16. Serilerle İşlemler

Serilerle toplama ve çıkarma yapabiliriz. Çarpma da yapılır ama çarpma işleminin tanımlanması toplama ve çıkarma kadar kolay değildir. Önce toplama ve çıkarmayla başlayalım, ardından çarpmaya el atacağız. Bu arada, biraz daha zor olan çarpma bölümünün hayatı çok kolaylaştırdığını, geçmişte kanıtladığımız

$$\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

gibi eşitlikleri kanıtladığı gibi birçok trigonometrik eşitliği de bir çırpıda kanıtladığını söyleyelim. Yani Cauchy çarpımı bölümü ciddiyetle ve dikkatle okunmalıdır.

16.1 Toplama, Çıkarma ve Bir Sayıyla Çarpma

Kolay olan işlemle başlayalım: Toplama.

Teorem 16.1. *Eğer $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri yakınsaksa, o zaman, $\sum(x_i+y_i)$ serisi de yakınsaktır ve*

$$\sum(x_i+y_i) = \sum x_i + \sum y_i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Kanıt çok kolay:

$$\begin{aligned}\sum(x_i+y_i) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}(x_i+y_i) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i + \sum_{i=0}^{n}y_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}y_i = \sum x_i + \sum y_i.\end{aligned}$$

Teorem kanıtlanmıştır. □

Aynı teorem $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri $\pm\infty$'a ıraksadıklarında da doğrudur, yeterki biri ∞ diğeri $-\infty$ olmasın:

Teorem 16.2. *Eğer* $\sum x_i$ *ve* $\sum y_i$ *serileri* $\overline{\mathbb{R}}$*'de değer alıyorlarsa ve* $\overline{\mathbb{R}}$*'de* $\sum x_i + \sum y_i$ *toplamı tanımlıysa, o zaman,* $\sum(x_i + y_i)$ *serisi de* $\overline{\mathbb{R}}$*'de değer alır ve*

$$\sum(x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$$

eşitliği geçerli olur.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Alıştırma 16.1. Eğer $\sum x_i$ serisi $\pm\infty$'ye yakınsıyorsa ve $\sum y_i$ serisinin kısmi toplamları (alttan/üstten) sınırlıysa, o zaman $\sum(x_i + y_i)$ serisinin de $\pm\infty$'ye yakınsadığını kanıtlayın.

Teorem 16.3. *Eğer* $\sum x_i$ *serisi yakınsaksa ve* $r \in \mathbb{R}$ *ise, o zaman,* $\sum r x_i$ *serisi de yakınsaktır ve*

$$\sum r x_i = r \sum x_i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Bunun da kanıtı çok kolay:

$$\sum r x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} r x_i = \lim_{n\to\infty} \left(r \sum_{i=0}^{n} x_i \right) = r \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i = r \sum x_i.$$

□

Aynı sonuç $\sum x_i$ serisi $\pm\infty$'a ıraksadığında da doğrudur:

Teorem 16.4. *Eğer* $\sum x_i$ *serisi* $\overline{\mathbb{R}}$ *kümesinde değer alıyorsa ve* $r \in \mathbb{R}$ *ise, o zaman,* $\sum r x_i$ *serisi de* $\overline{\mathbb{R}}$ *kümesinde değer alır ve* $\sum r x_i = r \sum x_i$ *eşitliği geçerli olur.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Sonuç 16.5. *Eğer* $\sum x_i$ *ve* $\sum y_i$ *serileri* $\overline{\mathbb{R}}$*'de değer alıyorlarsa ve* $\overline{\mathbb{R}}$*'de*

$$\sum x_i - \sum y_i$$

toplamı tanımlıysa, o zaman, $\sum(x_i - y_i)$ *serisi de* $\overline{\mathbb{R}}$*'de değer alır ve*

$$\sum(x_i - y_i) = \sum x_i - \sum y_i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Teorem 16.2 ve Teorem 16.4'ten çıkar. □

Bunlar kolaydı. Çok daha güçlü bir sonuca geçiyoruz.

16.2 Cauchy Çarpımı

Serilerde çarpmayı tanımlamak biraz daha zordur. İlk akla gelen

$$\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right) = \sum x_i y_i$$

tanımında iş yoktur, hem de hiç iş yoktur, hiçbir işe yaramaz. Çarpmanın tanımı için biraz daha düşünmeliyiz. $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin n-inci kısmi toplamlarını çarpalım:

$$\begin{aligned}
&(x_0)(y_0) = x_0y_0\\
&(x_0+x_1)(y_0+y_1) = x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0) + x_1y_1\\
&(x_0+x_1+x_2)(y_0+y_1+y_2) = x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0) + (x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0)\\
&\qquad\qquad +(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2\\
&(x_0+x_1+x_2+x_3)(y_0+y_1+y_2+y_3) = x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0)\\
&\qquad\qquad +(x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0) + (x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0)\\
&\qquad\qquad +(x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1) + (x_2y_3 + x_3y_2) + x_3y_3
\end{aligned}$$

Yukarda, çarpımdaki x_iy_j terimlerini $i+j$'nin değerlerine göre gruplayalım. Bir anlamda x_i, y_j ve x_iy_j terimlerine sanki sırasıyla i, j ve $i+j$'inci "dereceden" terimlermiş gibi davranalım

$i+j$'nin 0 olduğu grup, tüm kısmi çarpımlarda hep aynı kalıyor: x_0y_0.

$i+j$'nin 1 olduğu grup ikinci satırda beliriyor ve o satırdan sonra hiç değişikliğe uğramıyor: $x_0y_1 + x_1y_0$.

Öte yandan $i+j$ değerinin 2 ya da daha büyük olduğu gruplar bir süre değişiyorlar, ama bir zaman sonra da sabitleniyorlar. Örneğin $i+j$'nin 2 olduğu grup, ikinci adımda x_1y_1 olarak beliriyor, ama bir sonraki adımda

$$x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0$$

oluyor ve bundan sonra hiç değişmiyor. Ve $i+j$'nin 3 olduğu grup dördüncü adımda sabitleniyor, o adımdan sonra hep

$$(x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0)$$

oluyor.

Genel olarak, $i+j$'nin k olduğu grup $k+1$'inci adımda sabitlenecek, daha önce değil.

Anlaşılacağı üzere, $\sum x_i$ serisinin n'inci kısmi toplamıyla $\sum y_i$ serisinin m'inci kısmi toplamını çarpıp, çarpımı yukardaki gibi $i+j$ değerine göre gruplarsak,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} y_j\right) = \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k\ ,\ i\le n\ ,\ j\le m} x_iy_i\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Sağ tarafta toplanan

$$\sum_{i+j=k,\, i\le n,\, j\le m} x_i y_j$$

terimleri n ve m'ye göre değişir. Ama $n \ge k$ ve $m \ge k$ ise bu terim artık değişmez, yani n ve m'yi k'dan büyükeşit alırsak değişmez. Ayrıca $i+j = k \le n$ ise, zorunlu olarak $i \le n$ olur. O halde, $k = n = m$ alarak, şu tanımı yapmak için yeterli nedenimiz var:

$$z_k = \sum_{i+j=k,\, i\le k,\, j\le k} x_i y_j = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}.$$

İşte, iki serinin Cauchy çarpımını bu z_k'lerin toplamı olarak tanımlayacağız:

$$\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right) = \sum_k z_k = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} x_i y_j\right).$$

Tanımın böyle yapılmasının nedeni aşağıdaki teoremde gizli:

Teorem 16.6 (Cauchy). *$\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri mutlak yakınsaksa ve z_k yukardaki gibi tanımlanmışsa, o zaman $\sum z_i$ serisi de mutlak yakınsaktır ve*

$$\sum z_i = \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)$$

olur.

Kanıt: Bu teoremin kanıtı, yukardaki teoremlerin kanıtından çok daha fazla dikkat ve yoğunlaşma gerektirir. Ama kanıtı muhteşem güzelliktedir.

$x_i y_j$ sayılarını bir tablo halinde yazalım:

	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y_0	x_0y_0	x_1y_0	x_2y_0	$\cdots$	x_iy_0	$\cdots$	x_ny_0
y_1	x_0y_1	x_1y_1	x_2y_1	$\cdots$	x_iy_1	$\cdots$	x_ny_1
y_2	x_0y_2	x_1y_2	x_2y_2	$\cdots$	x_iy_2	$\cdots$	x_ny_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_j	x_0y_j	x_1y_j	x_2y_j	$\cdots$	x_iy_j	$\cdots$	x_ny_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_n	x_0y_n	x_1y_n	x_2y_n	$\cdots$	x_iy_n	$\cdots$	x_ny_n

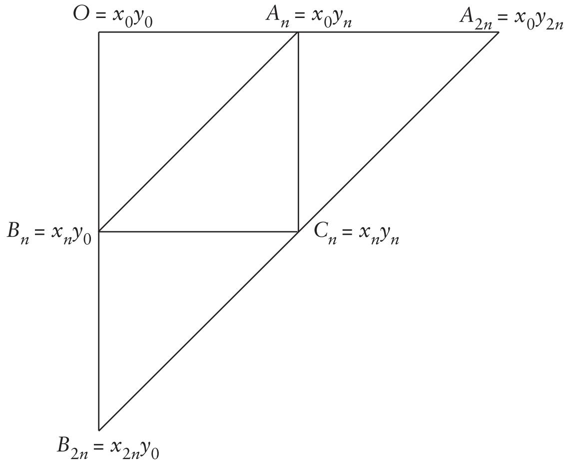
Ve

$$X_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n,$$

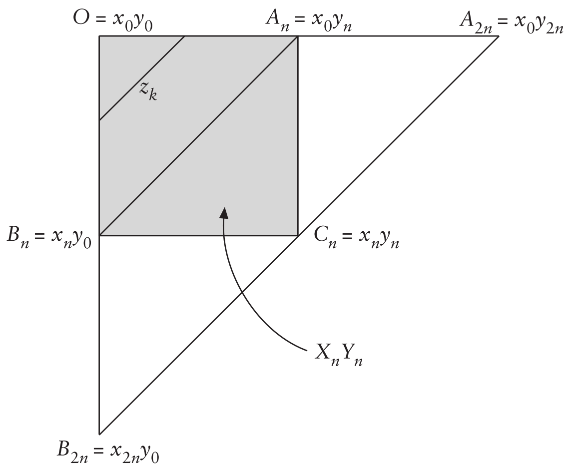
$$Y_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n,$$

$$Z_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n,$$

olsun. Şimdi X_nY_n çarpımını ve Z_n toplamını bir tablo üstünde temsil etmeye çalışalım.



Her z_k, yukardaki şekildeki k'ıncı çaprazın üstündeki sayıların toplamıdır (ve aşağıdaki şekilde gösterilmişlerdir). Örneğin, z_n, A_nB_n çaprazının üstündeki sayıların toplamıdır. Demek ki Z_n ve Z_{2n} sayıları, sırasıyla OA_nB_n ve $OA_{2n}B_{2n}$ üçgenlerinin içinde bulunan sayıların toplamıdır. Ayrıca, X_nY_n sayısı, $OA_nC_nB_n$ dörtgeninin içindeki sayıların toplamıdır.



Eğer her x_i ve $y_i \geq 0$ ise, şekilden de görüleceği üzere, her n için,

$$Z_n \leq X_n Y_n \leq Z_{2n}$$

ve dolayısıyla

$$X_n Y_n \leq Z_{2n} \leq X_{2n} Y_{2n}$$

eşitsizlikleri doğru olur. Eğer X ve Y sayıları sırasıyla $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin limitleriyse, son eşitsizlikten ve Sandviç Teoremi'nden, $(Z_n)_n$ dizisinin limitinin XY olduğu çıkar.

Şimdi, x_i ve y_i sayılarının pozitif olduklarını varsaymaktan vazgeçelim.

$$x'_i = |x_i|,\ y'_i = |x_i|$$

ve

$$z'_k = \sum_{i+j=k} x'_i y'_i = x'_k y'_0 + \cdots + x'_0 y'_k$$

olsun. Şekilden de görüleceği üzere, eğer

$$\triangle = \triangle_n = \{(i,j) : i \leq n,\ j \leq n,\ i+j > n\}$$

tanımını yaparsak,

$$X_n Y_n - Z_n = \sum_{\triangle} x_i y_j$$

eşitliği ve aynı nedenden,

$$X'_n Y'_n - Z'_n = \sum_{\triangle} x'_i y'_j$$

eşitliği geçerlidir. Demek ki,

$$|X_n Y_n - Z_n| = \left|\sum_{\triangle} x_i y_j\right| \leq \sum_{\triangle} |x_i y_j| = \sum_{\triangle} |x_i||y_j| = \sum_{\triangle} x'_i y'_j = X'_n Y'_n - Z'_n$$

olur. Ama kanıtımızın birinci kısmından yukardaki eşitliğin en sağdaki teriminin 0'a yakınsadığını biliyoruz. Demek ki

$$0 = \lim_{n\to\infty} (X_n Y_n - Z_n) = XY - \lim_{n\to\infty} Z_n,$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = XY.$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Bu teoremi, yakınsak olsunlar veya olmasınlar, $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin çarpımının tanımı olarak kullanabiliriz. Eğer

$$z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}$$

ise, $\sum z_i$ serisine $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin ***Cauchy çarpımı*** adı verilir. Yukardaki teoreme göre eğer

$$\sum x_i \text{ ve } \sum y_i$$

serileri mutlak yakınsaksa, Cauchy çarpımıyla limitlerin (sayısal olarak) çarpımları arasında bir fark yoktur.

Örnekler

16.2. Yukardaki teoremin bir uygulaması olarak, $(\exp x)(\exp y) = \exp(x + y)$ eşitliğini (bir defa daha) kanıtlayalım.
Kanıt: exp serisinin mutlak yakınsak olduğunu bildiğimizden, yukardaki teoremi uygulayabiliriz. $x_i = x^i/i!$ ve $y_i = y^i/i!$ olsun. O zaman,

$$z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!} = \sum_{i+j=k} \frac{1}{k!}\frac{k!}{i!j!} x^i y^i = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} x^i y^{k-i} = \frac{(x+y)^k}{k!}$$

olur ve Teorem 16.6'dan dolayı,

$$\exp x \exp y = \left(\sum \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum \frac{y^i}{i!}\right) = \sum z_i = \sum \frac{(x+y)^i}{i!} = \exp(x+y)$$

elde ederiz. □

16.3. $|r| < 1$ olsun ve Cauchy çarpımında $x_i = y_i = r^i$ alalım. $\sum x_i$ mutlak yakınsak olduğundan ve $\frac{1}{1-r}$ sayısına yakınsadığından, Cauchy çarpımı da mutlak yakınsaktır. Cauchy çarpımının terimleri,

$$z_n = \sum_{i=0}^{n} r^i r^{n-i} = (n+1)r^n$$

olduğundan,

$$\sum (n+1)r^n = \frac{1}{(1-r)^2}$$

olur.

16.4. Yakınsak iki serinin Cauchy çarpımı yakınsak olmak zorunda değildir. Örneğin,

$$x_i = y_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}}$$

olsun. Gelecek bölümde göreceğimiz Teorem 17.1'e göre $\sum x_i = \sum y_i$ yakınsaktır. Cauchy çarpımının terimi

$$z_n = (-1)^n\left(\frac{1}{1\cdot(n+1)} + \frac{1}{2\cdot n} + \frac{1}{3\cdot(n-1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdot 1}\right)$$

olur. Ama $1 \leq i \leq n+1$ için

$$i \cdot (n+1-i) \leq (n+1) \cdot (n+1) = (n+1)^2$$

olduğundan

$$|z_n| \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$$

olur ve genel terimi 0'a yakınsamadığından $\sum z_i$ yakınsak olamaz.
Ancak birazdan Cauchy çarpımının yakınsak olması için iki diziden sadece birinin mutlak yakınsak olmasının yettiğini göreceğiz.

Alıştırmalar

16.5. Örnek 15.29'dan

$$\cos x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}\ ,\ \sin x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

tanımlarını anımsayalım. Teorem 16.6'yı kullanarak, her x, y gerçel sayıları için,

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \text{ ve } \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

eşitliklerini kanıtlayın.

16.6. Teorem 16.6'yı kullanarak, her x gerçel sayısı için, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

16.7. $|r| < 1$ için

$$\sum nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitliğini kanıtlayın. İpucu: Örnek 16.3.

16.8. $|r| < 1$ için Cauchy çarpım formülünü terimleri $x_i = r^i$ ve $y_i = ir^i$ olan serilere uygulayın. İpucu: Alıştırma 16.7.

Teorem 16.6'nın geçerli olması için, serilerin ikisinin birden değil, sadece birinin mutlak yakınsak olması yeterlidir:

Teorem 16.7 (Mertens). *$\sum x_i$ mutlak yakınsaksa, $\sum y_i$ yakınsaksa ve*

$$z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}$$

olarak tanımlanmışsa, o zaman $\sum z_i$ serisi de mutlak yakınsaktır ve

$$\sum z_i = \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)$$

olur.

Kanıt: Yukardaki teoremin kanıtındaki X_n, Y_n ve Z_n tanımlarını kabul edelim. Herhangi bir $\epsilon > 0$ seçelim. $|Z_n - XY|$ sayısının bir zaman sonra ϵ'dan küçük olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için, önce Z_n ifadesiyle oynayalım:

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{i+j\le n} x_i y_j = \sum_{i=0}^{n}\left(x_i \sum_{j=0}^{n-i} y_j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} x_i Y_{n-i} = \sum_{k=0}^{n} Y_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} [(Y_k - Y)x_{n-k} + Y x_{k-n}] \\ &= \sum_{k=0}^{n} (Y_k - Y)x_{n-k} + Y \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (Y_k - Y)x_{n-k} + Y X_n. \end{aligned}$$

Demek ki,

$$Z_n - XY = \sum_{k=0}^{n} (Y_k - Y)x_{n-k} + Y(X_n - X)$$

ve

$$|Z_n - XY| \le \sum_{k=0}^{n} |Y_k - Y||x_{n-k}| + |Y||X_n - X|.$$

Sağdaki toplamı, n'yi yeterince büyük seçerek ϵ'dan küçük yapacağız. En sağdaki $|Y||X_n - X|$ teriminde bir sorun yok. Sorun, toplanan $|Y_k - Y||x_{n-k}|$ ifadelerinde. Eğer k büyükse, $|Y_k - Y|$ küçük olur; eğer k küçükse, $n-k$ büyük olur ve o zaman da $|x_{n-k}|$ küçük olur; yani her iki durumda da $|Y_k - Y||x_{n-k}|$ ifadesi küçüktür. Bu iyi haber. Ama bu küçük ifadelerden az buz değil, tam $n+1$ tane var; her biri çok küçük de olsa, n çok büyük olduğundan, bu ifadeler toplandığında ϵ'u aşabiliriz. Bu sorunu aşmanın bir yolu var.

$\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$ olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $k > N_1$ için,

$$|Y_k - Y| < \frac{\epsilon/3}{1 + \sum |x_i|}$$

olur. $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$ olduğundan, $\{|Y_n - Y| : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi üstten sınırlıdır. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğundan, öyle bir N_2 vardır ki, her $k > N_2$ için,

$$|x_k| < \frac{\epsilon}{1 + 3(N_1 + 1)\sup |Y_n - Y|}$$

olur. $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ olduğundan, öyle bir N_3 vardır ki, her $n > N_3$ için,

$$|X_n - X| < \frac{\epsilon/3}{1 + |Y|}$$

olur. Şimdi $N = N_1 + N_2 + N_3$ olsun. Her $n > N$ için,

$$\begin{aligned}
|Z_n - XY| &\leq \sum_{k=0}^{n} |Y_k - Y||x_{n-k}| + |Y||X_n - X| \\
&= \sum_{k=0}^{N_1} |Y_k - Y||x_{n-k}| + \sum_{k=N_1+1}^{n} |Y_k - Y||x_{n-k}| + |Y||X_n - X| \\
&< \sum_{k=0}^{N_1} \frac{\epsilon|Y_k - Y|}{1 + 3(N_1+1)\sup|Y_n - Y|} + \sum_{k=N_1+1}^{n} \frac{\epsilon/3}{1+\sum|x_i|}|x_{n-k}| \\
&\qquad + |Y|\frac{\epsilon/3}{1+|Y|} \\
&= \frac{(N_1+1)\epsilon|Y_k - Y|}{1 + 3(N_1+1)\sup|Y_n - Y|} + \frac{\epsilon}{3}\frac{\sum_{k=N_1+1}|x_{n-k}|}{1+\sum|x_i|} + |Y|\frac{\epsilon/3}{1+|Y|} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

eşitlik ve eşitsizliklerini elde ederiz ve böylece kanıtımız tamamlanmış olur. □

16.3 Cesàro Ortalaması ve Toplamı

Bir $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisinin ***Cesàro ortalaması***, eğer varsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

limitidir, yani dizinin ilk n teriminin aritmetik ortalamasının limitidir. Belki beklenmedik bir şekilde, dizinin ortalamalarının limiti dizinin limitidir. Eğer dizinin limiti varsa elbette... Ama dizinin limiti olmasa da Cesàro ortalaması olabilir. $x_i = (-1)^{i+1}$ ise, dizi yakınsak değildir ama kolayca görüleceği üzere dizinin Cesàro ortalaması $1/2$'dir.

Bu altbölümde bu sonucu ve bu sonucun serilere olan ilginç bir uygulamasını kanıtlayacağız.

Cesàro ortalamalarının hem soyut hem de uygulamalı matematiğin çok önemli bir konusu olan Fourier serilerine önemli uygulamaları vardır.

Teorem 16.8 (Cauchy, 1821)**.** *Eğer* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *varsa, Cesàro ortalaması da vardır ve iki sayı birbirine eşittir. Yani* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *varsa,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

olur.

Kanıt: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olsun. x'i 0 alabileceğimizi gösterelim önce. $y_n = x_n - x$ olsun. O zaman,

$$\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} = \frac{(x_1 - x) + \cdots + (x_n - x)}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - x$$

olur. Demek ki $(x_n)_n$ dizisinin Cesàro ortalamasının x olduğunu göstermekle $(y_n)_n$ dizisinin Cesàro ortalamasının 0 olduğunu kanıtlamak aynı şey. Dolayısıyla, $(y_n)_n$ dizisinin limiti 0 olduğundan, $(x_n)_n$ dizisi yerine $(y_n)_n$ dizisini alarak bundan böyle $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ varsayımını yapabiliriz.

$\epsilon > 0$ verilmiş olsun. $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ olsun.

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğundan, her $n > N$ için,

$$|x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı bir N vardır.

$\lim_{n\to\infty} s_N/n = 0$ olduğundan, her $n > M$ için, $|s_N/n| < \epsilon/2$ eşitsizliklerinin sağlandığı bir M vardır. M'yi N'den büyük alabiliriz. O zaman, her $n > M$ için,

$$\left|\frac{s_n}{n}\right| = \left|\frac{s_N}{n} + \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n}\right| \le \left|\frac{s_N}{n}\right| + \frac{|x_{N+1}| + \cdots + |x_n|}{n}$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \overbrace{\frac{\epsilon}{2} + \cdots + \frac{\epsilon}{2}}^{n-N \text{ tane}} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{(n-N)\epsilon/2}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n\epsilon/2}{n} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olur. Bu da, $\lim_{n\to\infty} s_n/n = 0$ eşitliğini, yani teoremi kanıtlar. □

Örnekler

16.9. $x_i = 1/i$ olsun. Teorem 16.8'e göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 0$$

olur.

16.10. *Aşağıdaki limiti gösterin:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt[i]{i} = 1.$$

(Bkz. Alıştırma 5.2.)

Çözüm: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[i]{i} = 1$ eşitliğinden ve teoremden hemen çıkıyor. □

16.11. *Eğer* $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \ell$ *ise* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \ell$ *olduğunu kanıtlayın.*

Kanıt: $y_n = x_{n+1} - x_n$ olsun. O zaman

$$x_n - x_0 = y_{n-1} + y_{n-2} + \cdots + y_0$$

olur. Ama teoreme göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n-1} + y_{n-2} + \cdots + y_0}{n} = \ell$$

olur. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n-1} + y_{n-2} + \cdots + y_0}{n} = \ell.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Geometrik ortalama da aritmetik ortalama gibi davranır ama terimleri ve limiti pozitif alma koşuluyla. Yeri gelmişken bunu da kanıtlayalım:

Teorem 16.9. *$(x_n)_n$, limiti x olan pozitif bir dizi olsun. O zaman*

$$\lim_{n\to\infty} (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$$

limiti vardır ve x'e eşittir.

Kanıt: Önce $x > 0$ varsayımını yapalım. Küçük bir $\epsilon > 0$ sayısı seçelim. Bu ϵ sayısının $0 < x - \epsilon$ eşitsizliğini sağladığını varsayabiliriz. Her $n > N$ için $|x_n - x| < \epsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı bir N seçelim. $x_1x_2 \cdots x_N$ çarpımına a diyelim. O zaman her $n > N$ için,

$$x_1x_2 \cdots x_n = x_1x_2 \cdots x_Nx_{N+1} \cdots x_n = ax_{N+1} \cdots x_n$$

yazarsak,

$$a(x-\epsilon)^{n-N} \le x_1x_2 \cdots x_n \le a(x+\epsilon)^{n-N}$$

eşitsizliklerini buluruz. Bu eşitsizlikleri biraz daha düzgün yazalım:

$$\frac{a}{(x-\epsilon)^N}(x-\epsilon)^n \le x_1x_2 \cdots x_n \le \frac{a}{(x+\epsilon)^N}(x+\epsilon)^n.$$

Her üç tarafın da n'inci kökünü alırsak

$$\left(\frac{a}{(x-\epsilon)^N}\right)^{1/n}(x-\epsilon) \le (x_1x_2 \cdots x_n)^{1/n} \le \left(\frac{a}{(x+\epsilon)^N}\right)^{1/n}(x+\epsilon)$$

buluruz ve n sonsuza giderken limit alındığında (Alıştırma 6.3'ten dolayı),

$$x - \epsilon \le \lim_{n\to\infty} (x_1x_2 \cdots x_n)^{1/n} \le x + \epsilon$$

çıkar. Bu da istediğimizi kanıtlar.

Eğer $x = 0$ ise, $x_n < \epsilon$ eşitsizliğini kullanıp aynı sonucu elde edebiliriz. Daha kolay olan kanıtı okura bırakıyoruz. Aynı sonuç, Teorem 3.26'da kanıtlanan

$$(\mathrm{AG}_n) \qquad (x_1x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

eşitsizliğinden ve Teorem 16.8'den de çıkar. □

Örnekler

16.12. Teorem 16.9'dan $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ eşitliğini bir kez daha kanıtlayabiliriz. Nitekim

$$x_n = \frac{n+1}{n}$$

olsun. O zaman $x = 1$ ve

$$x_1 \cdots x_n = n$$

olur. Teoremi uygulamak yeterli.

16.13. Aynı sonucu kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

eşitliğini kanıtlayabiliriz. Nitekim

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

olsun. O zaman $x = e$ olur. Ayrıca sadeleştirmelerden sonra,

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

bulunduğundan, Teorem 16.9'dan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

bulunur. Bu da tabii

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

demektir.

Tanım. $(x_i)_{i\geq 1}$ bir dizi olsun. $\sum_{i\geq 1} x_i$ serisinin kısmi toplamlarına s_n diyelim:

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Bu $(x_i)_{i\geq 1}$ dizisinin ***Cesàro toplamı***, eğer varsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}$$

limitidir, yani kısmi toplamların aritmetik ortalamalarının limitidir.

Teorem 16.10. *Eğer $\sum_{i\geq 1} x_i$ serisi yakınsaksa, Cesàro toplamı da vardır ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

eşitliği sağlanır.

Öte yandan $\sum_{i\geq 1} x_i$ serisi yakınsak olmasa da Cesàro toplamı olabilir. Örneğin, $x_i = (-1)^{i+1}$ ise, $\sum_{i\geq 1} x_i$ serisi yakınsak değildir ama kolayca görüleceği üzere dizinin Cesàro toplamı $1/2$'dir.

Kanıt: $\sum_{i\geq 1} x_i$ serisi x'e yakınsasın. $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ olsun. O zaman, varsayıma göre, $\lim_{n\to\infty} s_n = x$. Şimdi $(s_n)_n$ dizisine Teorem 16.8'i uygulayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = x$$

buluruz. □

Alıştırmalar

16.14. $x_n = (-1)^n n$ ve

$$\sigma_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

olsun. $\limsup \sigma_n$ ve $\liminf \sigma_n$ sayılarını bularak $(x_n)_n$ dizisinin Cesàro ortalamasının olmadığını gösterin.

16.15. Cesàro ortalaması olmayan ve sadece 0 ve 1'den oluşan bir dizi bulun.

16.16. Limiti olmayan ama Cesàro ortalaması olan bir dizi bulun.

Cesàro'nun Diğer Toplamları. İtalyan diferansiyel geometrici Ernesto Cesàro (1859-1906) başka toplamlar da bulmuştur.

Eğer bir $(a_n)_n$ dizisi verilmiş olsun.

$$a_{n,-1} = a_n$$

olsun ve her $k \geq 0$ doğal sayısı için, $(a_{n,k})_n$ dizisini şöyle tanımlayalım:

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} a_{i,k-1}.$$

Eğer $k = 0$ alırsak,

$$a_{n,0} = a_0 + \cdots + a_n = s_n$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca,

$$a_{n,1} = s_0 + \cdots + s_n$$

olur, yani $a_{n,1}$ kısmi toplamların toplamıdır.

Bir başka tanıma daha ihtiyacımız var, $(e_n)_n$ dizisi, tümevarımla,

$$e_0 = 1 \text{ ve } n \geq 1 \text{ için } e_n = 0$$

olarak tanımlanmış olsun. O zaman $e_{n,k}$ sayıları şöyle olur:

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45

$e_{n,k}$ sayıları

$k \geq 0$ için $(a_n)_n$ dizisinin (C, k)-toplamını şöyle tanımlayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n,k}}{e_{n,k}}.$$

$(a_n)_n$ dizisinin $(C, 0)$-toplamı bildiğimiz sonsuz toplamdır:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n,0}}{e_{n,0}} = \lim_{n\to\infty} a_{n,0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_{n,-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum a_i$$

$(a_n)_n$ dizisinin $(C, 1)$-toplamı bu bölümde ele aldığımız Cesàro toplamıdır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n,0}}{e_{n,0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_{n,0}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n}.$$

Genel bir teoreme göre, bir dizinin (C, k)-toplamı varsa $(C, k+1)$-toplamı da vardır.