15. Pozitif Seriler ve Mutlak Yakınsaklık

15.1 Pozitif Seriler

Terimleri negatif olmayan serilerin analizi oldukça kolaydır. Nitekim, böyle bir serinin yakınsaması için, kısmi toplamlarının sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur. Bunun çok kolay kanıtını birazdan vereceğiz. Böylece, terimleri negatif olmayan bir serinin yakınsaklığını, serinin hangi sayıya yakınsadığını bilmeden de bulabilme imkanına sahip olacağız. Geçmişte bunun örneklerini çok gördük. Örneğin,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^5}$$

serisinin terimleri pozitiftir ve bu serinin kısmi toplamları

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^5} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$$

eşitsizliğini sağladığından (Örnek 7.10), Teorem 7.1'den dolayı, seri yakınsar. Ancak, bırakın hangi sayıya yakınsadığının bilinmesini, serinin ne tür (örneğin kesirli) bir sayıya yakınsadığı bile bilinmiyor... Bu ve benzer konular bugün revaçta olan araştırma konularıdır. Terimleri negatif olmayan bir seriye kısaca ***pozitif seri*** diyeceğiz. Böyle bir $\sum_{i\geq 0} x_i$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

artan bir dizidir elbet. Dolayısıyla pozitif bir seri eğer ıraksaksa ancak ∞'a ıraksayabilir (Teorem 12.1). Örneğin $\sum_{i\geq 1} 1/i = \infty$ (Bölüm 7.2).

Teorem 15.1. *Pozitif bir serinin yakınsaması için kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur.*

Kanıt: Eğer seri s'ye yakınsıyorsa, kısmi toplamlar dizisi $(s_n)_n$ artan bir dizi olduğundan, $s_n \leq s$ elde edilir.

Şimdi de, artan bir dizi olan kısmi toplamlar dizisi $(s_n)_n$'nin üstten sınırlı olduğunu varsayalım. O zaman Teorem 7.1'e göre, $(s_n)_n$ dizisi, yani seri yakınsaktır. □

Kanıttan da anlaşılacağı üzere, Teorem 15.1 bize aslında biraz daha fazla bilgi veriyor:

Teorem 15.2. *Eğer $\sum x_i$ pozitif bir seriyse, $\sum x_i$ serisinin yakınsaması için kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur. Ayrıca eğer M, kısmi toplamların bir üstsınırıysa,*

$$\sum x_i \leq M$$

olur ve eğer m, kısmi toplamların en küçük üstsınırıysa,

$$\sum x_i = m$$

olur. Ayrıca her n için

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \leq \sum x_i$$

olur. □

Tabii bütün bu dediklerimizin doğru olması için, serinin terimlerinin hep değil, sadece "bir zaman sonra" negatif olmamaları yeterlidir.

Sonuç 15.3. *$\sum x_i$ pozitif bir seri olsun. $(x_{i_k})_k$, $(x_i)_i$ dizisinin bir altdizisi olsun. Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa, $\sum_k x_{i_k}$ serisi de yakınsaktır ve limiti $\sum x_i$ sayısından küçükeşittir. Eğer $\sum_k x_{i_k}$ serisi ıraksaksa, $\sum x_i$ serisi de ıraksaktır.*

Kanıt: $\sum x_i = s$ olsun. s_n ve t_n sayıları sırasıyla, $\sum x_i$ ve $\sum_k x_{i_k}$ serilerinin kısmi toplamları olsunlar. Elbette,

$$t_n = x_{i_0} + x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} \leq x_0 + x_1 + \cdots + x_{i_n} = s_{i_n} \leq s$$

olur. Teorem 15.2'ye göre $\sum x_{i_k}$ serisi yakınsaktır. İkinci kısım birincisinden çıkar. □

Örnekler

15.1. Örnek 6.8'de, terimleri

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j(i-j)} = \frac{1}{1(i-1)} + \frac{1}{2(i-2)} + \cdots + \frac{1}{j(i-j)} + \cdots + \frac{1}{(i-1)\cdot 1},$$

olan dizinin 0'a yakınsadığını, yani,

$$\lim_{i\to\infty} x_i = 0$$

eşitliğini kanıtlamıştık. Demek ki,

$$\sum_{i=2}^{\infty} x_i$$

serisinin yakınsak olma ihtimali var (Sonuç 14.5). Bu seri yakınsak mıdır? Değildir[1]:

$$\frac{1}{j(i-j)} = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{i-j} + \frac{1}{j}\right)$$

olduğundan,

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j(i-j)} = \frac{1}{i-1}\left(\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{i-j} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j}\right) \geq \frac{1}{i}(1+1) = \frac{2}{i} > \frac{1}{i}$$

olur. Ama $\sum_{i=1}^{n} 1/i$ dizisinin üstten sınırlı olmadığını biliyoruz (Bölüm 7.2). Demek ki terimleri $\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j(i-j)}$ olan seri sonsuza ıraksar.

15.2. $(x_n)_n$ *sonsuza ıraksayan artan bir dizi olsun. Eğer* $q > 0$ *bir kesirli sayı ise*

$$\sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i^q x_{i+1}}$$

serisi yakınsaktır. Eğer $q \leq 0$ *ise seri ıraksaktır.*

Kanıt: $q = 0$ durumunu Örnek 14.26'te irdelemiştik. Bundan $q \leq 0$ durumu da çıkar çünkü eğer $x_i > 1$ ise,

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i^q x_{i+1}} \geq \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}$$

olur.

Şimdi $q = 1$ olsun. O zaman, teleskopik seri elde ederiz:

$$\sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i^q x_{i+1}} = \sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i x_{i+1}} = \sum \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{x_0},$$

ve seri yakınsar. Buradan kolaylıkla serinin $q \geq 1$ için de yakınsadığı görülür.

Son olarak $0 < q < 1$ olsun. Sonuç 3.20'de $x = x_i/x_{i+1}$ alırsak,

$$1 - \frac{x_i}{x_{i+1}} \leq \frac{1}{q}\left(1 - \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^q\right)$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin taraflarını x_i^q sayısına bölersek,

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i^q x_{i+1}} \leq \frac{1}{q}\left(\frac{1}{x_i^q} - \frac{1}{x_{i+1}^q}\right)$$

buluruz. Terimleri sağdaki ifade olan seri teleskopik seridir ve yakınsar. Demek ki terimleri soldaki ifade olan seri de yakınsar. □

15.3. [du Bois-Reymond] *Yakınsak her* $\sum a_i$ *pozitif serisi için,* $\lim b_n/a_n = \infty$ *eşitliğini sağlayan yakınsak bir* $\sum b_i$ *serisi vardır.*

Kanıt: Her i için $a_i > 0$ varsayımını yapabiliriz. $s_n = a_0 + \cdots + a_n$, $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ ve

$$u_n = \frac{1}{s - s_{n-1}} = \frac{1}{\sum_{i=n}^{\infty} a_i}$$

olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ olur. Bir $q > 0$ kesirli sayısı seçelim.

$$b_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^q u_{n+1}}$$

[1] Yusuf Ünlü'ye ve İlham Aliyev'e teşekkürler.

olsun. Örnek 15.2'ye göre $\sum b_i$ yakınsaktır. Ayrıca

$$b_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^q u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^q} - \frac{1}{u_n^{q-1} u_{n+1}} = (s - s_{n-1})^q - (s - s_{n-1})^{q-1}(s - s_n)$$
$$= (s - s_{n-1})^{q-1}(s_n - s_{n-1}) = u_n^{1-q} a_n$$

olduğundan, eğer $q < 1$ ise

$$\frac{b_n}{a_n} = u_n^{1-q} \longrightarrow \infty$$

olur. □

Alıştırmalar

15.4. Teorem 15.2'yi kullanarak $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ pozitif yakınsak serilerse, $\sum(x_i + y_i)$ serisinin de yakınsak olduğunu kanıtlayın. (Bir sonraki alıştırmaya da bakın mutlaka.)

15.5. Serinin yakınsaklığının tanımını kullanarak, $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri yakınsaksa, $\sum(x_i+y_i)$ ve $\sum rx_i$ serilerinin de yakınsak olduğunu ve $\sum(x_i+y_i) = \sum x_i + \sum y_i$ ve $\sum rx_i = r \sum x_i$ eşitliklerini kanıtlayın.

Teorem 14.13 ve 14.14'e göre pozitif bir serinin terimlerini istediğimiz sırada ve istediğimiz gibi gruplayarak toplayabiliriz. Bu da serinin yakınsaklığına karar vermede hatırı sayılır bir kolaylık sağlar. Hatta bu durumda seriyi yazmak da kolaylaşır: Eğer $X \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ sayılabilir bir kümeyse, $\sum_{x \in X} x$ anlamlıdır; nitekim X'i nasıl iyisıralarsak sıralayalım, diyelim

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\},$$

olarak iyisıraladık, o zaman, Teorem 14.13'e göre, $\sum_n x_n$ serisinin değeri (bir gerçel sayı ya da ∞), X'in seçilen iyisıralamasından bağımsızdır. Dolayısıyla bu seriyi $\sum_{x \in X} x$ ya da $\sum_X x$ hatta $\sum X$ olarak tanımlayabiliriz. Hatta eğer $0 \notin X$ ise $\sum_{x \in X} 1/x$ ifadesi de anlamlıdır. İşte bir örnek

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \frac{1}{n}.$$

Bir başka örnek: Eğer P asal sayılar kümesiyse,

$$\sum_P \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots .$$

Ve son örnek: Eğer K, doğal sayılarda pozitif karelerin kümesiyse,

$$\sum_K \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

anlamına gelir.

Bölüm 7.2'de $\sum_{n \geq 1} 1/n$ serisinin toplamının sonsuza ıraksadığını gördük. Peki tüm n'leri değil de bazı n'lerin terslerini toplarsak ne olur? Örneğin P asal sayılar kümesi olmak üzere $\sum_P \frac{1}{p}$ serisi yakınsak mıdır, yoksa ıraksak mıdır? $\sum_{n\geq 1} 1/n = \infty$ olduğundan, hislerimiz, eğer "çok" asal varsa seri sonsuza ıraksamalı ama "az" asal varsa seri yakınsamalı diyor. Bu durumda seri gerçekten sonsuza ıraksar ama bunun kanıtı kolay değildir[2]. Aşağıda bu minvalde bir soru ve şık çözümünü bulacaksınız.

Örnek 15.6. B, onluk tabanda yazıldığında içinde 0 rakamı belirmeyen doğal sayılar kümesi olsun.

$$\sum_{n\in B} \frac{1}{n}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyelim.

Önce hislerimizi konuşturalım. B kümesinde doğal sayıların birçoğu var mıdır, yoksa tam tersine B kümesinde az mı sayı vardır? n basamaklı bir doğal sayıda 0 belirmeme olasılığı, n çok büyük olduğunda çok küçüktür. (1 milyar defa zar attığınızda, en az bir defa şeş geleceğinden emin olmalısınız. Nerdeyse...) Dolayısıyla B kümesinde az sayı olduğu ve serinin yakınsak olması gerektiği söylenebilir. Göreceğiz...

$$\alpha = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{9}$$

olsun.

$$G_k = \sum_{n\in B, n<10^k} \frac{1}{n}$$

olsun. Bulmak istediğimiz elbette $\lim_{k\to\infty} G_k$ limitidir. Her k için $G_k < 10\alpha$ eşitsizliğini kanıtlayacağız ve böylece serinin yakınsak olduğunu kanıtlamış olacağız. $k = 1$ için $G_k = G_1 = \alpha < 10\alpha$ olduğundan eşitsizlik doğru. Şimdi eşitsizliğin k için doğru olduğunu varsayıp $k+1$ için kanıtlayalım. $1, \ldots, 9$ sayılarını muaf tutarak B'deki n sayılarının son hanelerini 0'a dönüştürelim ve böylece elde edilen sayıyı n' olarak gösterelim. Elbette n' sayısı 10'a bölünür ve $n'' = n'/10 \in B$ olur. Ayrıca elbette $10n'' = n' < n \leq n' + 9 = 10n'' + 9$ olur; dolayısıyla tam 9 tane $n \in B$ sayısı aynı $n'' \in B$ sayısını verir. Şimdi hesap yapalım (aşağıdaki toplamlarda doğal sayıların istisnasız hep B kümesinden alındığını varsayacağız, yani $1/1205$ gibi sayılar belirmeyecek):

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= \sum_{n<10^{k+1}} \frac{1}{n} = \alpha + \sum_{10<n<10^{k+1}} \frac{1}{n} \\ &< \alpha + \sum_{10<n<10^{k+1}} \frac{1}{n'} = \alpha + \frac{1}{10} \sum_{10<n<10^{k+1}} \frac{1}{n''} \\ &= \alpha + \frac{9}{10} \sum_{n''<10^k} \frac{1}{n''} = \alpha + \frac{9G_k}{10} < \alpha + 9\alpha = 10\alpha. \end{aligned}$$

Demek ki seri 10α'dan daha küçük bir sayıya yakınsar.

Alıştırma 15.7. C, içinde 1 rakamı bulunmayan pozitif doğal sayılar kümesi olsun. $\sum_{n\in C} \frac{1}{n}$ serisi yakınsak mıdır ve yakınsaksa yukardaki örnekte verilen $\sum_{n\in B} 1/n$ serisinden küçük müdür?

[2]Bugün artık kanıtı bilinen Bertrand Postulatı'na göre her $n > 1$ doğal sayısı için n ile $2n$ arasında bir asal vardır. Bu serinin sonsuza ıraksadığı Bertrand Postulatı'ndan çıkar.

15.2 Kıyaslama Teoremleri

Aşağıdaki yakınsaklık kıstasının çok sık uygulaması vardır:

Teorem 15.4 (Karşılaştırma/Kıyaslama Kıstası)**.** *$\sum x_i$ ve $\sum y_i$ iki pozitif seri olsun. Eğer yeterince büyük i'ler için $x_i \le y_i$ oluyorsa, o zaman,*

i. *Eğer $\sum y_i$ serisi yakınsaksa $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır.*

ii. *Eğer $\sum x_i$ serisi ıraksaksa $\sum y_i$ serisi de ıraksaktır.*

Kanıt: İlk birkaç terimi yok sayarak, $x_i \le y_i$ eşitsizliğinin her i için vuku bulduğunu varsayabiliriz.

i. Teorem 15.2'ye göre

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \le \sum_{i=0}^{n} y_i \le \sum y_i$$

eşitsizliklerinden dolayı, $\sum x_i$ serisinin kısmi toplamlar dizisi, $\sum y_i$ serisi tarafından üstten sınırlanır. Gene Teorem 15.2'ye göre $\sum x_i$ serisi yakınsar ve $\sum x_i \le \sum y_i$ olur.

ii. Birinci kısımdan çıkar. □

Örnekler

15.8.
$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{9\times 11} + \frac{1}{13\times 15} + \cdots$$
serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Çözüm: Seri
$$\sum \frac{1}{(4i+1)(4i+3)}$$
olarak yazılabilir. Ama
$$\frac{1}{(4i+1)(4i+3)} < \frac{1}{(4i+1)^2}$$
olduğundan ve sağdaki terimlerden oluşan seri yakınsadığından, Teorem 15.4'e göre sorudaki seri de yakınsar[3].

15.9. *$\sum_{i\ge 1} r^i/i$ serisi $-1 < r < 1$ için mutlak yakınsaktır, $r \ge 1$ için sonsuza ıraksaktır.*

Kanıt: $0 \le r < 1$ için, $r^i/i \le r^i$ ve bu durumda $\sum_{i\ge 1} r^i$ yakınsak olduğundan, Teorem 15.4'e göre $\sum_{i\ge 1} r^i/i$ serisi de yakınsaktır.

$r \ge 1$ için, $r^i/i \ge 1/i$ olduğundan ve $\sum_{i\ge 1} 1/i$ ıraksak olduğundan, Teorem 15.4'e göre $\sum_{i\ge 1} r^i/i$ serisi de ıraksaktır.

15.10. *$\sum_{i=-2}^{\infty} \frac{2i}{3i^3+4}$ serisi yakınsaktır.*

Kanıt: Bu seri pozitif değildir, ama sadece ilk üç terimi pozitif değildir ve böylece Karşılaştırma Kıstası'nı uygulayabiliriz.

$$\frac{2i}{3i^3+4} \le \frac{3i}{3i^3} = \frac{1}{i^2}$$

[3] Sorudaki serinin $\pi/8$'e yakınsadığı bilinmektedir. Bir başka kitabımızda kanıtlarız.

olduğundan ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

yakınsak olduğundan Teorem 15.4'e göre serimiz yakınsaktır.

15.11. $\sum_{i>0} \frac{1}{\sqrt{i^2-1}}$ serisi ıraksaktır çünkü $i^2 - 1 \leq i^2$ ve dolayısıyla

$$\frac{1}{\sqrt{i^2-1}} > \frac{1}{i}$$

olur.

15.12. $\sum \frac{1}{\sqrt{i^2+1}}$ serisi ıraksaktır çünkü $i > 0$ için

$$\frac{1}{\sqrt{1+i^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{i^2+i^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{i}$$

olur ve $\sum 1/i$ serisi ıraksaktır.

Alıştırma 15.13. $r < -1$ için $\sum_{i\geq 1} r^i/i$ serisinin ıraksadığını kanıtlayın. (Ama seri $-\infty$'a ıraksamaz.)

Şimdi pozitif seriler üzerine hayatı kolaylaştıran birkaç kolay sonuç kanıtlayalım.

Sonuç 15.5. *$\sum x_i$ ve $\sum y_i$ iki pozitif seri olsun.*
i. $\limsup x_iy_i \neq \infty$ *olsun. Eğer $\sum 1/y_i$ yakınsaksa $\sum x_i$ de yakınsaktır. Eğer $\sum x_i$ ıraksaksa $\sum 1/y_i$ de ıraksaktır.*
ii. *Eğer* $\liminf x_iy_i \neq 0$ *ve $\sum 1/y_i$ ıraksaksa $\sum x_i$ de ıraksaktır.*

Kanıt: i. $\limsup x_iy_i \neq \infty$ olduğundan $(x_iy_i)_i$ dizisi üstten sınırlıdır. Demek ki öyle bir $A > 0$ vardır ki her i göstergeci için $x_iy_i \leq A$ olur. Demek ki $\sum x_i \leq A \sum 1/y_i$ olur. Sonuç bundan ve Teorem 15.4'ten çıkar.

ii. $\liminf x_iy_i \neq 0$ olduğundan $\liminf x_iy_i > 0$ olur. Demek ki öyle bir A vardır ki her i göstergeci için $A \leq x_iy_i$ olur. Demek ki $\sum x_i \geq A \sum 1/y_i = \infty$ olur. □

Buna benzer bir sonuç için bkz. Teorem 15.7.

Sonuç 15.6 (Oran Kıyaslama Testi). *$\sum x_i$ ve $\sum y_i$ iki pozitif seri olsun. Bir zaman sonra*

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq \frac{y_{i+1}}{y_i}$$

olsun.
i. *Eğer $\sum y_i$ yakınsaksa $\sum x_i$ de yakınsaktır.*
ii. *Eğer $\sum x_i$ ıraksaksa $\sum y_i$ de ıraksaktır.*

Kanıt: Eşitsizlik, $N-1$ göstergecinden doğru olsun ve $b = y_N/x_N$ olsun. Varsayımdan dolayı, her $i \geq N$ için,

$$\frac{x_i}{y_i} \leq \frac{x_N}{y_N} = b,$$

yani $x_i \leq by_i$ olur.

i. Eğer $\sum y_i$ yakınsaksa o zaman $\sum by_i$ serisi de yakınsaktır. Sonuç, $x_i \le by_i$ eşitsizliğinden ve Teorem 15.4'ten çıkar.

ii. Eğer $\sum x_i$ ıraksaksa, $x_i \le by_i$ eşitsizliğinden ve Teorem 15.4'ten, $\sum by_i$ serisinin de ∞'a ıraksadığı çıkar. Demek ki $\sum y_i$ serisi de ∞'a ıraksar. □

Örnekler

15.14. Sonuç 15.5.i'deki koşul yeterlidir ama gerekli değildir. Örneğin $x_i = 1/2^i$ ve $y_i = i!$ olsun. O zaman $\sum 1/y_i$ yakınsaktır ve $\limsup x_i y_i = \limsup i!/2^i = \lim i!/2^i = \infty$ olur (Örnek 6.1) ama gene de $\sum x_i$ yakınsar.

15.15. Eğer i bir kare değilse $x_i = 1/i^2$ olsun, eğer i bir kareyse, $x_i = 1/i^{2/3}$ olsun. Ve $y_i = i$ olsun. Bu durumda $\sum 1/y_i$ ıraksaktır ve $\limsup x_i y_i = \infty$ olur ama Örnek 19.5'te göreceğimiz üzere $\sum x_i$ serisi yakınsar. (Bu arada $\liminf x_i y_i = 0$ eşitliğine dikkat çekelim.)

Sonuç 15.5.ii için de gerekliliğin geçerli olmadığını göstermeyi okura bırakıyoruz.

15.16. $\sum(i^{1/i} - 1)$ *serisi yakınsak mıdır?*

Yanıt: Örnek 10.17'ye göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n} - 1}{1/n} = \infty$$

olur. Demek ki bir $A > 0$ için, mesela $A = 1$ için,

$$n^{1/n} - 1 > A\frac{1}{n}$$

olur. $\sum 1/i$ sonsuza ıraksadığından, $\sum(i^{1/i} - 1)$ serisi de sonsuza ıraksar. □

Teorem 15.7 (Kummer Kıstası, 1837)**.** *$\sum x_i$ ve $\sum y_i$ iki pozitif seri olsun. Eğer $\lim_{i\to\infty} x_i/y_i = \ell \ne 0, \infty$ ise, serilerden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır.*

Kanıt: $\ell > 0$ olmak zorunda. ϵ'u, $\ell - \epsilon > 0$ olacak biçimde seçelim, mesela $\epsilon = \ell/2$ olabilir. $a = \ell - \epsilon$ olsun. Öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için,

$$a = \ell - \epsilon \le \frac{x_i}{y_i} \le \ell + \epsilon,$$

ve dolayısıyla $ay_i \le x_i$ olur. Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa ya da $\sum y_i$ serisi ıraksaksa, sonuç Teorem 15.4'ten çıkar. Eğer $\sum y_i$ serisi yakınsaksa ya da $\sum x_i$ serisi ıraksaksa, aynı kanıt ℓ yerine $1/\ell$ ile yapılır. □

Bu teorem şiirsel bir dilde şunu söylüyor: Eğer $(x_i)_i$ ve $(y_i)_i$ dizileri "sonsuza doğru eşdeğerlerse", yani $(x_i/y_i)_i$ dizisinin limiti varsa ve bu limit 0 (ya da ∞) değilse, o zaman $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ pozitif serilerinin "doğaları" aynıdır.

Örnekler

15.17.

$$\sum \frac{2i}{3i^3 - 4}$$

serisi yakınsaktır.

Kanıt: $\sum_{i\ge 1} 1/i^2$ yakınsak olduğundan, Teorem 15.7'den çıkar. □

15.18.
$$\sum \frac{2^i + 3^{i+1}}{i^2 + 7^{2i+1}}$$
serisi yakınsaktır.
Kanıt:
$$\frac{2^i + 3^{i+1}}{i^2 + 7^{2i+1}} \simeq \frac{3^{i+1}}{7^{2i+1}} = \frac{3}{7} \times \left(\frac{3}{49}\right)^i$$
olduğundan ve $\sum (3/49)^i$ geometrik serisi yakınsak olduğundan (çünkü $-1 < 3/49 < 1$) seri yakınsaktır. □

15.19. $\sum x_i$ *pozitif ve yakınsak bir seriyse* $\sum \sqrt{x_i x_{i+1}}$ *serisi de yakınsaktır.*
Kanıt: Doğrudan Kummer kıstasından çıkar. □

15.20. $0 < q < p$ *iki kesirli sayı olsun.*
$$\sum \frac{1}{n^p - n^q}$$
serisinin yakınsaklığını tartışın.
Tartışma: $\frac{n^p - n^q}{n^p} = 1 - 1/n^{p-q}$ olduğundan, teoreme göre, eğer $p \geq 2$ ise seri yakınsar ve eğer $p \leq 1$ ise seri ıraksar. Diğer durumlar için bkz. Örnek 19.10. □

15.21. $\sum_{i>0} \frac{1}{i^{1+1/i}}$ *serisi yakınsar mı?*
Yanıt: Yakınsamaz. Bunu görmek için seriyi ıraksak olduğunu bildiğimiz $\sum 1/i$ serisiyle kıyaslamak yeterli:
$$\frac{1/i}{1/i^{1+1/i}} = \frac{i^{1+1/i}}{i} = i^{1/i} \longrightarrow 1$$
olduğundan, Teorem 15.7'ye göre seri ıraksar. □

Alıştırma 15.22. $\sum x_i$ pozitif ve yakınsak bir seriyse $\sum x_i/i$ serisinin de yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Kummer Dönüşümü. Teorem 15.7'yi şöyle de kanıtlayabiliriz: $\sum x_i$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım (mesela!) O zaman,
$$\sum x_i = \sum \left(\ell y_i + \left(1 - \ell\frac{y_i}{x_i}\right) x_i\right) = \ell \sum y_i + \sum \left(1 - \ell\frac{y_i}{x_i}\right) x_i$$
olur. Ama
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ell\, y_i}{x_i} = 1$$
olduğundan, bir zaman sonra
$$\left|1 - \frac{\ell y_i}{x_i}\right| < 1$$
olur ve en sağdaki serinin terimleri x_i'den küçük olurlar ve böylece Teorem 15.8'e göre, en sağdaki
$$\sum \left(1 - \ell\frac{y_i}{x_i}\right) x_i$$
serisi mutlak yakınsak olur. Demek ki,
$$(K) \qquad \sum y_i = \frac{1}{\ell}\left(\sum x_i - \sum \left(1 - \ell\frac{y_i}{x_i}\right) x_i\right).$$

Hemen bir uygulama verelim.

Örnek 15.23. $x_i = \frac{1}{i(i+1)}$ ve $y_i = \frac{1}{i^2}$ olsun. O zaman $\ell = \lim_{i\to\infty} x_i/y_i = 1$ olur ve yukardaki (K) formülü,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)} - \sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{i+1}{i}\right)\frac{1}{i(i+1)}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2(i+1)}\right) = 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2(i+1)}\end{aligned}$$

eşitliğini verir. Bu eşitlikten de,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} - 1$$

eşitliği elde edilir. Eğer sağdaki toplamın $\frac{\pi^2}{6} - 1$ olduğu biliniyorsa, bu bize daha fazla bilgi verir elbette.

Alıştırmalar

15.24. Aşağıdaki serilerin yakınsak olup olmadıklarını belirleyin.

$$\sum \frac{1}{i^2+3} \qquad \sum \frac{1}{i^2-101} \qquad \sum_{i=3}^{\infty}\frac{(2i+1)^2}{[i^2(i+1)]}$$

$$\sum_{i=3}^{\infty}\frac{2i+1}{i^2(i+1)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^2+i+1}{i(i+1)!} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^3+i+1}{i+2}$$

$$\sum \frac{5^{i+1}+3i}{7^i+2} \qquad \sum \frac{5^i+3^i}{6^i} \qquad \sum \frac{4^{2i-1}}{3^{3i+1}}$$

15.25. $\sum \frac{4^{2i-1}}{3^{3i+1}}$ serisinin toplamını bulun.

15.26. Her $k \geq 1$ doğal sayısı için,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)\cdots(i+k)}$$

toplamını bulun.

15.27. $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ olsun. $\sum_{n\geq 1} 1/H_n$ serisinin ıraksadığını kanıtlayın.

15.3 Mutlak Yakınsaklık

Pozitif serilerin önemi aşağıdaki teoremle daha da belirginleşecek.

Teorem 15.8 (Cauchy)**.** *Eğer $\sum |x_i|$ serisi yakınsaksa $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır ve $-\sum |x_i| \leq \sum x_i \leq \sum |x_i|$ olur.* (Ama genellikle iki serinin limiti arasında bundan başka herhangi bir ilişki yoktur.)

Kanıt: Toplamlar arasında bir ilişki olmadığından, $\sum |x_i|$ serisinin kısmi toplamları dizisinin Cauchy olduğunu kullanabiliriz ancak; bunu kullanarak $\sum x_i$

serisinin kısmi toplamları dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayacağız. $\epsilon > 0$, herhangi bir gerçel sayı olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her $n > m > N$ için,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{m} x_i\right| < \epsilon$$

yani,

(1)
$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right| < \epsilon$$

olsun. Ama

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=m+1}^{n} |x_i|$$

olduğundan, her $n > m > N$ için,

$$\sum_{i=m+1}^{n} |x_i| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N bulmak yeterli, çünkü o zaman (1) elbette sağlanır. Ama $\sum |x_i|$ serisi yakınsak olduğundan, böyle bir N vardır (Teorem 14.3).

Toplamlar arasındaki eşitsizlik bariz olmalı çünkü benzer eşitsizlik kısmi toplamlar arasında vardır. □

Teorem 15.8'in İkinci (Zeki) Kanıtı: $0 \le x_i + |x_i| \le 2|x_i|$ eşitsizliklerinden, $\sum 2|x_i|$ serisi yakınsak olduğundan (bkz. Alıştırma 15.4 ya da 15.5), Teorem 15.4'e göre $\sum(x_i + |x_i|)$ pozitif serisi de yakınsaktır. Öte yandan

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n}(x_i + |x_i|) - \sum_{i=0}^{n} |x_i|$$

olduğundan,

$$\sum x_i = \sum(x_i + |x_i|) - \sum |x_i|$$

olur. □

Bu teoremin tersi doğru değildir, yani $\sum x_i$ serisi yakınsak olsa da

$$\sum |x_i|$$

serisi ıraksayabilir. En standart karşıörnek,

$$\sum \frac{(-1)^i}{i+1}$$

serisidir. Bu serinin yakınsak olduğunu Altbölüm 17.1'de göreceğiz ama

$$\sum \left| \frac{(-1)^i}{i+1} \right|,$$

yani

$$\sum \frac{1}{i+1}$$

serisinin ıraksak olduğunu biliyoruz (Bölüm 7.2).

Eğer $\sum |x_i|$ serisi yakınsıyorsa, $\sum x_i$ serisine ***mutlak yakınsak*** denir. Yukardaki teoreme göre, mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır. $\sum_{i\geq 1}(-1)^i/i$ serisi gibi yakınsak olan ama mutlak yakınsak olmayan serilere ***koşullu yakınsak seri*** denir. Koşullu yakınsak serilerin analizi mutlak yakınsak serilerin analizinden daha zordur.

Örnekler

15.28. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2}$ serisi mutlak yakınsaktır.

15.29. (Trigonometrik Fonksiyonlar.) Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\cos x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \text{ ve } \sin x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

serileri mutlak yakınsaktırlar. Nitekim,

$$\sum \left| (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right| = \sum \frac{|x|^{2i}}{(2i)!} \leq \sum \frac{|x|^i}{i!} = \exp|x|$$

olur ve Teorem 15.1'e göre $\cos x$ serisi mutlak yakınsar. Bu arada, çok daha iyisini kanıtlayacağımız $|\cos x| \leq \exp|x|$ eşitsizliğine dikkatinizi çekerim. $\sin x$ için kanıt benzerdir. Bunlar gerçekten lise yıllarından âşina olduğumuz sinüs ve kosinüs fonksiyonlarıdır. Bu kitapta, her ciddi matematik kitabında olduğu gibi, böyle tanımlanacaklar. Bir sonraki ciltte sin ve cos fonksiyonları üzerine çok daha fazla şey kanıtlayacağız.

15.30. exp fonksiyonunun serisi mutlak yakınsaktır. Bariz.

Yukardaki örneklerde olduğu gibi, mutlak yakınsak bir seri yardımıyla tanımlanmış fonksiyonların çok hoş özellikleri vardır ve diğer fonksiyonlara göre daha hoş davranırlar. Bir sonraki ciltte mutlak yakınsaklıktan çok yararlanacağız.

Teorem 14.13'e göre mutlak yakınsak bir serinin terimlerini karарsak gene mutlak yakınsak (dolayısıyla yakınsak) bir seri elde ederiz. Şimdi Teorem 14.13'ü genelleştirerek terimleri karılmış iki mutlak yakınsak serinin aynı sayıya yakınsadığını göstereceğiz:

Teorem 15.9. *$\sum x_i$, mutlak yakınsak bir seri olsun. σ, $\mathbb{N}$'nin bir eşleşmesi olsun. O zaman, eğer $\sum x_i$ ve $\sum x_{\sigma(i)}$ serilerinden biri yakınsıyorsa diğeri de yakınsar ve yakınsadıklarında aynı sayıya yakınsarlar.*

Kanıt: $\sum x_i$ serisinin s'ye yakınsadığını varsayalım. $\epsilon > 0$ olsun. Seri mutlak yakınsak olduğundan, öyle bir M_1 vardır ki, her $n > M_1$ için

$$\sum_{i>n} |x_i| < \epsilon/2$$

olur. Ayrıca, seri s'ye yakınsadığından, öyle bir M_2 vardır ki, her $n > M_2$ için,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} x_i - s\right| \le \epsilon/2$$

olur.

$$M = \max\{M_1,\, M_2\}$$

ve

$$N = \max\{\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(M)\}$$

olsun. σ bir eşleme olduğundan, $N \ge M$ olur. Herhangi bir $n > N \ge M$ sayısı alalım ve

$$\begin{aligned}
&A = \{\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(M)\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n\},\\
&B = \{0, 1, \ldots, n\} \setminus A,\\
&u = \min \sigma(B) = \min(\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \setminus \{1, \ldots, M\}) > M,\\
&v = \max \sigma(B) = \max(\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \setminus \{1, \ldots, M\}) \ge u
\end{aligned}$$

tanımlarını yapıp hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} - s\right| &= \left|\sum_{i\in A} x_{\sigma(i)} - s + \sum_{i\in B} x_{\sigma(i)}\right| \le \left|\sum_{i\in A} x_{\sigma(i)} - s\right| + \left|\sum_{i\in B} x_{\sigma(i)}\right|\\
&\le \left|\sum_{i\in A} x_{\sigma(i)} - s\right| + \sum_{i\in B} \left|x_{\sigma(i)}\right| \le \left|\sum_{j=1}^{M} x_j - s\right| + \sum_{i\in B} |x_{\sigma(i)}|\\
&= \left|\sum_{j=1}^{M} x_j - s\right| + \sum_{j\in\sigma(B)} |x_j| \le \left|\sum_{j=1}^{M} x_j - s\right| + \sum_{j=u}^{v} |x_j|\\
&\le \left|\sum_{j=1}^{M} x_j - s\right| + \sum_{j=M+1}^{v} |x_j| \le \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

Demek ki $\sum x_{\sigma(i)} = s$ olur. □

Son olarak Teorem 14.14'ü genelleştirelim:

Teorem 15.10. *$\sum_{i\geq 0} x_i$ bir seri ve*

$$\mathbb{N} = A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots$$

$\mathbb{N}$'nin herhangi bir parçalanışı olsun.
i. *Eğer $\sum x_i$ serisi mutlak yakınsaksa, her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi de mutlak yakınsaktır. Ayrıca, eğer $y_j = \sum_{i\in A_j} x_i$ tanımını yaparsak, $\sum y_j$ serisi de mutlak yakınsaktır ve bu seri $\sum x_i$ toplamına eşittir.*
ii. *Her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi mutlak yakınsak olsun. $y_j = \sum_{i\in A_j} x_i$ tanımını yapalım. Eğer $\sum y_j$ serisi de mutlak yakınsaksa o zaman $\sum x_i$ serisi de mutlak yakınsaktır ve $\sum y_j = \sum x_i$ olur.*

Kanıt: i. Her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisinin mutlak yakınsak olduğu bariz çünkü ne de olsa $\sum_{i\in A_j} |x_i|$ serisinin kısmi toplamları $\sum |x_i|$ sayısından küçükeşittir. $\sum y_j$ serisinin mutlak yakınsaklığı da Teorem 14.14'ten çıkıyor.

Şimdi $\sum y_j = \sum x_i$ eşitliğini gösterelim. $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N_1 seçelim ki, her $n > N_1$ için,

$$\sum |x_i| - \sum_{i=0}^{n} |x_i| = \sum_{i>n} |x_i| < \frac{\epsilon}{2}$$

olsun. Buradan,

$$\sum_{i>n} x_i < \frac{\epsilon}{2}$$

çıkar.

Öyle bir N_2 seçelim ki,

$$\{0, 1, \ldots, N_1\} \subseteq A_0 \cup \ldots \cup A_{N_2}$$

olsun. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise,

$$y_0 + \cdots + y_n - \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i\in A_0} x_i + \cdots + \sum_{i\in A_n} x_i - \sum_{i=0}^{n} x_i$$

ifadesinde $x_0, \ldots, x_N$ terimleri sadeleşir ve dolayısıyla serilerdeki üçgen eşitsizliğinden

$$\left| y_0 + \cdots + y_n - \sum_{i=0}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i>N} |x_i| < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliği çıkar. Demek ki,

$$\begin{aligned} |y_0 + \cdots + y_n - \textstyle\sum x_i| &\leq |y_0 + \cdots + y_n - \textstyle\sum_{i=0}^{n} x_i| + |\textstyle\sum_{i=0}^{n} x_i - \sum x_i| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

olur. (i) kanıtlanmıştır.

ii. $\sum x_i$ serisinin mutlak yakınsaklığı Teorem 14.14'ten çıkar. Şimdi (i)'i uygulayıp kanıtı bitirebiliriz. □