17. Dalgalanan Seriler

17.1 Leibniz Testi

Önceki bölümlerde daha çok terimleri pozitif sayılar olan serilere bakmıştık. Bu bölümde terimleri bir pozitif bir negatif olan serilere bakacağız. Bakacağımız seriler, $a_n \geq 0$ gerçel sayıları için,

$$\sum (-1)^i a_i$$

biçiminde yazılan serilerdir. Bu tür serilere ***dalgalanan*** ya da ***alterne seriler*** denir. Perihan Mağden'in tabiriyle içlerinden en en ennnnn bilineni,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

serisidir. Bu seri yakınsaktır. (Ve limiti $\ln 2$'dir, yani 2'nin doğal logaritmasıdır. Ama henüz logaritma mogaritma görmediğimizden bu $\ln 2$ sayısı okura şimdilik bir şey ifade etmeyebilir.)

Yukarda ele alınan $\sum(-1)^i a_i$ türünden bir serinin yakınsak olması için, Teorem 14.4'te gördüğümüz üzere,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

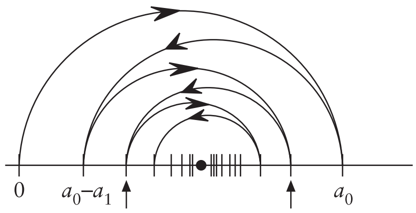
olmalıdır. Ancak bu koşul yetmez, daha fazlasına gerek var.

Teorem 17.1 (Leibniz)**.** *$(a_i)_i$ azalarak 0'a yakınsayan pozitif bir dizi olsun. O zaman, $\sum(-1)^i a_i$ serisi yakınsaktır.*

Kanıt: $s_n = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$, kısmi toplamlar olsun.

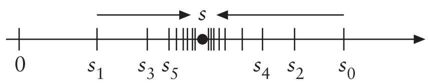
$$(s_{2n})_n \text{ ve } (s_{2n+1})_n$$

dizilerine bakacağız.



$(s_n)_n$ dizisi a_i'ler eklenip çıkarılarak oluşturulur

Birincisinin azalan, ikincisinin artan olduğunu ve her ikisinin de aynı limite yakınsadığını kanıtlayacağız. Elde ettiğimiz bilgiler aşağıdaki şekli verecek.



$(s_{2n+1})_n$ dizisi artarak, $(s_{2n})_n$ dizisi azalarak aynı sayıya yakınsayacaklar.

Sav 1. $(s_{2n})_n$ azalan bir dizidir.
Kanıt: $s_{2n} \geq s_{2n+2}$ eşitsizliğini göstermeliyiz. Ama s_{2n+2}'nin içindeki s_{2n}'yi ortaya çıkarırsak, $(a_n)_n$ dizisinin azalan olmasını kullanarak bunu kolaylıkla görebiliriz:

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} \\ &= s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n}. \end{aligned}$$

Sav 2. $(s_{2n+1})_n$ *artan bir dizidir.*
Kanıt: $s_{2n+1} \leq s_{2n+3}$ eşitsizliğini göstermeliyiz. Kanıt aynen yukardaki gibi:

$$\begin{aligned} s_{2n+3} &= s_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+3}a_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq s_{2n+1}. \end{aligned}$$

Sav 3. $s_{2n} \geq s_{2n+1}$.
Kanıt: Çok kolay: $s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0$.

Sav 4. *Her n ve m için*, $s_{2n+1} \leq s_{2m}$.
Kanıt: $n \leq m$ varsayımını yapalım. O zaman yukardaki üç savdan,

$$s_{2n+1} \leq s_{2m+1} \leq s_{2m} \leq s_{2n}.$$

çıkar. $n \geq m$ varsayımında kanıt benzerdir.

Şimdi teoremin kanıtını bitirebiliriz. Sav 2 ve 4'e göre, $(s_{2n+1})_n$ artan ve üstten sınırlı bir dizidir; demek ki bir limiti vardır. Bu limite u adını verirsek, Sav 4'e göre, her m için,

$$u \le s_{2m}$$

olur. Sav 1'e ve bu eşitsizliğe göre, $(s_{2m})_m$ azalan ve alttan sınırlı bir dizidir; demek ki bir limiti vardır. Bu limite v adını verirsek, yukardaki eşitsizlikten dolayı

$$u \le v$$

olur. Şimdi Sav 3'ü kullanalım:

$$v - u = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

Demek ki $u = v$ ve $(s_{2n+1})_n$ ve $(s_{2n})_n$ dizileri aynı sayıya yakınsıyorlar. Dolayısıyla $(s_n)_n$ dizisi de aynı sayıya yakınsar. Teorem kanıtlanmıştır. □

Yukardaki kanıttan, her n ve m için,

$$s_{2n+1} \le \sum (-1)^i a_i \le s_{2m}$$

bulunur. Demek ki ayrıca,

$$0 \le s_{2n} - \sum (-1)^i a_i \le s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$$

ve

$$0 \le \sum (-1)^i a_i - s_{2n-1} \le s_{2n-2} - s_{2n-1} = a_{2n-1}$$

olur. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum (-1)^i a_i - s_n \right| \le a_n$$

olur. Bunu da not edelim.

Sonuç 17.2 (Kanıtın Sonucu)**.** *$(a_n)_n$ azalan ve 0'a yakınsayan pozitif bir diziyse, $\sum (-1)^i a_i$ serisi yakınsaktır ve*

$$\left| \sum (-1)^i a_i - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \right| \le a_n$$

olur.

Böylece,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

toplamına, yani henüz bilmediğimiz $\ln 2$ sayısına dilediğimiz kadar ($1/n$ kadar) yakınsayabiliriz. Bu seriyi şöyle yazalım:

$$\sum \frac{(-1)^i}{i+1}$$

ve kısmi toplamları (Excel kullanarak) hesapladım:

$$\begin{array}{lllllll}
s_0 & = & 1 & & s_1 & = & 0{,}5 \\
s_2 & = & 0{,}83333\ldots & & s_5 & = & 0{,}73333\ldots \\
s_9 & \approx & 0{,}645634\ldots & & s_{10} & \approx & 0{,}736544\ldots \\
s_{11} & \approx & 0{,}653210\ldots & & s_{99} & \approx & 0{,}688172\ldots \\
s_{100} & \approx & 0{,}698073\ldots & & s_{999} & \approx & 0{,}692647\ldots \\
s_{1000} & \approx & 0{,}693646\ldots & & & &
\end{array}$$

Örneğin, $s_{999} = 0{,}693647\ldots$ eşitliğinden,

$$0{,}692647 \le \sum \frac{(-1)^i}{i+1} \le 0{,}693647$$

bulunur. Nitekim gerçek değer şudur:

$$\sum \frac{(-1)^i}{i+1} = 0{,}69314718055994\ldots$$

Alıştırma 17.1. Aşağıdaki serilerin yakınsak olup olmadığını belirleyin.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt[3]{i}},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i^2},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i^i},\ \sum \frac{(-1)^i i^3}{i^3+1},\ \sum \frac{(-1)^i i^3}{i^4-i^2+1},\ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i 2^{1/i},$$

$$\sum \frac{(-1)^i}{(e-2)^{i/2}},\ \sum (-1)^{i^2+i-1} \frac{\sqrt{i}}{i+5},\ \sum \frac{(-1)^i i}{1+i^2},\ \sum \frac{(-1)^i i}{i+1}.$$

Örnek 17.2. Genel terimi 0'a gitmeyen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \cdots$$

serisine bakalım. Bu seriyi önce şöyle parantezleyelim:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) + \cdots$$

Bu durumda şunu elde ederiz:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{5\cdot 6} - \frac{1}{7\cdot 8} - \cdots < \frac{1}{2}.$$

Bir de şöyle parantezliyelim:

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{5}{6} - \frac{6}{7}\right) \cdots$$

Bu durumda şunu elde ederiz:

$$1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots > 1.$$

İki farklı parantezlemeyle farklı toplamlar elde edildiğine göre başlangıçtaki seri yakınsamaz. (Bkz. Teorem 14.8.)

17.2 Riemann Düzenleme Teoremi

Pozitif bir serinin terimlerinin yerlerini değiştirirsek yakınsaklığın bozulmayacağını ve limitin değişmeyeceğini gördük (bkz. Teorem 14.13). Yakınsak olan ama mutlak yakınsak olmayan seriler (bu tür serilere ***koşullu yakınsak seri*** denir) bu konuda dramatik bir fark gösterirler: Böyle bir serinin terimlerinin yerlerini değiştirirsek seriyi dilediğimiz sayıya yakınsattırabiliriz, hatta dilersek $\pm\infty$'a bile ıraksattırabiliriz!

Teorem 17.3 (Riemann Düzenleme Teoremi)**.** *$\sum a_i$ koşullu yakınsak olan bir seri olsun. $b \in \mathbb{R}$, rastgele olsun. O zaman doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin*

$$\sum_i a_{\sigma(i)} = b$$

eşitliğini sağlayan bir σ eşleşmesi vardır.

Kanıt: $P = \{i \in \mathbb{N} : a_i \geq 0\}$ ve $N = \{i \in \mathbb{N} : a_i < 0\}$ olsun. Önce

$$\sum_{i\in P} a_i \text{ ve } \sum_{i\in N} a_i$$

serilerinin sırasıyla $+\infty$ ve $-\infty$'a yakınsadıklarını kanıtlayalım. Nitekim, eğer

$$P_n = P \cap \{0, 1, \ldots, n\}$$

ve

$$N_n = N \cap \{0, 1, \ldots, n\}$$

ise, $\sum a_i$ serisinin kısmi toplamı olan s_n sayısı,

$$s_n = \sum_{i\in P_n} a_i + \sum_{i\in N_n} a_i$$

eşitliğini sağlar. $(s_n)_n$ dizisinin bir limiti olduğundan, $\sum_{i\in P_n} a_i$ ve $\sum_{i\in N_n} a_i$ serilerinden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır, biri ıraksaksa diğeri de ıraksaktır. Öte yandan $\sum a_i$ serisi mutlak yakınsak olmadığından,

$$\sum |a_i| = \infty$$

olur, yani

$$\sum_{i\in P_n} a_i - \sum_{i\in N_n} a_i$$

serisi $+\infty$'a ıraksar, yani hem $\sum_{i\in P_n} a_i$ hem $\sum_{i\in N_n} a_i$ dizisi yakınsak olamaz. Demek ki $\sum_{i\in P_n} a_i$ ve $\sum_{i\in N_n} a_i$ serilerinin ikisi birden ıraksaktır, biri $+\infty$'a, diğeri de tabii ki $-\infty$'a ıraksar.

b'nin bir gerçel sayı olduğunu varsayalım. Demek ki $i \in P$ için, a_i'leri toplayarak toplamı istediğimiz kadar büyütebiliriz, örneğin b'den büyük yapabiliriz ve daha sonra bu toplama $i \in N$ için, a_i'leri ekleyerek toplamı istediğimiz kadar küçültebiliriz, örneğin b'nin altına inebiliriz. Bu prosedürü böyle, bir ileri bir geri devam ettireceğiz.

Aklımıza ilk geleni denersek başarıya ulaşırız. P ve N kümelerini artan bir şekilde göstergeçleyelim:

$$p(0) < p(1) < p(2) < \ldots < p(k) < \ldots$$

ve

$$n(0) < n(1) < n(2) < \ldots < n(k) < \ldots$$

için,

$$P = \{a_{p(i)} : i \in N\} \text{ ve } N = \{a_{n(i)} : i \in \mathbb{N}\}$$

olsun.

b'nin pozitif olduğunu varsayalım.

$$a_{p(0)},\ a_{p(1)},\ a_{p(2)},\ \ldots$$

sayılarını b'yi aşana kadar toplayalım ve b'yi aştığımız ilk yerde duralım. Diyelim,

$$a_{p(0)} + \cdots + a_{p(k_0-1)} < b \le a_{p(0)} + \cdots + a_{p(k_0)}.$$

Şimdi

$$a_{p(0)} + \cdots + a_{p(k_0)}$$

toplamına, negatif olan

$$a_{n(0)},\ a_{n(1)},\ a_{n(2)},\ \ldots$$

sayılarını, toplam b'nin altına inene dek toplayalım. Diyelim

$$a_{p(0)}+\cdots+a_{p(k_0)}+a_{n(0)}+\cdots+a_{n(\ell_0)} < b \le a_{p(0)}+\cdots+a_{p(k_0)}+a_{n(0)}+\cdots+a_{n(\ell_0-1)}$$

oluyor. Şimdi

$$a_{p(0)} + \cdots + a_{p(k_0)} + a_{n(0)} + \cdots + a_{n(\ell_0)}$$

toplamına

$$a_{p(k_0+1)},\ a_{p(k_0+2)},\ \ldots$$

terimlerini b'yi geçene dek ekleyelim ve b'yi geçer geçmez duralım. Bunu böyle sürekli devam edersek, elde edilen

$$\begin{aligned}a_{p(0)} &+ \cdots + a_{p(k_0)} + a_{n(0)} + \cdots + a_{n(\ell_0)}\\ &+ a_{p(k_0+1)} + \cdots + a_{p(k_1)} + a_{n(\ell_0+1)} + \cdots + a_{n(\ell_1)}\\ &+ a_{p(k_1+1)} + \cdots + a_{p(k_2)} + a_{n(\ell_1+1)} + \cdots + a_{n(\ell_2)} + \cdots\end{aligned}$$

serisi $k_0 + 1$ adımda b'yi aşar, $k_0 + \ell_0 + 2$ adımda b'den küçük olur, sonra $k_0 + \ell_0 + k_1 + 3$ adımda tekrar b'yi aşar... Ve sonunda b'ye yakınsar... Ama söylemek yetmez, bu serinin gerçekten b'ye yakınsadığını kanıtlamak gerekiyor. Kanıtlayalım. Burada önemli olan nokta, her i için $i \le k_i$ ve $i \le \ell_i$ eşitsizlikleri ve

$$\lim_{i\to\infty} |a_i| = 0$$

eşitliğidir (çünkü $\sum a_i$ serisi yakınsaktır). Yani $\epsilon > 0$ ne kadar küçük olursa olsun, eğer M yeterince büyükse $i > M$ için, eklenen $a_{p(k_i+j)}$ sayılarının mutlak değerleri ϵ'dan küçük olurlar, çünkü

$$p(k_{i+j}) \ge p(k_i) \ge i > M$$

olur. Dolayısıyla kısmi toplamlar b'yi aştıklarında $b + \epsilon$ sayısını geçemezler, b'nin altına indiklerinde de $b - \epsilon$ sayısından küçük olamazlar, yani kısmi toplamlar bir zaman sonra $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ aralığının içinde kalmak zorunda kalırlar.

Örnekler

17.3. $0 < a < b < 1$ olsun.

$$1 + 1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots = \sum a^i + \sum b^i = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}$$

olur.

17.4. $\sum \frac{(-1)^i}{i+1}$ serisinin terimlerini iki pozitif terim ve bir negatif terim olarak karalım:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$\sum \frac{(-1)^i}{i+1}$ serisinin toplamına ℓ dersek, bu serinin $3\ell/2$ sayısına yakınsadığını kanıtlayacağız. Bunun için, Teorem 14.10'a göre s_{3n} kısmi toplamlarının $3\ell/2$ sayısına yakınsadığını kanıtlamak yeterli. Yani

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4i-3} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{2i}\right) = \frac{3\ell}{2}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Parantezi hesaplayalım önce. Kolay bir hesapla,

$$\frac{1}{4i-3} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{2i} = \frac{8i-3}{2i(4i-3)(4i-1)} > 0$$

çıkar. Kummer Kıyaslama Kıstası'na göre (Teorem 15.7), $\sum 1/i^2$ yakınsak olduğundan bu seri de yakınsaktır. Şimdi limiti zekice bir hesapla bulalım:

$$\begin{aligned}
s_{3n} &= \left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\right)\\
&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n}\right)\\
&= \left(\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)+\left(\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)\right)\\
&\quad+\left(\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right)\\
&\quad+\cdots+\left(\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots-\frac{1}{4n}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots-\frac{1}{4n}\right)
\end{aligned}$$

En sondaki dizi de $\ell+\ell/2=3\ell/2$ sayısına yakınsar.