) = x^2$$

olarak tanımlanmışsa,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$$

ve

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

olur.

Burada dikkat edilmesi gereken şey, f fonksiyonunun değer kümesinin g fonksiyonunun tanım kümesi olması gerekliliğidir, yoksa $g \circ f$ fonksiyonundan söz edilemez. Öte yandan, eğer

$$f : X \to Y$$

ve

$$g : Y_1 \to Z$$

iki fonksiyonsa ve $Y \subseteq Y_1$ ise, $g(f(x))$ değeri hesaplanabileceğinden, matematikçiler gene de

$$g \circ f : X \to Z$$

fonksiyonunu, her $x \in X$ için, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ olarak tanımlamakta bir sakınca görmezler, biz de görmeyeceğiz.

Dikkat: Yukardaki örnekte olduğu gibi, $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonları eşit olmayabilirler.

Teorem 44.1. X, $Y \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$,

$$f : X \to Y \text{ ve } g : Y \to \mathbb{R}$$

iki fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu a noktasında ve g fonksiyonu $f(a)$ noktasında sürekliyse, o zaman $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında süreklidir.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon,$$

yani

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlansın. Bu da oldukça akla yakın, çünkü f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, x, a'ya yakınken $f(x)$, $f(a)$'ya yakındır ve g fonksiyonu $f(a)$'da sürekli olduğundan, $f(x)$, $f(a)$'ya yakın olduğunda, $g(f(x))$, $g(f(a))$'ya yakındır. Dolayısıyla x, a'ya yakınken $g(f(x))$, $g(f(a))$'ya yakın olur. Bu fikri uygulayalım.

g, $f(a)$'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer $y \in Y$ sayısı

$$|y - f(a)| < \delta_1$$

eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$$

olur. Bu bir.

İkincisi: f, a'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $x \in X$ sayısı

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1$$

olur. (Sürekliliğin tanımında ε yerine δ_1 alın.)

Şimdi bu ikisini birleştirelim. $x \in X$ sayısı

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlasın, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1$$

olur ve bu sayede,

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$$

olur. Kanıtımız bitmiştir. □

Sonuç 44.2. *Sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir.*

Kanıt: Teorem 44.1'in doğrudan bir sonucu. □

Sonuç 43.7'yi yukardaki teoremden çıkarabiliriz:

Sonuç 44.3. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f : X \to \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. $p(T) \in \mathbb{R}[T]$ olsun. O zaman*

$$x \mapsto p(f(x))$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon da a noktasında süreklidir.

Kanıt: Sonuç 43.6'ya göre polinomiyal fonksiyonlar süreklidir. Şimdi Teorem 1'i uygulayalım. □

Alıştırma. $a \in \mathbb{R}$, $p(T) \in \mathbb{R}[T]$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(a)$ noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. O zaman $x \mapsto f(p(x))$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon da a noktasında süreklidir.