18. d'Alembert ve Cauchy Kıstasları

18.1 d'Alembert Kıstasları

Bir serinin yakınsak olup olmadığını anlamak için en pratik yöntemlerden biri bu bölümde kanıtlayacağımız ***d'Alembert Yakınsaklık Kıstası***'dır. Örneğin bu kıstasla, yakınsaklığını kanıtlamak için Bölüm 10'te bayağı uğraştığımız $\sum x^i/i!$ serisinin yakınsaklığı kolayca kanıtlanır.

Teorem 18.1 (d'Alembert Yakınsaklık Kıstası)**.** *Eğer*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|}$$

limiti varsa ve 1*'den küçükse, o zaman* $\sum x_i$ *serisi mutlak yakınsaktır. Eğer limit varsa ve* 1*'den büyükse ya da limit sonsuzsa o zaman seri ıraksar. Eğer limit* 1*'e üstten yakınsıyorsa da seri ıraksar.*

Limit olmadığında ya da limit 1'e eşit olduğunda teoremin $\sum x_i$ serisi hakkında hiçbir ipucu vermediğine dikkatinizi çekeriz. Nitekim limit olmadığında ya da limit 1 olduğunda, seri yakınsayabilir de ıraksayabilir de.

Örnekler

18.1. $x_i = 1$ ya da $1/i$ ise bildiğimiz üzere seri ıraksar, $x_i = 1/i^2$ ise seri yakınsar (Örnek 7.10) ve her üç durumda da oranların limiti 1'dir. Demek ki limitin 1 olduğu durumda teoremin bir şey söylememesi, teoremin bir eksikliği değil, doğa öyle emrediyor. Bu arada $x_i = 1/i$ olduğunda, $\frac{x_{i+1}}{x_i} < 1$ olur ama gene de $\sum x_i$ serisi ıraksar, yani d'Alembert kıstasını kullanmak için oranların 1'den küçük olması yetmez, illa limitin 1'den küçük olması gerekir.

18.2. $a \in (-1, 1)$ olsun. $\sum a^i$ serisinin yakınsadığını biliyoruz. Bu serinin terimlerini ikişer ikişer karalım:

$$a + 1 + a^3 + a^2 + a^5 + a^4 + \cdots$$

Teorem 14.12'ye göre bu seri de yakınsar. Ama terimlerin oranı tekliğe ya da çiftliğe göre $1/a$ ya da a^3 olur ve oranlar dizisi yakınsamaz.

18.3. $k \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $|x| < 1$ ise $\sum i^k x^i$ serisi mutlak yakınsar. Nitekim bu durumda katsayıların mutlak değerlerinin oranı

$$\frac{(i+1)^k |x|^{i+1}}{i^k |x|^i} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^k |x| \longrightarrow |x| < 1$$

olur.

Teoremin son önermesinin kanıtı kolay: Eğer $|x_{i+1}/x_i|$ dizisi 1'e üstten yakınsıyorsa, yani yeterince büyük i'ler için $|x_{i+1}/x_i| \geq 1$ oluyorsa, o zaman seri ıraksar, çünkü o zaman, $(|x_i|)_i$ dizisi artar ve 0'a yakınsayamaz.

Teoremde $x_i \neq 0$ eşitsizliği gerekiyormuş gibi görünse de bu eşitsizliğin bir zaman sonra doğru olması (elbette!) yeterlidir.

Teoremi kanıtlamadan önce birkaç standart örnekle teoremin nasıl uygulanacağını gösterelim. İlerde başka örnekler de göreceğiz.

Örnekler

18.4. **[Geometrik Seri].** *$\sum x^i$ serisi $|x| < 1$ ise mutlak yakınsar. $|x| \geq 1$ ise seri ıraksar.*
Kanıt: $x_i = x^i$ olduğundan,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|x|^{i+1}}{|x|^i} = |x|$$

olur ve $x \neq \pm 1$ ise her şey teoremden çıkar. $x = \pm 1$ durumları kolay. (Ama teoremin kanıtı bu örneği kullandığından, bunu teoremin bir uygulaması olarak sunmak bilimsel ahlaksızlık sınıfına girer!) □

18.5. *$\sum x^i/i!$ serisi her x için mutlak yakınsaktır.*
Kanıt: $x_i = x^i/i!$ olduğundan,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{|x|^i}{i!}} = \lim_{i\to\infty} \frac{|x|}{i+1} = 0 < 1$$

olur ve teoreme göre seri her x için mutlak yakınsaktır. Bu seriye $\exp x$ adını vermiştik ve belli bir e gerçel sayısı ve her $x \in \mathbb{Q}$ için $\exp x = e^x$ eşitliğini kanıtlamıştık. $x \in \mathbb{R}$ için, e^x ifadesini tanımladığımızda, $\exp x = e^x$ eşitliğini her $x \in \mathbb{R}$ için de kanıtlayacağız. □

18.6. *Her x gerçel sayısı için,*

$$\cos x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \text{ ve } \sin x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

serileri mutlak yakınsaktır.
Kanıt: Aynı yöntemle kanıtlanır. Bu örneği Alıştırma 16.5'de başka bir yöntemle göstermiştik. □

18.7.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-5)^i}{3^{2i+1}(i+1)}$$

serisi yakınsak mıdır?
Çözüm: Teoremde

$$x_i = \frac{(-5)^i}{3^{2i+1}(i+1)}$$

alalım. O zaman,

$$\frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} = \frac{5^{i+1}}{3^{2i+3}(i+2)}\,\frac{3^{2i+1}(i+1)}{5^i} = \frac{5(i+1)}{3^2(i+2)} \longrightarrow \frac{5}{9} < 1$$

olur. Teoreme göre seri yakınsaktır. □

18.8. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{15^i}$ *serisi yakınsak mıdır?*

Çözüm: Teoremde $x_i = i!/15^i$ alalım. O zaman,

$$\frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} = \frac{(i+1)!}{15^{i+1}}\,\frac{15^i}{i!} = \frac{i+1}{15} \longrightarrow \infty > 1$$

olur ve teoreme göre $\sum i!/15^i$ serisi ıraksaktır.

Bir başka kanıt: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{15^i}{i!}$ serisi bilindiği üzere e^{15} sayısına yakınsar. Dolayısıyla

$$\lim_{i\to\infty} 15^i/i! = 0$$

ve buradan

$$\lim_{i\to\infty} i!/15^i = \infty$$

çıkar. Genel terimi 0'a yakınsamadığından $\sum i!/15^i$ serisi yakınsayamaz. □

18.9. $k \in \mathbb{N}$ olsun. d'Alembert kıstasına göre, eğer $|x| < 1$ ise

$$\sum_i \binom{i+k}{i} x^i$$

serisi mutlak yakınsar, eğer $|x| > 1$ ise ıraksar. $x = 1$ ise de serinin ıraksadığı belli. $x = -1$ ise de seri ıraksaktır (Alıştırma 14.8). □

Alıştırmalar

18.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterin.

18.11. $k \in \mathbb{Q}$ verilmiş olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{e^n}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterin.

18.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$ serisinin ıraksak olduğunu gösterin.

18.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ serisi hangi x sayıları için yakınsaktır?

18.14. $a \in \mathbb{Q}^{>0}$ verilmiş olsun. $\sum a^n n^a$ serisi hangi a sayıları için yakınsaktır?

Teorem 18.1'in Kanıtı: Limite ℓ diyelim ve önce $\ell < 1$ varsayımını yapalım. Her x_i yerine $|x_i|$ koyarak, terimlerin pozitif olduklarını varsayabilir ve mutlak değer işaretlerinden kurtulabiliriz.

$\ell + \epsilon < 1$ eşitsizliği geçerli olacak şekilde pozitif bir ϵ sayısı seçelim. Mesela $\epsilon = (1-\ell)/2$ olabilir.

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ell$$

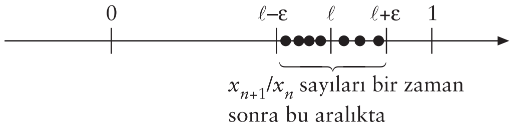
olduğundan, belli bir N göstergecinden sonra, yani her $i \geq N$ için,

$$\ell - \epsilon < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon$$

olur. (Aşağıdaki şekle bakın.) Burada önemli olan sadece, her $i \geq N$ için

$$0 < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon < 1$$

eşitsizlikleri olacak. $\ell + \epsilon$ sayısına s adını verelim.



Demek ki $0 < s < 1$ ve her $i \geq N$ için, $x_{i+1} < sx_i$. Yani,

$$\begin{aligned} x_{N+1} &< sx_N \\ x_{N+2} &< sx_{N+1} \\ x_{N+3} &< sx_{N+2} \\ &\ldots \end{aligned}$$

İlk iki eşitsizlikten,

$$x_{N+2} < sx_{N+1} < s^2 x_N$$

elde ederiz. Üçüncüsüyle birlikte

$$x_{N+3} < sx_{N+2} < s^2 x_{N+1} < s^3 x_N$$

elde ederiz. Genel olarak, kolay bir tümevarımla, her $j \geq 0$ için,

$$x_{N+j} < s^j x_N$$

elde ederiz. Şimdi, $\sum x_i$ serisinin $n > N$ için s_n kısmi toplamlarına bakalım:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{N-1} x_i + \sum_{i=N}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{N-1} + \sum_{j=0}^{n-N} x_{N+j} < \sum_{i=0}^{N-1} x_i + \sum_{j=0}^{n-N} s^j x_N \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} x_i + x_N \sum_{j=0}^{n-N} s^j = \sum_{i=0}^{N-1} x_i + x_N \frac{1 - s^{n-N+1}}{1-s} < \sum_{i=0}^{N-1} x_i + x_N \frac{1}{1-s}. \end{aligned}$$

En sondaki ifade n'den bağımsız olduğundan, böylece $(s_n)_n$ artan dizisinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlamış oluruz. Demek ki $(s_n)_n$ dizisinin limiti vardır ve $\sum x_i$ serisi mutlak yakınsaktır.

Şimdi $\ell > 1$ olsun ($\ell = \infty$ da olabilir.) Serinin yakınsak olmadığını kanıtlamak için, $(|x_n|)_n$ dizisinin limitinin 0 olamayacağını kanıtlayacağız (Teorem 14.4). Demek ki gene $x_n > 0$ varsayımını yapabiliriz.

Önce ℓ'nin bir gerçel sayı olduğunu varsayalım. $\ell - \epsilon > 1$ eşitsizliği geçerli olacak kadar küçük pozitif bir ϵ sayısı seçelim. Mesela $\epsilon = (\ell - 1)/2$ olabilir.

$$\lim_{i \to \infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ell$$

olduğundan, bir zaman sonra, yani belli bir N göstergecinden sonra, yani her $i \geq N$ için,

$$\ell - \epsilon < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon$$

olur. Burada önemli olan sadece, her $i \geq N$ için

$$1 < \ell - \epsilon < \frac{x_{i+1}}{x_i}$$

eşitsizlikleri olacak. $\ell - \epsilon$ sayısına s adını verelim. Demek ki $s > 1$ ve her $i \geq N$ için, $x_{i+1} > sx_i$.

Aynı eşitsizliklerin $\ell = \infty$ ise de geçerli olduğunu kanıtlayalım. Nitekim,

$$\lim_{i \to \infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \infty$$

olduğundan, $s > 1$ ne olursa olsun, yeterince büyük i göstergeçleri için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} > s$$

olur.

Demek ki ℓ, bir gerçel sayı da olsa, ∞ da olsa, öyle bir $s > 1$ ve N vardır ki, her $i \geq N$ için

$$x_{i+1} > sx_i$$

olur. Buradan, $i = N$ için,

$$x_{N+1} > sx_N$$

elde ederiz. Bunu ve $i = N + 1$ için elde edilen eşitsizliği birleştirerek,

$$x_{N+2} > sx_{N+1} > s^2 x_N$$

elde ederiz. Devam edecek olursak,

$$x_{N+3} > sx_{N+2} > s^2 x_{N+1} > s^3 x_N$$

elde ederiz. Genel olarak, kolay bir tümevarımla, her $j \geq 0$ için,

$$x_{N+j} > s^j x_N > x_N$$

elde ederiz. Demek ki $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsayamaz. □

Yakın gelecekte (bu bölümde) bu kıstası genelleştireceğiz. Ama önce çok kullanışlı olan bu kıstasa birkaç örnek daha verelim.

Örnekler

18.15. *$x \in \mathbb{R}$ için,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{(n+1)!} x^n$$

serisinin yakınsaklığını tartışın.

Tartışma: d'Alembert Kıstasını uygulamaya çalışalım:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3n+4}{n+2}x \to 3x.$$

Demek ki $|x| < 1/3$ ise seri yakınsar, hem de mutlak yakınsar; $|x| > 1/3$ ise seri ıraksar. Ama $|x| = 1/3$ ise d'Alembert Kıstası serinin yakınsaklığına ya da ıraksaklığına karar veremez. $x = 1/3$ durumunda $y_n = 1/n$ alarak Oran Kıyaslama Testi'ni (Sonuç 15.6) uygulayabiliriz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{3n+4}{n+2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+4}{3(n+1)(n+2)} > 0$$

olduğundan, seri $x = 1/3$ iken de ıraksar. Eğer $x = -1/3$ ise, "dalgalı bir seri"yle karşı karşıyayız. $x = -1/3$ durumunda terimler azalarak (kanıtı kolay) 0'a yakınsadığından (kanıtı zor, bkz. Örnek 19.14) Leibniz testine göre seri $x = -1/3$ iken yakınsar. □

18.16. Binom katsayılarını

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-1)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

ve binom açılımını anımsayalım:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} x^i.$$

Eğer $i > n$ ise,

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

sayısı 0'a eşit olduğundan,

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} x^i$$

yazabiliriz. Şimdi sol tarafa değil de sağ tarafa, yani

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} x^i$$

serisine bakalım. Buradaki n doğal sayısını herhangi bir α gerçel sayısı yapalım. Böylece, α'ya göre değişen

$$f_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} x^i$$

serisini elde ederiz. Elbette, α bir doğal sayı olduğunda, bu seri (sonlu bir toplam olduğundan) yakınsaktır ve her x için,

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

olur. Ve ilginç soru: Diğer α'lar için seri ne olur? Hangi x'ler $f_\alpha(x)$ serisi yakınsar? Yanıt hem şaşırtıcı hem de basit: Eğer α bir doğal sayı değilse, her $|x| < 1$ için $f_\alpha(x)$ serisi yakınsar. Bunu görmek için d'Alembert Kıstası'nı uygulamak yeterli:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \times \left|\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}\right| \\ &= \frac{|\alpha-n|}{n+1}|x| \to |x|.\end{aligned}$$

Bu seriye ikinci cildin sonuna doğru çok daha etraflıca eğileceğiz.

18.17. *Şu serinin yakınsaklığını tartışın ve yakınsak olduğunda toplamı bulun:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}.$$

Çözüm: Tabii ki her şeyden önce $x \neq \pm 1$ olmalı, yoksa terimler tanımlı değil. d'Alembert kıstasını uygulayalım.

$$x_k = \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}$$

olsun. O zaman,

$$1 - x^{2^{k+1}} = 1 - x^{2^k 2} = 1 - \left(x^{2^k}\right)^2 = \left(1 - x^{2^k}\right)\left(1 + x^{2^k}\right)$$

eşitliğini kullanarak,

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}} \frac{1-x^{2^k}}{x^{2^{k-1}}} = \frac{x^{2^{k-1}}}{1+x^{2^k}}$$

elde ederiz. Eğer $|x| < 1$ ise, bu ifadenin limiti 0'dır. Eğer $|x| > 1$ ise de 0'dır çünkü

$$\frac{x^{2^{k-1}}}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{1/x^{2^{k-1}} + x^{2^{k-1}}}$$

olur ve sağdaki ifadenin paydası sonsuza gider. Demek ki d'Alembert kıstasına göre seri her $x \neq \pm 1$ için mutlak yakınsaktır.

Serinin limitini bulmak için kısmi toplamları hesaplayalım (bkz. Örnek 14.4):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1 + \left(1 + x^{2^{k-1}}\right)}{1-x^{2^k}} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^{2^k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^{2^k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^{2^{k-1}}} = \frac{1}{1-x^{2^{1-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}.\end{aligned}$$

Demek ki eğer $|x| < 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x},$$

eğer $|x| > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x}$$

olur. □

Alıştırmalar

18.18. $\sum \frac{2^i (i!)^2}{(2i)!}$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

18.19. $\sum \frac{n}{a^n}$ serisinin yakınsak olması için a'nın sağlaması gereken koşulları bulun.

18.20.

$$\frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4i)!}{(i!)^4} \frac{1103 + 36390i}{396^i}$$

serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın[1].

[1] Bu serinin $1/\pi$ sayısına yakınsadığı 1915'te ünlü Hint matematikçi Srinivasa Ramanujan

d'Alembert Kıstası işe yaramadığı zaman, yani limit 1 olduğunda, Altbölüm 19.2'de kanıtlayacağımız Raabe Kıstası da kullanılabilir.

Teoremin kanıtına dikkatlice bakacak olursak, varsayımı tam gücüyle kullanmadığımızı görürüz. Nitekim, teoremin birinci kısmının kanıtında, yeterince büyük i'ler için,

$$\ell - \epsilon < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon < 1$$

eşitsizliklerini değil, yeterince büyük i'ler için,

$$0 < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon < 1$$

eşitsizliklerini kullandık, ve bu son koşul da birincisinden daha zayıf bir koşuldur. Velhasılı kelam, verdiğimiz kanıt, aslında daha genel bir önermenin kanıtıdır.

Teorem 18.2 (d'Alembert Yakınsaklık Kıstası 2)**.** *Eğer*

$$\limsup \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} < 1$$

ise, $\sum x_i$ *serisi mutlak yakınsaktır. Eğer*

$$\liminf \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} > 1$$

ise seri ıraksar.

Kanıt: Her x_i yerine $|x_i|$ koyarak, terimlerin pozitif olduklarını varsayıp mutlak değer işaretlerinden kurtulabiliriz.

$\limsup \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ell < 1$ olsun.

$$\ell + \epsilon < 1$$

eşitsizliği geçerli olacak şekilde pozitif bir ϵ sayısı seçelim. Mesela

$$\epsilon = \frac{1-\ell}{2}$$

olabilir. Önsav 13.5.i'e göre,

$$\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)_i$$

dizisinin sadece sonlu sayıda terimi $\ell + \epsilon$ sayısından büyüktür. Demek ki belli bir N sayısından büyükeşit i'ler için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon < 1$$

(1887-1920) tarafından anlaşılmıştır.

eşitsizliği geçerli olur. Bu aşamada kanıta aynen yukardaki teoremin kanıtındaki gibi devam edebiliriz.

Şimdi $\liminf \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ell > 1$ varsayımını yapalım. O zaman

$$\limsup \frac{x_i}{x_{i+1}} = 1/\ell < 1$$

olur. Demek ki teoremin kanıtlanan kısmına göre $\sum 1/x_i$ yakınsar ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = 0$ olur. Buradan da $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olamayacağı ve dolayısıyla $\sum x_i$ serisinin ıraksadığı çıkar. □

Teoremin ikinci kısmının lim sup için doğru olmadığı, yani $\limsup \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} > 1$ ise serinin yakınsak olabileceği Örnek 18.2'den anlaşılıyor.

Terimlerinde $n!$ gibi faktoryel olan serilerde genellikle d'Alembert Kıstası kullanılır. Bir sonraki altbölümde terimlerinde x^n gibi n'inci güçlerin belirdiği serilerde kullanılan ve d'Alembert Kıstası'ndan daha genel olan Cauchy kıstasını göreceğiz.

Alıştırmalar

18.21. $\sum_{i>0}(i^{1/i} - 1)^i$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

18.22. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in (-1, 1)$ olsun. $\sum \alpha_i^i$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

18.23. Aşağıdaki serilerin her x için yakınsak olduğunu kanıtlayın:

$$\cosh x = \sum \frac{x^{2i}}{(2i)!}\ ,\ \sinh x = \sum \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Yukarda tanımlanan $\cosh x$ ve $\sinh x$ serileri $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon tanımlarlar. Bu fonksiyonlara sırasıyla ***hiperbolik kosinüs*** ve ***hiperbolik sinüs*** adı verilir.

18.24. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:

$$\cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}\ ,\ \sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}\ ,\ \exp x = \cosh x + \sinh x.$$

18.25. Şu seriler hangi x'ler için yakınsaktır?

$$\sum \frac{2^i}{i!}x^i,\ \sum \frac{(i!)^2}{(2i)!}x^i,\ \sum i^i x^i,\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^{i-1}}{i!}x^i,\ \sum \frac{x^i}{2^i + 3^i}.$$

18.26. Önce, her n için,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} = 2^n$$

eşitliğini kanıtlayın, sonra, Cauchy çarpımı formülünü kullanarak

$$\sinh(2x) = 2\cosh x\ \sinh x$$

eşitliğini kanıtlayın.

18.2 Cauchy Kıstası (Kök Testi)

Seriler konusuna başlar başlamaz geometrik serinin öneminden söz etmiştik. Birçok serinin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı, seriyi geometrik seriyle karşılaştırarak anlaşılır. Geçen bölümde gördüğümüz d'Alembert Kıstası bu karşılaştırma yöntemlerinden biridir örneğin. (Teoremin kanıtındaki uzun hesaba bakarsanız, d'Alembert Kıstası'nın geometrik seriyi tam nerede ve nasıl kullandığını görürsünüz.) Bu altbölümde bir seriyi geometrik seriyle karşılaştırmanın bir başka yolunu göreceğiz.

Teorem 18.3 (Cauchy Kıstası, namı diğer Kök Testi). $\sum x_i$ *bir seri olsun.*
i. *Eğer* $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i}$ *limiti varsa ve* $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} < 1$ *ise,* $\sum x_i$ *serisi mutlak yakınsaktır.*
ii. *Eğer* $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} > 1$ *ise (limit* ∞ *da olabilir),* $\sum x_i$ *serisi ıraksaktır.*

Bir kez daha kıstasın limit 1'e eşit olduğunda herhangi bir fikir beyan etmediğini gözlemleyelim. Limitin 1 olduğu durumlar en ilginç durumlardır.

Cauchy Kıstası'nı çok sık kullanma gereksinimini duyacağız. Kanıtlamadan önce birkaç standart örnek verelim.

Örnekler

18.27. **[Geometrik Seri]** $\sum x^i$ *serisi* $|x| < 1$ *ise mutlak yakınsar.* $|x| \geq 1$ *ise seri ıraksar.*
Kanıt: $x_i = x^i$ olduğundan,

$$\lim_{i\to\infty} |x_i|^{\frac{1}{i}} = \lim_{n\to\infty} |x^i|^{\frac{1}{i}} = |x|$$

olur ve $x \neq \pm 1$ ise her şey teoremden çıkar. $x = \pm 1$ durumları kolay. (Ama teoremin kanıtı bu örneği kullandığından, bunu teoremin bir uygulaması olarak sunmak - en hafif tabirle - doğru değildir!) □

18.28. $\exp x = \sum x^i/i!$ *serisi her* x *için mutlak yakınsaktır.*
Kanıt: $x_i = x^i/i!$ olduğundan, sayfa 163'deki örnekte kanıtlanan $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n} = \infty$ eşitliğinden dolayı,

$$\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} = \lim_{i\to\infty} \left|\frac{x^i}{i!}\right|^{1/i} = \lim_{i\to\infty} \frac{|x|}{i!^{1/i}} = 0$$

olur. Teoreme göre seri her x için mutlak yakınsaktır. □

18.29. $\sum_{i\geq 1} 1/i^i$ *serisi yakınsaktır.*
Kanıt: $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} = \lim_{i\to\infty} 1/i = 0 < 1.$ □

18.30. $\sum_{i\geq 1} 1/i^{5i}$ *serisi yakınsaktır.*
Kanıt: $1/i^{5i} \leq 1/i^i$ olduğundan, bir üsttekinden çıkar. □

18.31. $x \in \mathbb{R}$ *için,*

$$\sum \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^{5n} x^n$$

serisinin yakınsaklığını tartışın.
Kanıt: Gerekeni yapalım:

$$\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^{5} |x|$$

dizisinin limitinin ne zaman 1'den küçük olduğunu bulmalıyız. Bunu yapmak oldukça kolay: Teoremi uygulayarak, $|x| < (2/3)^5$ ise serinin mutlak yakınsak olduğunu, $|x| > (2/3)^5$ ise serinin ıraksak olduğunu buluruz. $|x| = (2/3)^5$ ise Cauchy Kıstası bir işe yaramaz. $x = (2/3)^5$ durumunda, seri,

$$\sum \left(\frac{n-1/3}{n+1/2}\right)^{5n}$$

halini alır. Genel terimin limitini alalım:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1/3}{n+1/2}\right)^{5n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-1/3n}{1+1/2n}\right)^{5n} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1-1/3)^{5n}}{\lim_{n\to\infty}(1+1/2n)^{5n}}\\ &= \frac{(\lim_{n\to\infty}(1-1/3n)^{3n})^{5/3}}{(\lim_{n\to\infty}(1+1/2n)^{2n})^{5/2}} = \frac{e^{-5/3}}{e^{5/2}} \neq 0\end{aligned}$$

Böylece $x = (2/3)^5$ durumunda serinin ıraksak olduğunu buluruz. $x = -(2/3)^5$ durumunda da serinin genel terimi - aynen yukarda olduğu gibi - 0'a yakınsamaz, dolayısıyla seri bu durumda da ıraksar. □

Görüldüğü gibi Cauchy Kıstası çok yararlıdır. Genel terimi n'ye bağlı bir kuvvet olan serilerde ilk olarak aklımıza Cauchy Kıstası gelmelidir; muhtemelen bizi sonuca götürecektir.

Alıştırma 18.32. $\sum_{i\geq 1} 1/i^{i/2}$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Teorem 18.3'ün Kanıtı: Limite ℓ diyelim:

$$\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} = \ell$$

olsun. Kanıtın ana fikri şöyle: Büyük i'ler için $|x_i|$, ℓ^i civarındadır, dolayısıyla $\sum x_i$ serisi $\sum \ell^i$ geometrik serisine benzer.

Önce ℓ'nin 1'den küçük olduğunu varsayalım. x_i yerine $|x_i|$ alarak, serinin pozitif bir seri olduğunu varsayabiliriz ve böylece mutlak değer işaretlerinden kurtuluruz.

$\epsilon > 0$ sayısı, $\ell + \epsilon < 1$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilsin. Belli bir göstergeçten sonra, diyelim N göstergecinden sonra,

$$\ell - \epsilon < x_i^{1/i} < \ell + \epsilon < 1$$

olur. Bizim için önemli olan, 1'den küçük belli bir $u = \ell + \epsilon$ ve her $i > N$ için

$$x_i^{1/i} < u < 1$$

eşitsizlikleri olacak. (Yani limitin ℓ olduğunu kullanmayacağız bile!) Demek ki her $i > N$ için

$$x_i < u^i$$

olur. Dolayısıyla, $n > N$ için, n'inci kısmi toplama bakacak olursak,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} x_i &= \sum_{i=0}^{N} x_i + \sum_{i=N+1}^{n} x_i \le \sum_{i=0}^{N} x_n + \sum_{i=N+1}^{n} u^i \le \sum_{i=0}^{N} x_n + u^{N+1}\sum_{i=0}^{n} u^i \\ &= \sum_{i=0}^{N} x_n + u^{N+1}\frac{1-u^{n+1}}{1-u} < \sum_{i=0}^{N} x_n + u^{N+1}\frac{1}{1-u}\end{aligned}$$

eşitsizliğini buluruz. Yani kısmi toplamlar üstten sınırlıdır. Demek ki $\sum x_i$ serisinin limiti vardır.

Şimdi de $\ell > 1$ eşitsizliğini varsayalım. Eğer ℓ bir gerçel sayıysa, $\epsilon > 0$ sayısı, $\ell - \epsilon > 1$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilsin. Belli bir göstergeçten sonra, diyelim N göstergecinden sonra,

$$1 < \ell - \epsilon < x_i^{1/i} < \ell + \epsilon$$

olur. Bizim için önemli olan aslında belli bir $u > 1$ sayısı için ($u = \ell - \epsilon$ alın)

$$1 < u < x_i^{1/i}$$

eşitsizliklerini sağlayan sonsuz sayıda i bulmak olacak (yani bir kez daha limitin ℓ olduğunu kullanmayacağız.) Kolayca görüleceği üzere böyle bir u, $\ell = \infty$ ise de vardır. Demek ki her $i > N$ için

$$1 < u^i < |x_i|$$

olur ve $|x_i|$ teriminin limiti 0 olamaz, yani $\sum x^i$ serisi yakınsayamaz. □

Eğer $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} = 1$ ise ama $|x_i|^{1/i}$ dizisi 1'e üstten yakınsıyorsa, yani $|x_i|^{1/i} \ge 1$ ise, o zaman seri ıraksar, çünkü o zaman $|x_i| \ge 1$ olmak zorundadır ve $\lim_{i\to\infty} |x_i|$ limiti kesinlikle 0 olamaz. Örneğin,

$$\sum \left(\frac{n+1/3}{n-1/2}\right)^{5n}$$

serisinin ıraksaklığı bu sayede hemen anlaşılır.

Kanıttan da anlaşılacağı üzere aslında çok daha genel bir teorem kanıtladık:

Teorem 18.4 (Cauchy Kıstası 2). *$\sum x_i$ bir seri olsun.*
Eğer $\limsup |x_i|^{1/i} < 1$ *ise, $\sum x_i$ serisi mutlak yakınsaktır.*
Eğer $\limsup |x_i|^{1/i} > 1$ *ise (dolayısıyla* $\liminf |x_i|^{1/i} > 1$ *ise de), $\sum x_i$ serisi ıraksaktır.*

Bu teoremin - artık kolay olması gereken - kanıtını okura bırakıyoruz.

18.3 Cauchy-d'Alembert Karşılaştırması

Bu altbölümde, önceki iki altbölümde gördüğümüz iki kıstası karşılaştıracağız. Cauchy Yakınsaklık Kıstası'nın bir anlamda d'Alembert Yakınsaklık Kıstası'ndan daha genel olduğunu göreceğiz.

Teorem 18.5. $(x_i)_i$ *pozitif bir dizi olsun. Eğer* $\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i}$ *limiti varsa o zaman* $\lim_{i\to\infty} x_i^{1/i}$ *limiti de vardır ve iki limit birbirine eşittir:*

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{1/i} = \lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i}.$$

Kanıt: Örnek 13.15'ten çıkar. □

Alıştırmalar

18.33. Terimleri $a_n = n^n/n!$ olan diziye Teorem 18.5'i uygulayarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$$

eşitliğini kanıtlayın.

18.34. Teorem 18.5'i uygulayarak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

Demek ki $\sum x_i$ pozitif serisinin yakınsaklığını anlamak için d'Alembert Kıstası'nı uygulamaya kalkıp,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = 1$$

bulmuşsak, ardından Cauchy Kıstası'nı uygulamaya kalkışmak gereksiz bir uğraştır çünkü zorunlu olarak

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{1/i} = 1$$

bulunacaktır. Ayrıca, önce Cauchy Kıstası'nı uygulayıp

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{1/i} = 1$$

bulmuşsak, o zaman, yukarda kanıtladığımız teoreme göre ya $\lim_{i\to\infty} x_{i+1}/x_i$ diye bir limit olmayacaktır ya da bu limit olacaktır ama 1'e eşit olacaktır, yani bu durumda da ikinci kıstası uygulamak nerdeyse gereksizdir. ("Nerdeyse" dedik çünkü $|x_i|^{1/i}$ dizisi 1'e alttan yakınsamasına rağmen, $|x_{i+1}|/|x_i|$ dizisi 1'e üstten yakınsayabilir, dolayısıyla seri ıraksayabilir; yani Cauchy Kıstası'nın yakınsaklığına karar veremediği bir seriye d'Alembert Kıstası bazı ender durumlarda olumsuz yanıt verebilir.)

Ama aşağıdaki Örnek 18.38'den anlaşılacağı üzere, $|x_{i+1}|/|x_i|$ dizisinin limiti olmasa da $|x_i|^{1/i}$ dizisinin limiti olabilir.

Örnekler

18.35. $0 < a < b < 1$ olsun. Şu seriye bakalım:

$$1 + 1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

d'Alembert kıstasını uygulamaya çalışalım. Dizinin terimlerine x_n diyelim. Her n için öyle bir k var ki (k aşağı yukarı n'nin yarısı) ya

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

ya da

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k.$$

Demek ki, $b > a$ olduğundan

$$\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} = \infty \text{ ve } \liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$$

olur ve genelleştirilmiş d'Alembert kıstası bile serinin yakınsaklşığına ya da ıraksaklığına karar veremez.

Cauchy kıstasını uygulamaya çalışalım. Elbette

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{1/n} = 1$$

olur, yani Cauchy kıstası da bu durumda karar veremez. Üstelik limit 1'e soldan gittiğinden, yani her n için $(x_n)^{1/n} < 1$ olduğundan Cauchy kıstasının inceliklerinden de yararlanamayız. (Bkz. sayfa 314.)

İşin gerçeği: Seri pozitif olduğundan,

$$1 + 1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots = \sum a^i + \sum b^i = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}$$

olur ve seri yakınsaktır!

18.36. $\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$.

Teorem 18.5'te $x_n = 1/n!$ alalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

olduğundan, teoreme göre,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} = 0$$

olur. Demek ki, $1/n! > 0$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} n!^{1/n} = \infty$ olur. □

18.37. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Teoremde $x_n = n$ alalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

olduğundan, $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ olur.

Alıştırma 18.38. a ve b iki pozitif gerçel sayı olsun. Her n doğal sayısı için x_n'yi şöyle tanımlayalım:

$$x_n = \begin{cases} a^k b^k & \text{eğer } n = 2k \text{ ise} \\ a^{k+1} b^k & \text{eğer } n = 2k+1 \text{ ise} \end{cases}$$

$\sum x_i$ pozitif serisinin yakınsaklığını anlamak için d'Alembert ve Cauchy kıstaslarını uygulayın. Hangisi karar verebiliyor? Serinin toplamını bulun.

Not: Bazen ne d'Alembert ne Cauchy ne de daha sonra göreceğimiz Raabe kıstası bir serinin yakınsaklığına karar verebilir. Bu durumlarda teleskopik seri yöntemini denemeye çalışmakta yarar vardır. Örneğin Örnek 14.17'ün yakınsaklığına karar vermek için bu bölümde gördüğümüz ve ilerde göreceğimiz kıstaslar karar veremezler ama teleskopik seri fikriyle bu serinin yakınsadığını kolaylıkla kanıtlayabilmiştik.

18.4 Yakınsaklık Yarıçapı

Geçmişte, verilmiş bir x gerçel sayısına göre değişen seri örnekleri gördük sık sık. Örneğin, $\exp x = \sum x^i/i!$ bu tür serilerden biriydi.

$$\sum a_i x^i$$

biçiminde yazılan serilere ***kuvvet serisi*** adı verilir. Tabii kuvvet serileri bazı x'ler için yakınsaktır, bazıları için ise değildir.

Bu seri gibi, anlamsız bir X için

$$\sum a_i X^i$$

biçiminde yazılan *biçimsel* serilere ***biçimsel kuvvet serisi*** adı verilir. Üçüncü ciltte biçimsel kuvvet serilerinden uzun uzadıya sözedeceğiz.

Dikkat: Biçimsel kuvvet serileri fonksiyon değildirler, sadece anlamsız birer ifadedirler. Eğer biçimsel bir kuvvet serisini,

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

olarak yazarsak, biçimsel kuvvet serilerinin polinomların genelleştirilmiş bir hali olduklarını görürüz; nitekim, eğer her $m > n$ için $a_m = 0$ ise, yukardaki biçimsel kuvvet serisi,

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

polinomuna dönüşür. Eğer x gerçel sayısı için $\sum a_i x^i$ serisi yakınsaksa, o zaman $\sum a_i X^i$ biçimsel kuvvet serisini x'te değerlendirip $\sum a_i x^i$ sayısını elde ederiz.

Bu bölümde irdeleyeceğimiz soru şu: $(a_i)_i$ sayı dizisi verilmiş olsun ya da -aynı şey- bir $\sum a_i X^i$ biçimsel kuvvet serisi verilmiş olsun; hangi x gerçel sayıları için

$$\sum a_i x^i$$

kuvvet serisi yakınsaktır, ve tabii, hangi x gerçel sayıları için seri ıraksaktır?

Biçimsel bir kuvvet serisinin en azından 0'da yakınsak olduğu belli. Ama 0'dan başka hangi sayılarda yakınsaktır?

Bu önemli bir soru, çünkü eğer her $x \in B \subseteq \mathbb{R}$ için $\sum a_i x^i$ serisi yakınsaksa, o zaman $\sum a_i X^i$ kuvvet serisi B'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımlar:

$$x \mapsto \sum a_i x^i;$$

ve bu tür fonksiyonlar, polinomlardan sonra analizi ve anlaşılması en kolay fonksiyonlardır.

Cauchy Kıstası'nı kullanarak bu altbölümde bu sorunun yanıtını bulacağız.

Teorem 18.6. *$(a_i)_i$ bir dizi, $S = \limsup |a_i|^{1/i} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ve*

$$R = \frac{1}{S} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

olsun. O zaman $|x| < R$ eşitsizliğini sağlayan her x için $\sum a_i x^i$ serisi mutlak yakınsaktır ve $|x| > R$ eşitsizliğini sağlayan her x için $\sum a_i x^i$ serisi ıraksaktır.

Cauchy Kıstası sayesinde teoremin kanıtı sadece birkaç satırdan ibaret olacak. Ufuk açıcı olduğunu iddia edemeyeceğimiz kanıta başlamadan önce teoremin kendisini tartışalım.

Problemi tersine çevirip şu soruyu da sorabiliriz: Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ise ve

$$f : X \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyonsa, f'yi yukardaki gibi bir kuvvet serisi olarak yazabilir miyiz, yani öyle bir $(a_i)_i$ dizisi var mıdır ki, her $x \in X$ için,

$$f(x) = \sum a_i x^i$$

olsun? Örneğin $\exp x$, tanımı gereği, $X = \mathbb{R}$ için, böyle bir fonksiyondur. Bu tür fonksiyonlar ele avuca gelen fonksiyonlar olduğundan, soru ve bu sorunun varyasyonları matematikte ve fizikte önemlidir.

Eğer X sonlu bir kümeyse, her f fonksiyonunun bu özelliği vardır, çünkü sonlu küme üstüne tanımlanmış bir fonksiyon her zaman bir polinom (dolayısıyla bir kuvvet serisi) olarak yazılabilir. Marifet, X daha büyük olduğunda, örneğin açık bir aralık olduğunda f'nin bu özelliğinin olup olmadığını anlamaktır.

Bu tür fonksiyonların analizi polinomların analizi kadar kolay olmasa da polinomların analizinden sadece bir dirhem daha zordur, polinom olmasalar da polinomiyal fonksiyonlara oldukça benzerler. Örneğin eğer n'yi yeterince büyük seçersek,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

sayısı $\exp x$'e çok yakın olur. Zaten hesap makinaları da $\exp x$'i bu yöntemle hesaplarlar, belli bir n için,

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

sayısını bize $\exp x$ diye yuttururlar. Aynı şey sin ve cos gibi "aşkın" olarak nitelenen fonksiyonlar için de geçerlidir. Zaten biz de bu fonksiyonların tanımını liselerde alışılageldiği gibi dik üçgenler ve düzlem geometrisi kullanılarak değil, kuvvet serileriyle vermiştik:

$$\sin x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\ ,\ \cos x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}.$$

Yukardaki exp, sin ve cos örneklerinin her biri $\mathbb{R}$'de "analitik"tir, yani kuvvet serileriyle tanımlanan bu fonksiyonlar $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlardı. Şimdi

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

gibi daha masum görünüşlü bir fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyon $(-1, 1)$ aralığında bir seri olarak ifade edilebilir. Nitekim, defalarca kanıtlandığımız üzere, her $x \in (-1, 1)$ için,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum x^i$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 18.6'nın Kanıtı: $x = 0$ ise her şey bariz. Artık $x \neq 0$ olsun. Cauchy Teoremi'ne göre,

$$\limsup |a_i x^i|^{1/i} < 1$$

ise,

$$\sum a_i x^i$$

serisi mutlak yakınsaktır. Ama

$$\limsup |a_i x^i|^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i}|x| = |x| \cdot \limsup |a_i|^{1/i}$$

olduğundan, $\limsup |a_i x^i|^{1/i} < 1$ koşulu,

$$|x| < \frac{1}{\limsup |a_i|^{1/i}} = R$$

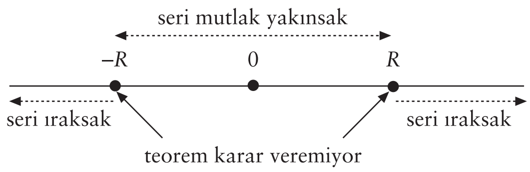
koşuluna denktir. (Bu dediğimiz, $1/0 = \infty$ tanımıyla $\limsup |a_i|^{1/i} = 0$ ise de geçerlidir!) Benzer şekilde, $|x| > R$ ise, serinin ıraksaklığı kolaylıkla gösterilir. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

R'ye $\sum a_i X^i$ kuvvet serisinin ***yakınsaklık yarıçapı*** adı verilir.

R'nin sonsuz olabileceğini unutmayalım, ki bu durumda seri her x için yakınsaktır.

Katsayılar büyüdükçe yakınsaklık yarıçapı azalır elbet, ama aynı da kalabilir. $\sum x^i$ ve $\sum ix^i$ serilerinin ve katsayıları daha da büyük olan $\sum i^2x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Örnek 18.40'ın sonunda R'nin 0 olduğu bir kuvvet serisi bulacaksınız; bu durumda seri sadece $x = 0$ için yakınsaktır.

Bu arada, teoremin, $|x| = R$ eşitliği halinde, $R = 0$ olmadıkça, kuvvet serisinin yakınsaklığı hakkında herhangi bir ipucu vermediğine de dikkatinizi çekeriz.



Demek ki, $\sum a_i X^i$ kuvvet serisi, teoreme göre $(-R, R)$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon veriyor ve bu fonksiyonu en fazla, $[-R, R]$ aralığına uzatabiliriz (o da eğer R sonlu bir sayıysa tabii!)

Sonuç 18.7. *Eğer $\sum a_i x_0^i$ yakınsaksa, o zaman $|x| < |x_0|$ eşitsizliğini sağlayan her x için $\sum a_i x^i$ serisi mutlak yakınsaktır ve serinin yakınsaklık yarıçapı $\geq |x_0|$ olur.* □

Son olarak kanıtlacağımız aşağıdaki sonuç, 0'ı içeren bir aralık sözkonusu olduğunda, biçimsel kuvvet serleriyle kuvvet serileri arasında büyük bir ayrım olmadığını söylüyor.

Teorem 18.8. *Eğer bir $R > 0$ ve her $x \in [0, R)$ için $\sum a_i x^i = \sum b_i x^i$ ise o zaman her i için $a_i = b_i$ olur.*

Kanıt: $c_i = a_i - b_i$ tanımını yaparak, eğer $[0, R)$ üzerinde $\sum c_i x^i = 0$ ise her c_i'nin 0 olduğunu kanıtlamalıyız. Teorem 18.6'ya göre, R'yi gerekirse daha küçük seçerek her $x \in [0, R]$ için $\sum c_i x^i$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu varsayabiliriz. Bu hazırlıklardan sonra teoremin kanıtına geçelim.

Kuvvet serisini $x = 0$'da değerlendirerek, $c_0 = 0$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi $c_1 = 0$ eşitliğini gösterelim. $x \neq 0$ için,

$$-c_1 = x \sum c_{i+2} x^i$$

olduğundan, $c_1 = 0$ eşitliğini göstermek için, $\sum c_{i+2} x^i$ serisinin 0 içeren bir aralıkta sınırlı olduğunu göstermek yeterli. (Neden?) Eğer $x \in (0, R)$ ise,

$$\sum c_{i+2} x^i = -\frac{c_1}{x}$$

olduğundan, $\sum c_{i+2}x^i$ serisi de yakınsaktır; dolayısıyla mutlak yakınsaktır. Demek ki her $0 < x < R$ için,

$$\left|\sum c_{i+2}x^i\right| \le \sum |c_{i+2}||x|^i \le \sum |c_{i+2}|S^i = B$$

olur. Böylece $c_1 = 0$ eşitliği ispatlanmış oldu. Aynı yöntemle $c_2 = c_3 = \ldots = 0$ eşitlikleri gösterilebilir. □

Örnekler

18.39. *$\sum X^i/i$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir ve bu kuvvet serisi sadece ve sadece $x \in [-1, 1)$ için yakınsaktır.*

Kanıt: Teoremi kullanıp,

$$\limsup |a_i|^{1/i} = \limsup |1/i|^{1/i} = \limsup 1/i^{1/i}$$

sayısını hesaplayalım. 1 bulacağımızı iddia ediyoruz; demek ki

$$\limsup\ i^{1/i} = 1$$

eşitliğini iddia ediyoruz. Ama,

$$\lim_{i\to\infty} i^{1/i} = 1$$

eşitliğini Örnek 18.37'de görmüştük. Demek ki,

$$\limsup\ i^{1/i} = \lim_{n\to\infty} i^{1/i} = 1$$

olur. □

18.40. *Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapları ∞'dur, yani bu seriler her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsarlar.*

$$\sum \frac{X^i}{i!},\ \sum (-1)^i \frac{X^{2i+1}}{(2i+1)!},\ \sum (-1)^i \frac{X^{2i}}{(2i)!}.$$

Kanıt: Sadece birincisini (bir defa daha!) kanıtlayalım.

$$\limsup |a_i|^{1/i} = \limsup 1/i!^{1/i}$$

sayısını hesaplayalım. 0 bulacağımızı iddia ediyoruz; bu dediğimiz, Örnek 18.36'da kanıtladığımız

$$\limsup\ i!^{1/i} = \infty$$

eşitliğinden çıkar. □

Demek ki, bu örnekteki biçimsel kuvvet serilerinden her biri bize $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon verir. Defalarca söylediğimiz gibi bu fonksiyonlara, sırasıyla, exp, sin ve cos adı verilir.

Aslında,

$$\sum \frac{X^i}{i!}$$

biçimsel kuvvet serisinin her gerçel sayıda yakınsaklığını bildiğimizden (Örnek 18.5), bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı ∞'dur ve böylece teoremi kullanarak,

$$\limsup\ i!^{1/i} = \infty$$

eşitliğini bir kez daha kanıtlayabiliriz.

Yakınsaklık yarıçapı 0 da olabilir. Örneğin, $\sum i!X^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 0'dır, yani bu kuvvet serisini sadece $x = 0$'da değerlendirebiliriz (ve yanıt 1 çıkar).

18.41. [BR] Bu örnekte iki serinin Cauchy çarpımının yakınsaklık yarıçapının, çarpılan iki serinin yakınsaklık yarıçaplarından bağımsız olduğunu göreceğiz.

$$a(x) = \sum \left(\frac{1}{3^{i+1}} + \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i+1}} \right) x^i$$

ve

$$b(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \sum 2^i x^i$$

olsun. O zaman $a(x)$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 2'dir, $b(x)$'inki ise 1/2'dir. Biraz hesapla, $a(x)$ ile $b(x)$ serilerinin Cauchy çarpımının

$$c(x) = \sum \frac{1}{3^{i+1}} x^i$$

olduğu görülür. $c(x)$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 3'tür. Bunun neden böyle olduğunu anlamak zor değildir. Yakınsaklık yarıçapları içinde

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{3-x} - \frac{1}{2+x} = \frac{2x-1}{(3-x)(2+x)}, \\ b(x) &= \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \frac{1}{1-2x} = \frac{x+2}{2x-1}, \\ c(x) &= a(x)b(x) = \frac{2x-1}{(3-x)(2+x)} \times \frac{x+2}{2x-1} = \frac{1}{3-x} \end{aligned}$$

olur. Sadeleşmeler, yakınsaklık yarıçapını artırıyor. Bkz. Alıştırma 18.47.

Alıştırmalar

18.42. $a > 0$ için, $\sum (x-a)^i$ serisinin hangi x sayıları için yakınsak olduğunu bulun.

18.43. a ve b, iki pozitif sayı olsun.

$$1 + bx + abx^2 + a^2bx^3 + a^2b^2x^4 + a^3b^2x^5 + \cdots$$

serisinin yakınsaklık yarıçapının $1/\sqrt{ab}$ olduğunu gösterin. (Serinin katsayıları sırasıyla b ve a ile çarpılarak elde ediliyor.)

18.44. $(a_n)_n$ dizisi sınırlıysa $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapının en az 1 olduğunu kanıtlayın.

18.45. $\lim_{n\to\infty} a_n$ varsa $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapının en az 1 olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Bir önceki alıştırma.)

18.46. $\sum a_i$ yakınsaksa $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapının en az 1 olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Bir önceki alıştırma.)

18.47. İki kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapları r_1 ve r_2 olsun. Bu serilerin Cauchy çarpımının yakınsaklık yarıçapının $\geq \min\{r_1, r_2\}$ olduğunu gösterin.

18.5 Kuvvet Serilerinin Türev ve İntegralleri

$\sum_{i\geq 1} ia_iX^{i-1}$ kuvvet serisine (bazılarının tahmin edeceği nedenden) $\sum_{i\geq 0} a_iX^i$ kuvvet serisinin ***türevi*** adı verilir ve bu,

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right)' = \sum_{i=1}^{\infty} ia_i X^{i-1}$$

olarak yazılır. Kuvvet serisinin türevinin tanımını,

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots)' \\ = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \cdots + na_nX^{n-1} + \cdots\end{aligned}$$

olarak vermek, tanımı biraz daha çabuk anlaşılır kılabilir ve yapılacak olası yanlışları önleyebilir, çünkü örneğin,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^{2i+1}$$

kuvvet serisinin türevi, verilen ilk tanıma alel acele bakıp sanılabileceği gibi,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(2i+1)a_iX^{2i}$$

değil,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)a_iX^{2i}$$

olur, çünkü bu kuvvet serisinin ilk terimi a_0X'tir. Bu yüzden,

$$0 \times a_i \times X^{-1} = 0$$

anlaşmasını yaparak, kuvvet serisinin türevinin tanımını

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i\right)' = \sum_{i=0}^{\infty} ia_iX^{i-1}.$$

olarak vermek daha pratiktir.

Bir kuvvet serisinin türevinin de türevi alınabilir tabii ve bu türev alma işlemini dilediğimiz kadar sürdürebiliriz. Bir kuvvet serisinin türevleri birinci, ikinci, üçüncü... türevler olarak bilinir. Kuvvet serisinin 0'ıncı türevinin kendisine eşit olduğu kabul edilir. Bir f kuvvet serisinin n'inci türevini $f^{(n)}$ olarak yazarsak,

$$\begin{aligned}f^{\,(0)} &= f,\\ f^{\,(1)} &= f',\\ f^{\,(n+1)} &= (f^{(n)})'\end{aligned}$$

eşitlikleri doğrudur. Türevlerin f'', f''', f^{iv} olarak yazıldığı da olur. Özellikle f'' ve f''' pek sık kullanılan bir yazım türüdür.

Türeve hemen birkaç örnek verelim.

$$(\exp X)' = \exp X,$$
$$(\sin X)' = \cos X,$$
$$(\cos X)' = -\sin X.$$

Buradaki $\exp X$, $\cos X$ ve $\sin X$ tahmin edilen kuvvet serileri anlamına gelirler.

Tanımları anımsayarak, bunları teker teker kanıtlayalım. Önce[2] exp:

$$(\exp x)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ix^{i-1}}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp x.$$

Şimdi açıklayamayacağımız haklı nedenlerden, matematikte $(\exp x)'$ yerine $\exp' x$ yazılır. Bunun gibi, $(\sin x)'$ ve $(\cos x)'$ yerine $\sin' x$ ve $\cos' x$ yazılır.

Görüldüğü gibi, exp fonksiyonu kendi türevine ve hatta türevlerine eşit:

$$\exp = \exp' = \exp^{(n)}.$$

Okur, alıştırma olarak türevine eşit olan tüm kuvvet serilerini bulabilir.

Şimdi de sin kuvvet serisinin türevini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\sin' x &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)' = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (2i+1) \frac{x^{2i}}{(2i+1)!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \cos x.
\end{aligned}$$

Ve en nihayet cos kuvvet serisinin türevi:

$$\begin{aligned}
\cos' x &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (2i) \frac{x^{2i-1}}{(2i)!} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} \\
&= -\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} = -\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = -\sin x.
\end{aligned}$$

Demek ki (kuvvet serileri olarak görüldüğünde),

$$\sin'' = -\sin \text{ ve } \cos'' = -\cos;$$

yani sin ve cos kuvvet serilerinin ikinci türevleri bu kuvvet serilerinin negatiflerine eşit.

"Şimdi durduk yerde kuvvet serilerinin türevleri konusuna niye girdik?" sorusunu soran okurları şu teoremi kanıtlayarak yanıtlayalım:

---

[2]Büyük harf X yerine, sanki bir sayıymışçasına küçük harf x'i kullanıyoruz. Ama bu yazılım seriyi daha az kuvvet serisi yapmaz tabii.

Teorem 18.9. *Bir kuvvet serisinin ve türevinin yakınsaklık yarıçapları eşittir.*

Örneğin,

$$\sum_{i \geq 0} X^i$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 olduğundan, türevi olan

$$\sum_{i \geq 1} iX^{i-1},$$

yani

$$\sum_{i \geq 0} (i+1)X^i$$

kuvvet serisinin de yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Bundan da

$$\sum_{i \geq 0} iX^i$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğu çıkar. (Neden?)

Teorem 18.9'in Kanıtı: Kuvvet serimiz $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$ olsun. Bu kuvvet serisinin türevi

$$\sum_{i \geq 1} ia_i x^{i-1}$$

dir. Ama bu türevin yakınsaklık yarıçapıyla, bunun x'le çarpılmışı olan

$$\sum_{i \geq 1} ia_i x^i$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı aynıdır. Demek ki,

$$\limsup |ia_i|^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i}$$

eşitliğini kanıtlamamız yeterli; kanıtlayalım:

$$\limsup |ia_i|^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i} i^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i} \lim i^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i}.$$

Burada Önsav 13.8'i ve Örnek 18.37'yi kullandık. □

$\sum_{i \geq 0} b_i x^i$ kuvvet serisinin türevi $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$ ise o zaman

$$\sum_{i \geq 0} b_i x^i$$

kuvvet serisine, $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ kuvvet serisinin ***integrali*** (Fransız etkisinde kalmış eskilerin diliyle ***entegrali*** adı verilir.) Elbette,

$$\sum_{i\geq 1} ib_i x^{i-1} = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$$

olmalı. Dolayısıyla b_0 herhangi bir gerçel sayı olabilir ama $i \geq 1$ için, $a_{i-1} = ib_i$ olmalı, yani b_0 sabit terimi dışında, $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ kuvvet serisinin integralinin diğer katsayıları tamamıyla a_i katsayıları tarafından belirlenmiştir.

Teorem 18.10. *Bir kuvvet serisinin ve integralinin yakınsaklık yarıçapları eşittir.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır; aynen Teorem 18.9'in kanıtı gibidir. □

Alıştırma 18.48. $0 \leq x < 1$ için

$$\sum ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

eşitliğini kanıtlayın. Aynı eşitlik $-1 < x < 0$ için de geçerlidir ama bu kitaptakinden daha derin analiz yapmadan bunu nasıl kanıtlayabileceğimizi göremedik.