14. Seriler

14.1 Tanımlar

İki sayıyı toplamayı herkes bilir. Üç ya da dört sayıyı da kolaylıkla toplayabiliriz. Ama sonsuz sayıda sayı toplamak çok daha çetin bir uğraştır, hatta başlı başına bir sanattır diyebiliriz. Bu bölümde bu sanata bir giriş yapacağız ve ilerki bölümlerde konuyu çok daha derinlemesine işleyeceğiz.

$(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi olsun. İşte bu dizinin açık hali:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, \ldots$$

Bu dizinin terimlerini en soldan başlayarak teker teker toplayalım.

$$\begin{aligned}
s_0 &= x_0,\\
s_1 &= x_0 + x_1,\\
s_2 &= x_0 + x_1 + x_2,\\
s_3 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3\\
&\ldots\\
s_n &= x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i\\
&\ldots
\end{aligned}$$

dizisini elde ederiz. Toplamlar sonlu olduklarından, dizinin varlığıyla ilgili herhangi bir sorun yoktur.

Böylece elde edilen

$$(x_0 + x_1 + \cdots + x_n)_n$$

toplamlar dizisinin bir limiti olduğunda (bu limit illa $\mathbb{R}$'de olmak zorunda değil, $\overline{\mathbb{R}}$'de de olabilir yani $\pm\infty$ da olabilir), bu limit,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i \text{ ya da } \sum x_i \text{ ya da } \sum_{i\geq 0} x_i \text{ hatta } \sum_i x_i \text{ ve hatta } \sum x_i$$

olarak gösterilir, yani tanım gereği,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \sum_{i\geq 0} x_i = \sum_i x_i = \sum x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i = \lim_{n\to\infty} (x_0 + \cdots + x_n)$$

olur. Eğer metinde satırlar tarafından alttan ve üstten sıkıştırılmışsak $\sum x_i$ yazılımını tipografik nedenlerden dolayı özellikle tercih edeceğiz. Aynı yazılımı göstergeç kümesinin ne olduğunun önemli olmadığı durumlarda da kullanacağız.

Eğer limit bir gerçel sayıysa, bu gerçel sayıya $\sum x_i$ "serisi"nin ***limiti ya da toplamı*** denir ve $\sum x_i$ "serisi"nin bu limite ***yakınsadığı*** söylenir. Bu limiti,

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, \ldots$$

sayılarının "hepsinin birden toplamı" olarak algılamak istemek doğaldır. Nitekim öyle algılanır ve -biz pek yapmayacağız ama- kimileyin $\sum x_i$ yerine,

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n + \cdots$$

yazılır.

Eğer limit bir gerçel sayı değilse, yani $\pm\infty$ ise o zaman serinin $\pm\infty$'a ***ıraksadığı*** söylenir.

$\lim_{n\to\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ise

$$\sum x_i = \ell$$

yazılır.

Örnekler

14.1. $\sum i = \infty$ olur çünkü bu durumda

$$s_n = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

olur ve bu dizinin limiti ∞'dur.

14.2. $\sum 1/i = \infty$ eşitliğini Altbölüm 7.2'de göstermiştik. Bu seriye ***harmonik seri*** denir.

14.3. Eğer her n için $x_n \geq 0$ ise, kısmi toplamlar dizisi artan bir dizidir, dolayısıyla $\sum x_i$ ya bir gerçel sayıdır ya da sonsuz.

14.4. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ olsun.

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2^i}}{1 - x^{2^{i+1}}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1 - x^{2^{n+1}}}$$

eşitliği n üzerine tümevarımla oldukça kolay bir biçimde kanıtlanabilir. Demek ki

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2^i}}{1 - x^{2^{i+1}}}$$

serisi eğer $|x| > 1$ ise
$$\frac{1}{1-x}$$
sayısına ve eğer $|x| < 1$ ise
$$\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$
sayısına yakınsar.

14.5. $\sum \left(\sqrt{1+i^2} - i\right)$ *serisinin yakınsak mıdır?*

Yanıt:
$$\sqrt{1+i^2} - i = \frac{\left(\sqrt{1+i^2} - i\right)\left(\sqrt{1+i^2} + i\right)}{\left(\sqrt{1+i^2} + i\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+i^2} + i\right)} > \frac{1}{\left(\sqrt{3i^2+i^2} + i\right)} = \frac{1}{3i}$$
olduğundan ve Örnek 14.1'e göre $\sum 1/3i$ serisi sonsuza ıraksadığından, sorudaki seri de sonsuza ıraksar. □

Herhalde anlaşılmıştır: $\sum x_i$ ifadesine ***seri*** denir. Bir serinin limitinin hesaplanması için limiti alınan
$$\sum_{i=0}^{n} x_i$$
sonlu toplamlarına serinin ***kısmi toplamları*** adı verilir. Kısmi toplamları s_n (ya da t_n) olarak göstermek bir gelenek haline gelmiştir:
$$s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$
x_i ise serinin ***genel terimi***dir.

Diziyi toplamaya x_0'dan değil de, x_1'den ya da belli bir x_k teriminden başlayabiliriz. Bu durumda, seri,
$$\sum_{i=k}^{\infty} x_i \text{ ya da } \sum_{i \geq k} x_i$$
olarak yazılır. Bazen de göstergeci çift olan terimleri toplamak isteyebiliriz; bu durumda,
$$\sum_{i \in 2\mathbb{N}} x_i \text{ ya da } \sum_{i=0}^{\infty} x_{2i}$$
gibi yazılımlar uygulanır. Tanım gereği,
$$\sum x_{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} x_{2i} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} x_{2i}$$
olur. Önemli olan "toplanacak" terimlerin en fazla sayılabilir sonsuzlukta olması ve (şimdi söyleceğimiz önemli) doğal sayılar gibi iyisıralanmış olmalarıdır. Bu önemli konuyu biraz daha açalım.

$x_0, x_1, x_2, \ldots$ sayılarını **bu sırayla** topladığımıza dikkatinizi çekeriz. Sayıları $x_{24}+x_0+x_{342}+\cdots$ gibi rastgele bir sırayla toplamıyoruz, çünkü ne de olsa x_i sayılarının sıralamasına göre s_n kısmi toplamları değişebilir ve sıralamaya göre farklı bir $\lim_{n\to\infty} s_n$ limiti yani değişik bir toplam bulabiliriz. Biraz yukarda sözünü ettiğimiz $\sum_{i\in 2\mathbb{N}} x_i$ serisi için $x_0, x_2, x_4, \ldots$ sıralaması seçilmiştir. Daha genel olarak eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz bir doğal sayı kümesiyse, $\sum_{i\in A} x_i$ serisi A kümesi doğal sıralamayla sıralanmış olarak toplandığı varsayılacaktır, yani $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ sıralamayı koruyan (yegâne) eşlemeyse, $\sum_{i\in A} x_i$ toplamının $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_{f(i)}$ anlamına geldiğini açık açık söylemeden varsayacağız.

Kalanlar. Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa, R_m sayıları, $\sum_{i>m} x_i$ olarak tanımlanır:

$$R_m = \sum_{i>m} x_i = \sum_{i=m+1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=m+1}^{n} x_i.$$

Bu sayılara $\sum x_i$ serisinin ***kalanları*** adı verilir. Elbette,

$$\begin{aligned}\sum x_i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=m+1}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{\infty} x_i = s_m + R_m\end{aligned}$$

olur. m çok büyük olduğunda, s_m sayısı serinin limitine çok yakın olduğundan, R_m kalanı çok küçülür:

$$\lim_{m\to\infty} R_m = 0$$

olur.

Örnek 14.6. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \cdots = 1$, *yani* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$ *olur.*

Kanıt:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

eşitliğini gözönüne alarak kısmi toplamları hesaplayalım:

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Kısmi toplamların limitinin 1 olduğu bariz; demek ki serinin limiti 1'dir.

Bulduğumuz eşitliği yazalım:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right).$$

Sağ taraftaki seriye ***teleskopik seri*** adı verilir. Teorem 14.2 ve sonrasında teleskopik serilere daha yakından bakacağız.

Şimdilik bir seriyi, sadece kısmi toplamların limiti olduğunda tanımladık. Şimdi bu tanımı anlamsız bir biçimde genişletelim ve herhangi bir $(x_i)_i$ gerçel sayı dizisi verildiğinde,

$$\sum x_i$$

ifadesine de ***seri*** diyelim. Eğer kısmi toplamların limiti yoksa, bu ifadenin hiçbir anlamı yoktur, tanımsızdır, ama bu yazılım öylesine pratiktir ki yazmamak yazmaktan daha büyük bir günahtır.

Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa ya da $\pm\infty$'a ıraksıyorsa, tanım gereği,

$$\sum x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i = \lim_{n\to\infty}(x_0 + \cdots + x_n)$$

olur; birinci durumda $\sum x_i$ serisi

$$\lim_{n\to\infty}(x_0 + x_1 + \cdots + x_n)$$

sayısına ***yakınsar***, ikinci durumda $\pm\infty$'a ***ıraksar*** denir. Örneğin,

$$\sum \frac{1}{i!} = e$$

(Sonuç 10.9) ve birazdan Örnek 14.7'de kanıtlayacağımız (ama aslında Teorem 6.2'de kanıtladığımız) üzere, eğer $-1 < r < 1$ ise,

$$\sum r^i = \frac{1}{1-r}$$

olur. Öte yandan,

$$\sum i = \infty,\ \sum(-i) = -\infty,\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

olur. (İlk ikisi bariz, sonuncusu için bkz. Altbölüm 7.2.)

Ama mesela,

$$\sum(-1)^i$$

ifadesi anlamsızdır çünkü kısmi toplamlar dizisi 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... diye gider ve limiti yoktur. Kısmi toplamlar bir sayıya yakınsamadığında, $\sum x_i$ serisinin ***ıraksadığı*** söylenir.

Yukarda verdiğimiz ikinci örnek, $\sum r^i$ serisi, basit ama son derece önemlidir. Bu örnekteki seriye ***geometrik seri*** denir.

Örnek 14.7. *Eğer $-1 < r < 1$ ise,*

$$\sum r^i = \frac{1}{1-r}$$

olur. Aksi halde seri ıraksar. Eğer $r \geq 1$ ise seri sonsuza ıraksar.

Kanıt: Bu örnekte toplanan dizi,

$$1, r, r^2, r^3, \ldots, r^n, \ldots$$

dizisidir. Kısmi toplamlar dizisinin genel terimi ise

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{eğer } r \neq 1 \text{ ise} \\ n+1 & \text{eğer } r = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. İşte bu dizinin limitini bulmalıyız. Bu limiti bulmak pek zor değildir, Teorem 6.2'de bulmuştuk:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{eğer } |r| < 1 \text{ ise} \\ \infty & \text{eğer } r \geq 1 \text{ ise} \\ \text{yok} & \text{eğer } r \leq -1 \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer bu örnekte $r = 1/2$ alırsak,

$$\sum \frac{1}{2^i} = 2$$

buluruz. Toplamı $i = 1$'den başlatırsak sonuç 1 çıkar:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Eğer $r = 1$ ise, kısmi toplam,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = n + 1$$

bulunur; bu durumda kısmi toplamların limiti yoktur, kısmi toplamlar sonsuza ıraksarlar. Genel olarak, eğer $r \geq 1$ ise,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n \geq n + 1$$

bulunur, ve bu kısmi toplamlar dizisi sonsuza ıraksadığından, $r \geq 1$ iken,

$$\sum r^i = \infty$$

bulunur. Eğer $r \leq -1$ ise, n üzerine tümevarımla, kolaylıkla,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \begin{cases} \geq & 1 \quad \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ \leq & 0 \quad \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

eşitsizlikleri kanıtlanabilir ve dolayısıyla bu durumda,

$$\sum r^i$$

ifadesi anlamsızdır, seri ıraksar. Bunun böyle olduğu, $r \neq 1$ iken doğru olan

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

eşitliğinden de bellidir.

Bu örnekte bulduklarımız ilerde çok önemli olacaklar. Bir teorem altında toparlayalım:

Teorem 14.1. *$\sum r^i$ serisi sadece $-1 < r < 1$ iken yakınsar ve bu durumda*

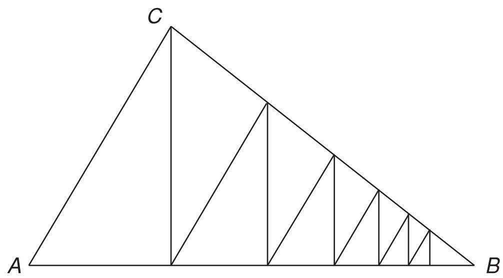
$$\sum r^i = \frac{1}{1-r}$$

olur. □

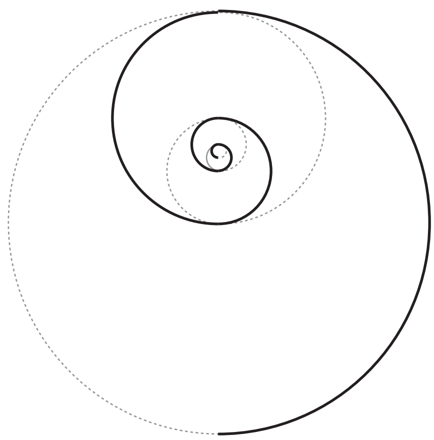
Alıştırmalar

14.8. $x_i \in \mathbb{Z}$ olsun. $\sum x_i$ serisinin yakınsak olması için $(x_i)_i$ dizisinin zamanla sabit 0-dizisi olmasının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

14.9. Aşağıda resimdeki gibi bir ABC dik üçgeni alın. C'den AB'ye bir dik inin. Bu dikmenin ayağından BC'ye dik inin. Bu dikmenin ayağından AB'ye dik inin. Bu dikmenin ayağından BC'ye dik inin. Bunu böyle sonsuza kadar devam ettirin. Elde edilen zigzag çizginin uzunluğunu bulun.



14.10. Aşağıdaki koyu renk spiral yarım çemberlerden tahmin edileceği gibi inşa edilmiştir. Bu spiralin uzunluğunu bulun.



Seriler limitlerden çok daha ilginç ve zor ve dolayısıyla eğlenceli bir konudur. Çoğu zaman serinin toplamını bulamayacağız, sadece yakınsak olduğunu kanıtlamakla yetineceğiz.

Geçmiş bölümlerde seri adını anmadan birçok yakınsak seri örneği vermiştik. Bu örneklerin birkaçını sıralayalım. Teorem 10.7'de her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sum \frac{x^i}{i!}$$

serisinin yakınsadığını ve Sonuç 10.9'da her $x \in \mathbb{Q}$ için,

$$\sum \frac{x^i}{i!} = e^x$$

olduğunu kanıtlamıştık. Çok daha fazla seri örneği göreceğiz.

Bir seri özünde bir dizidir. Bunu gördük. Ama bir dizi de istenirse bir seri olarak görülebilir. Nitekim eğer $(s_n)_n$ dizisi verilmişse, $x_0 = s_0$ ve $n > 0$ için $x_n = s_n - s_{n-1}$ tanımlarını yapalım. O zaman $s_n = \sum_{i=0}^n x_i$ olur. Bir sonraki altbölümde bu fikri sömüreceğiz.

14.2 Teleskopik Seriler

Bir örnekle başlayalım.

Örnek 14.11. Örnek 7.10'te,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

serisinin yakınsak olduğunu kanıtlamıştık ama hangi sayıya yakınsadığını gösterememiştik. Yakınsaklığı bir kez daha ama bu sefer değişik bir kanıtla kanıtlayalım. Kısmi toplamlar

$$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

olsun. $(s_n)_n$ pozitif ve artan bir dizidir. Her $i \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

olduğundan, $(s_n)_n$ dizisi üstten 2 tarafından sınırlıdır; dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} s_n$ limiti vardır ve 2'den küçüktür. Böylece

$$0 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq 2$$

eşitsizliğini kanıtlamış olduk. Kısmi toplamlar sayesinde seriyi alttan daha iyi sınırlayabiliriz:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} > \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{49}{36}.$$

Örnek 7.10'ün sonunda yaptıklarımızdan serinin alttan 3/2 ile sınırlandığı çıkar. Ama kısmi toplamlarda ne kadar ileri gidersek serinin toplamına o kadar yakınsarız, örneğin bulduğumuz bu 3/2 altsınırını henüz yedinci kısmi toplamda aşarız. Daha da ileri gidelim: $s_{100} \approx 1,634984$.

Seriyi üstten de daha yakından sınırlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
s_n &= \left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\
&< \frac{49}{36}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\
&= \frac{49}{36}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{49}{36}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}=\frac{61}{36}-\frac{1}{n}<\frac{61}{36}.
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$1{,}63498 < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} < \frac{61}{36}.$$

Birinci örneğimizi genelleştiren basit ama çok yararlı bir teorem sunalım şimdi.

Teorem 14.2 (Teleskopik Seri)**.** *$\sum(x_i - x_{i+1})$ serisinin yakınsaması için, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması yeter ve gerek koşuldur. Bu durumda,*

$$\sum(x_i - x_{i+1}) = x_0 - \lim_{n\to\infty} x_n$$

olur.

Kanıt: $\sum(x_i - x_{i+1})$ serisinin kısmi toplamlarına bakalım:

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i+1}) = x_0 - x_{n+1}.$$

Kısmi toplamlar dizisinin yakınsaması için, belli ki $\lim_{n\to\infty} x_n$ limitinin olması yeter ve gerek koşuldur ve bu durumda kısmi toplamların limiti ancak

$$x_0 - \lim_{n\to\infty} x_n$$

olabilir. □

Teoremde, ilk göstergeç olarak 0 yerine herhangi bir k sayısı alabilir ve o zaman

$$\sum_{i\geq k}(x_i - x_{i+1}) = x_k - \lim_{n\to\infty} x_n$$

bulurduk.

Örnekler

14.12. Eğer yukardaki teoremde $x_i = 1/i$ alırsak ve serinin toplamını 0'dan değil de 1'den başlatırsak birinci örnekte bulduğumuz sonucu buluruz:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1.$$

Daha ilginç bir örnek bulalım.

$$x_i = \frac{(i+1)^2}{i(i+2)}$$

olsun. Teoreme göre,

$$\sum_{i \geq 1} (x_i - x_{i+1}) = x_1 - \lim_{n \to \infty} x_n = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

olur. Kolay bir hesapla,

$$x_i - x_{i+1} = \frac{2i+3}{i(i+1)(i+2)(i+3)}$$

bulunur. Demek ki,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+3}{i(i+1)(i+2)(i+3)} = \frac{1}{3}$$

olur.

14.13. Örnekleri çoğaltabiliriz. Teoremi $\sum (x_i - x_{i+2})$ durumuna da uyarlayabiliriz:

$$\frac{2}{i(i+2)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}$$

eşitliğinden,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i(i+2)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

buluruz. (Neden?) Bundan da,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4}$$

çıkar. (Neden?)

14.14. $\sum (\sqrt{i+1} - \sqrt{i})$ serisi ıraksaktır.

Kanıt: Teorem 14.2'den hemen çıkar: $\lim_{n \to \infty} \sqrt{i} = \infty$. □

14.15.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} \right) = 1$$

olur.

14.16. *Aşağıdaki seriyi hesaplayın:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+2)(i+3)}.$$

Çözüm: Önce her i için,

$$\frac{1}{i(i+2)(i+3)} = \frac{a}{i} + \frac{b}{i+2} + \frac{c}{i+3}$$

eşitliğini sağlayan a, b ve c sayılarını bulalım. Yukardaki eşitliği i ile çarparsak,

$$\frac{1}{(i+2)(i+3)} = a + \frac{bi}{i+2} + \frac{ci}{i+3}$$

buluruz ve sonra $i = 0$ alırsak

$$a = 1/6$$

bulunur. b'yi bulmak için i ile yaptığımızı $i+2$ için yapıp, sonra da $i = -2$ alalım; sonuçta

$$b = -1/2$$

buluruz. Benzer şekilde c bulunur:

$$c = 1/3.$$

Demek ki,

$$\frac{1}{i(i+2)(i+3)} = \frac{1}{6i} - \frac{1}{2(i+2)} + \frac{1}{3(i+3)}.$$

Böylece seri biraz daha teleskopik seriye benzer ama henüz tam anlamıyla değil. Bu aşamada

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

eşitliğini kullanıp sağdaki terimin

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{i+3} - \frac{1}{i+2}\right)$$

terimine eşit olduğunu kanıtlamalıyız. Şimdi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)(i+3)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{i+3} - \frac{1}{i+2}\right)\right)$$

serisini hesaplarsak birçok sadeleştirme olur ve

$$\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{36}$$

elde ederiz. □

14.17. *$(a_n)_n$ herhangi pozitif bir dizi olsun.*

$$\frac{a_0}{1+a_0} + \frac{a_1}{(1+a_0)(1+a_1)} + \frac{a_2}{(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{\prod_{j=0}^{i}(1+a_j)}$$

serisi yakınsaktır.

Kanıt: $p_i = \prod_{j=0}^{i}(1+a_j)$ olsun. Demek ki

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{p_i}$$

serisinin yakınsaklığını kanıtlamamız lazım. Her $i \geq 1$ için,

$$p_i = p_{i-1}(1+a_i)$$

ve

$$p_i - p_{i-1} = p_{i-1}(1+a_i) - p_{i-1} = a_i p_{i-1}$$

olur. Bu eşitliği $p_i p_{i-1}$ ifadesine bölersek,

$$\frac{1}{p_{i-1}} - \frac{1}{p_i} = \frac{a_i}{p_i}$$

olur. Demek ki

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{p_i} = \frac{a_0}{p_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p_i} = \frac{a_0}{p_0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p_{i-1}} - \frac{1}{p_i} \right) = \frac{a_0}{p_0} + \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_n} = 1 - \frac{1}{p_n}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{p_i} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n}.$$

Son olarak $(p_n)_n$ dizisinin ya sonlu bir sayıya yakınsadığını ya da sonsuza ıraksadığını göstermemiz lazım. Ama bu dizi artan bir dizi olduğundan bu bariz[1]. Demek ki mesela $a_i = i$ alırsak,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{i!} = \frac{0}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = 1$$

buluruz. Ama e sayısını kullanarak bunun daha kolay bir kanıtını bulabiliriz tabii. □

Eğer bir serinin sonlu sayıda terimi dışında her terimi 0 ise, o zaman sonlu bir toplam elde ederiz ve bu durumda seri elbette bu sonlu toplama yakınsaktır. Aksi durumda, seride 0'a eşit olan terimleri silersek fazla bir şey kaybetmeyiz. Yakınsaklığı ya da ıraksaklığı bozmayan, yakınsak olduğunda toplamın da bozulmadığı bir seri elde ederiz. Dolayısıyla gerektiğinde serilerimizde hiçbir terimin 0 olmadığını varsayabiliriz.

Seriler, dizilerden çok daha zor ve ama daha eğlenceli bir konudur. Özellikle x'e göre değişen

$$\sum c_i x^i$$

türünden seriler eğlenceyi doruk noktasına çıkarırlar.

Alıştırmalar

14.18. Şu eşitliği kanıtlayın:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+3)} = \frac{7}{36}.$$

İpucu: Önce

$$\frac{1}{i(i+1)(i+3)} = \frac{1}{3i} - \frac{1}{2(i+1)} + \frac{1}{6(i+3)}$$

eşitliğini bulun ve sağ tarafı

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$$

olarak yazın. Bkz. Örnek 14.16.

14.19. $\sum x_i = s$ ise, her $r \in \mathbb{R}$ için $\sum r x_i = rs$, yani, $\sum r x_i = r \sum x_i$ eşitliğini kanıtlayın.

14.20. $\sum x_i = s$ ve $\sum y_i = t$ ise, $\sum (x_i + y_i)$ serisinin $s+t$'ye yakınsadığını, yani $\sum (x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$ eşitliğini kanıtlayın.

14.21. $\sum x_i = s$ ve $\sum y_i = t$ ise, $\sum x_i y_i$ serisinin st'ye yakınsamak zorunda olmadığını gösterin. (Bu konuda bkz. Bölüm 16.)

---

[1]Çözüm için Yusuf Ünlü'ye teşekkür ederiz. Daha sonra göreceğimiz d'Alembert, Cauchy ve Raabe kıstasları bu serinin yakınsaklığına karar vermeye yetmiyor. Bu da teleskopik seri yönteminin ne kadar güçlü olduğunu gösterir.

14.22. Teorem 14.2'de

$$x_i = \frac{i^2}{(i+1)(i+2)}$$

alarak

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3i+1}{(i+1)(i+2)(i+3)}$$

serisini hesaplayın.

14.23. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \cdots = \frac{3}{2}$ eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Örnek 14.6'daki gibi.)

14.24. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{4}$ eşitliğini kanıtlayın.

14.25. Teleskopik serilerden esinlenerek, bir $k > 0$ tamsayısı için,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(k+i)} = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)$$

eşitliğini kanıtlayın.

14.3 Serilerle İlgili İki Basit Gözlem

Cauchy Kıstası. Bir serinin yakınsak olup olmadığını bilmek kolay olmayabilir, ama yakınsaksa hangi sayıya yakınsak olduğunu bulmak bambaşka düzeyde bir problemdir; çok zor olduğu gibi bu mümkün de olmayabilir çünkü örneğin o güne dek kimse serinin yakınsak olduğu sayıya bir ad vermemiştir, yani seri bugüne dek insanoğlunun dikkatini çekmemiş bir sayıya yakınsayabilir ve elbette bu durumda yapacak fazla bir şey yoktur.

Serinin hangi sayıya yakınsadığı bilinmese de, serinin yakınsak olduğu kanıtlanabilir. Bunun için kıstaslar - yakınsama kıstasları - vardır. İşte bunlardan çok sık kullanılanlardan biri:

Teorem 14.3 (Cauchy Kıstası). *Bir $\sum x_i$ serisinin bir gerçel sayıya yakınsaması için yeter ve gerek koşul şudur: Her $\epsilon > 0$ için öyle bir N olmalı ki, her $n > m > N$ için,*

$$\left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| < \epsilon$$

olsun.

Kanıt: Serinin yakınsaması demek, tanım gereği, kısmi toplamlar dizisi olan

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)_n$$

dizisinin yakınsaması demektir. Bu dizinin yakınsaması da, dizinin Cauchy dizisi olmasıyla eşdeğerdir; yani her $\epsilon > 0$ için öyle bir N olmalı ki, her $n >$

$m > N$ için,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{m} x_i\right| < \epsilon,$$

yani,

$$\left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| < \epsilon$$

olmalı. □

Bu kıstasın uygulanışına geçmişte birçok örnek vermiştik. Örneğin Teorem 10.7'de

$$\sum \frac{x^i}{i!}$$

serisinin yakınsadığını aynen bu yöntemle göstermiştik.

Bu kıstasla

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i}$$

harmonik serisinin yakınsamadığını da gösterebiliriz. Nitekim eğer teoremde

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2}$$

ve her N için, (N'den büyük olan)

$$m = N + 1 \text{ ve } n = 2N + 1$$

alırsak,

$$\left|\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i}\right| = \sum_{i=N+1}^{2N+1} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=N+1}^{2N+1} \frac{1}{2N+1} = \frac{N+1}{2N+1} \geq \frac{1}{2} \geq \epsilon$$

buluruz.

Bu kıstastan $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri yakınsaksa, $\sum (x_i + y_i)$ serisinin ve eğer $r \in \mathbb{R}$ ise $\sum r x_i$ serisinin yakınsak olduğu çıkar. Ama bu sonuçları ilerde, Bölüm 16'da çok daha doğal biçimde (sadece tanımlara başvurarak) bulacağız.

Bu Cauchy kıstasının, Altbölüm 18.2'de sözedeceğimiz çok daha önemli Cauchy kıstasıyla karıştırılmaması gerekir.

Örnekler

14.26. *$(x_n)_n$ artarak sonsuza ıraksayan bir diziyse*

$$\sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \ \textit{ve} \ \sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}$$

serileri ıraksaktır.

Kanıt: $(s_n)_n$, birinci serinin kısmi toplamları dizisi olsun. Eğer $m < n$ ise

$$s_n - s_m = \sum_{i=m}^{n} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \geq \sum_{i=m}^{n} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_m}{x_{n+1}}$$

olur. Şimdi n'yi $x_{n+1} \geq 2x_m$ olacak kadar büyük seçelim. O zaman, bir önceki satırdan devam ederek

$$\geq \frac{2x_m - x_m}{x_{n+1}} = \frac{x_m}{x_{n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

buluruz. Demek ki kısmi toplamların dizisi $(s_n)_n$ Cauchy dizisi değildir ve birinci seri yakınsak olamaz. İkinci serinin ıraksaklığının kanıtı da benzerdir.

14.27. Bir önceki örnekte $x_i = i$ alarak, $\sum 1/i$ serisinin bir kez daha ıraksak olduğu anlaşılır.

14.28. [Stieltjes] *Eğer $(a_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan bir diziyse, sonsuza ıraksayan öyle bir $\sum b_n$ pozitif serisi vardır ki, $\sum a_n b_n$ yakınsak olur.*

Kanıt: $u_n = 1/a_n$ ve

$$b_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}}$$

olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ olur. Dolayısıyla Örnek 14.26'e göre $\sum b_n = \infty$ olur. Ama

$$a_n b_n = \frac{b_n}{u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

olduğundan $\sum a_i b_i$ teleskopik bir seridir. Ve $\lim_{n\to\infty} 1/u_n = 0$ eşitliğinden dolayı $\sum a_i b_i$ yakınsar. □

14.29. [Stieltjes] *Eğer $(a_n)_n$ artarak sonsuza ıraksayan bir diziyse, öyle bir yakınsak $\sum b_n$ pozitif serisi vardır ki, $\sum a_n b_n$ ıraksak olur.*

Kanıt: $b_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$ olsun. Teleskopik seri olduğundan $\sum b_i$ yakınsar. Ama

$$a_n b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}$$

olduğundan, Örnek 14.26'e göre $\sum b_n$ ıraksaktır. □

Alıştırmalar

14.30. $\sum x_i$ yakınsaksa, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{2n} x_i = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

14.31.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right) = 0$$
eşitliğini gösterin.

14.32. (Abel) $(x_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan pozitif bir dizi olsun. Eğer $\sum x_i$ yakınsaksa $\lim_{n\to\infty} n x_{2n} = 0$ eşitliğini gösterin. İpucu: $n x_{2n} \leq \sum_{i=1}^{n} x_{n+k} \to 0$. (Teorem 14.6'ya ve kanıtına da bakın.)

Genel Terimin Sıfıra Yakınsaması. Bir seride bir anlamda sonsuz sayıda sayı toplanır. Bu "sonsuz toplam"ın sonlu bir sayı olabilmesi için, gittikçe küçülen sayılar toplamak gerektiği hissedilebilir. Nitekim öyledir de.

Teorem 14.4. *Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa, o zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olur.*

Kanıt 1: $\epsilon > 0$ olsun. Bir önceki teoreme göre öyle bir N vardır ki, her $m > N$ için,

$$\left|\sum_{i=m}^{m+1} x_i\right| < \epsilon$$

yani $|x_{m+1}| < \epsilon$. Bu da her $n > N+1$ için, $|x_n| < \epsilon$ demektir.

Kanıt 2: s serinin limiti olsun. $\epsilon > 0$ olsun ve

$$s_n = x_0 + \cdots + x_n$$

olsun. Tanımlar gereği,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

olur. Ve tabii ki (altdizi olduğundan),

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

olur. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = s - s = 0.$$

Teorem bir kez daha kanıtlanmıştır. □

Sonuç 14.5. *Eğer $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa (yakınsak değilse de), o zaman $\sum x_i$ serisi yakınsak değildir.* □

Ama teoremin ters istikameti doğru değildir, yani

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

doğru olsa da, $\sum x_i$ serisi yakınsamayabilir. Örneğin,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

olmasına karşın yukarda gördüğümüz üzere

$$\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i} = \infty$$

olur.

Bu sonuç sayesinde, yakınsamaktan oldukça uzak olan serilerin ıraksadıkları kolaylıkla kanıtlanabilir. Ama,

$$\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$$

serisi, genel terimi 0'a gittiğinden bu sonucun kapsamına girmiyor. Bu serinin yakınsamadığını Teorem 14.4'ün kanıtındaki fikri kullanarak şöyle de gösterebiliriz:

Teorem 14.6. *Eğer $\sum x_i$ yakınsak serisinin terimleri pozitif ve azalansa o zaman* $\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$ *olur.*

Kanıt: s_n kısmi toplamlar olsun. $(x_n)_n$ dizisi azalan olduğundan,

$$nx_{2n} \le x_{n+1} + \cdots + x_{2n} = s_{2n} - s_n$$

olur. Demek ki $\lim_{n\to\infty} nx_{2n} = 0$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} 2nx_{2n} = 0$. Şimdi tek sayılara geçelim. Benzer şekilde

$$(n+1)x_{2n+1} \le x_{n+1} + \cdots + x_{2n+1} = s_{2n+1} - s_n.$$

Demek ki $\lim_{n\to\infty}(n+1)x_{2n+1} = 0$. Buradan kolaylıkla $\lim_{n\to\infty}(2n+1)x_{2n+1} = 0$ çıkar. (Nasıl?) □

Bütün bunlardan şu çıkıyor: $\sum x_i$ serisinin yakınsaması için x_i sayılarının 0'a azalarak yakınsaması yetmez, ayrıca bu sayıların 0'a "hızlı" yakınsaması da gerekir. Örneğin $1/i^2$, 0'a yeterince hızlı yakınsadığından, $\sum_{i\ge1} 1/i^2$ serisi yakınsaktır. Yakın gelecekte $s > 1$ ise, $\sum_{i\ge1} 1/i^s$ serisinin yakınsak olduğunu göreceğiz.

Sonuç 14.7. $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i$ *serisi ıraksar.* □

Örnekler

14.33. $\sum\left(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}\right)$ *serisi ıraksar.*

Kanıt: Sonuç 14.5'i uygulamaya çalışalım:

$$\sqrt{i+1} - \sqrt{i} = \frac{(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})(\sqrt{i+1} + \sqrt{i})}{\sqrt{i+1} + \sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{i+1} + \sqrt{i}} \to 0$$

Genel terimin limiti 0 olduğundan, serinin yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu Sonuç 14.5'in yöntemiyle anlayamayız. Ama Örnek 14.14'den serinin ıraksak olduğunu biliyoruz.

14.34. *Eğer* $0 < a < 1$ *ise* $\lim_{n\to\infty}(1 + a^n)^n = 1$.

Kanıt: Aşağıdaki hesapları yapalım:

$$\begin{aligned} 0 &\le (1+a^n)^n - 1 = a^n\left((1+a^n)^{n-1} + (1+a^n)^{n-2} + \cdots + (1+a^n) + 1\right) \\ &\le a^n n(1+a^n)^{n-1}. \end{aligned}$$

Demek ki

$$0 \le (1+a^n) - \frac{1}{(1+a^n)^{n-1}} \le na^n.$$

Ama Teorem 14.6'dan dolayı $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ olduğundan, Sandviç Teoremi'ne göre

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+a^n) - \frac{1}{(1+a^n)^{n-1}}\right) = 0$$

olur. $\lim_{n\to\infty}(1+a^n) = 1$ olduğundan, bundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+a^n)^{n-1}} = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{n-1}=1$$

çıkar. Bu son eşitlik de istediğimizi verir. □

14.35. $\lim_{n\to\infty}(n^{1/n}-1)^{1/n}$ *limitini bulun.*

Çözüm: Herhangi bir $a<1$ alalım. Bir önceki örneğe göre yeterince büyük n göstergeçleri için $(1+a^{1/n})^n<2<n$ olur. Buradan $a<(n^{1/n}-1)^{1/n}$ çıkar.

Öte yandan $(n^{1/n}-1)^{1/n}\le(n^{1/n})^{1/n}=n^{1/n^2}=(n^2)^{1/n^2}\simeq n^{1/n}\longrightarrow 1$.

Son iki paragraftan istenen limitin 1 olduğu kolaylıkla çıkar (bkz. Örnek 4.15.) □

14.36. [Abel] Her $(a_n)_n$ dizisi için, "$\lim a_nb_n=0\Rightarrow\sum a_i$ *yakınsak" önermesini sağlayan bir* $(b_n)_n$ *dizisi yoktur.*

Kanıt: Tam tersine böyle bir $(b_n)_n$ dizisinin olduğunu varsayalım. Elbette sonsuz sayıda $b_n=0$ olamaz, yoksa bu n'ler için a_n'yi çok büyük seçerek yakınsamaması gereken serilerin yakınsadığını kanıtlamış oluruz. Dolayısıyla her n için $b_n\neq 0$ varsayımını yapabiliriz. $\lim a_nb_n=0$ ile $\lim a_n|b_n|=0$ önermeleri arasında fark olmadığından, $b_n>0$ varsayımını yapabiliriz. $a_n=1/nb_n$ gibi, $\lim a_nb_n=0$ eşitliğini sağlayan pozitif bir seri alalım. $\epsilon>0$ rastgele olsun. O zaman $a_nb_n<\epsilon$ olduğundan $\frac{1}{b_n}>\frac{a_n}{\epsilon}$, dolayısıyla

$$\sum\frac{1}{b_i}>\frac{\sum a_i}{\epsilon}$$

olur. Bundan da

$$\sum\frac{1}{b_i}=\infty$$

çıkar. Demek ki

$$c_n=\frac{1}{b_0}+\cdots+\frac{1}{b_n}$$

dizisi sonsuza ıraksar. Örnek 14.26'e göre terimleri

$$a_n=\frac{c_n-c_{n-1}}{c_n}$$

olan seri ıraksar. (Eski a_n'yi unutun!) Ama

$$b_na_n=b_n\frac{c_n-c_{n-1}}{c_n}=\frac{1}{c_n}\longrightarrow 0$$

olduğundan bir çelişki elde ederiz. □

14.37. [Abel] *Sonsuza ıraksayan her* $\sum a_i$ *serisi için,* $\lim b_n/a_n=0$ *eşitliğini sağlayan sonsuza ıraksayan bir* $\sum b_i$ *serisi vardır.*

Kanıt: $a_i>0$ varsayımını yapabiliriz.

$$s_n=a_0+\cdots+a_n$$

ve

$$b_n=\frac{a_n}{s_n}=\frac{s_n-s_{n-1}}{s_n}$$

olsun. O zaman

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{s_n}\longrightarrow 0$$

olur. Ayrıca Örnek 14.26'e göre $\sum b_n$ serisi ıraksar. □

Birkaç İlginç Seri. Ya kanıtlama yöntemi için henüz yeterince matematik geliştiremediğimizden ya da π gibi bazı matematiksel nesnelerin tanımlarını henüz vermediğimizden şu anda kanıtlayamayacağımız birkaç eşitlik sunuyoruz.

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

serisinin yakınsaklığını Bölüm 17'de kanıtlayacağız. (Limit $\ln 2$'dir ama henüz ln diye bir fonksiyon görmediğimizden şu anda bu olgu okura bir anlam ifade etmeyebilir.)

Tek sayılarla π sayısı arasında bir ilişki var mıdır diye sorulsa, aklı başında herhangi biri yok der herhalde! Ama yanlış!

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

Şu toplamdan sözetmiştik bir zamanlar:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$1/n$'lerin toplamının sonsuz olduğunu biliyoruz:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty.$$

Bu seride toplanan terim sayısını azaltalım... Tüm $1/n$'leri toplayacağımıza, asal n'ler için $1/n$'leri toplayalım; bakalım ne oluyor...

$$\sum_{p \text{ asal}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots=\infty.$$

Gene sonsuz çıkar... Demek ki asal sayıların sayısı çok az değil, terslerinin toplamını sonsuz yapacak kadar çok asal sayı var...

3 ve 5 gibi, 5 ve 7 gibi, 11 ve 13 gibi, 17 ve 19 gibi, aralarında 2 fark olan asallara ***ikiz asallar*** denir. Sonsuz sayıda ikiz asal olduğu sanılıyorsa da, bu sanı bugüne dek kanıtlanamadı. Brun, ikiz asalların bir anlamda o kadar çok olmadığını kanıtlamıştır. Şu anlamda çok değillerdir:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\cdots$$

serisi yakınsaktır, yani bu toplam sonlu bir sayıdır. ***Brun sabiti*** adı verilen bu sayının değeri aşağı yukarı 1,902160583104'tür. Bu yaklaşık değer, 10^{16}'ya kadar olan asallar bulunarak hesaplanmıştır.

14.4 Serilerin Terimleriyle Oynamak

Bu altbölümde amacımız bir serinin terimleri gruplandığında ya da terimlerinin yerleri değiştiğinde ya da seriye yeni terimler eklendiğinde seride ne gibi değişikliklerin olduğunu anlamaya çalışmak. İlk okumada bu altbölüm üstün körü okunabilir.

Seriden Terim Atmak. Bir önceki bölümde kanıtlanan Teorem 14.3, bir serinin yakınsaklığının ya da ıraksaklığının, toplanan diziden çok, dizinin kuyruğuna göre değiştiğini de söylüyor: Kuyrukları aynı olan iki diziden birinin toplamı yakınsaksa diğerinin de toplamı yakınsaktır ve biri ıraksaksa diğeri de ıraksaktır. Yani bir seriye sonlu sayıda terim eklersek ya da bir seriden sonlu sayıda terim silersek ya da her iki işlemi birden yaparsak, serinin yakınsaklığında ya da ıraksaklığında bir değişiklik olmaz. (Tabii yakınsak olduğunda elde edilen toplam değişebilir.) Bu o kadar bariz ki teorem adı altında yazmıyoruz bile.

Serinin Terimlerini Gruplamak. Yakınsak serilerin terimlerini teker teker toplayacağımıza ikişer ikişer toplayabiliriz, yani yakınsak bir seriyi

$$x_0 + \cdots + x_i + \cdots$$

sonsuz toplamı olarak göstereceğimize,

$$(x_0 + x_1) + (x_2 + x_3) + \cdots + (x_{2i} + x_{2i+1}) + \cdots$$

sonsuz toplamı olarak da gösterebiliriz, çünkü ne de olsa, kısmi toplamlar dizisi $(s_n)_n$ yakınsaksa, bunun bir altdizisi olan $(s_{2n+1})_n$ dizisi de aynı sayıya yakınsar. Bu bulduğumuz sadece ikişer ikişer toplama için değil, ikişer üçer gruplama ve hatta **her türlü** gruplama için de geçerlidir elbet, çünkü gruplanarak elde edilen serinin kısmi toplamları başladığımız serinin kısmi toplamlarının bir altdizisidir. Bir teorem daha kanıtladık:

Teorem 14.8. *Eğer bir seri yakınsaksa, serinin terimlerini gruplayarak elde edilen seri de aynı sayıya yakınsaktır.* □

Örneğin,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2i)^2} + \frac{1}{(2i+1)^2} \right)$$

serisi yakınsaktır, çünkü,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2i)^2} + \frac{1}{(2i+1)^2} \right) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

eşitliği geçerlidir ve sağdaki serinin yakınsak olduğunu biliyoruz (Bölüm 7). Gruplayarak ayrı sayılara yakınsayan (dolayısıyla yakınsak olmayan) seri örneği için bkz. Örnek 17.2.

Ama dikkat: Bir seri gruplanarak yakınsak oluyorsa, bu, gruplanmamış orijinal serinin yakınsak olduğunu göstermez. Örneğin, $x_i = (-1)^i$ ise $\sum x_i$ yakınsamaz; ama terimleri ikişer ikişer gruplarsak, terimleri 0 olan dizi buluruz ki bu da elbette 0'a yakınsayan bir seri verir.

Aynı felaket, serinin genel terimi 0'a yakınsıyorsa da başımıza gelebilir. Örneğin,

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} - \cdots - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{231} - \frac{1}{231} - \cdots - \frac{1}{13} - \frac{1}{12}\right) + \cdots$$

serisine bakalım. k'ıncı parantezdeki

$$\frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{b}$$

toplamının $a \leq b$ sayıları şöyle seçiliyorlar: a, toplamda daha önce belirmeyen ilk doğal sayı (bir sonraki parantezde $a = 232$ olacak örneğin); b ise,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{b}$$

toplamını k'dan büyükeşit yapan en küçük doğal sayı. $\sum_{i\geq 1} 1/i$ serisi sonsuza ıraksadığından her a için böyle bir b bulmak mümkündür. Serinin yukardaki gibi gruplaşmış hali, terimleri sürekli 0 olan seridir ve elbette bu gruplaşmış seri 0'a yakınsar; ama aynı seriyi parantezlerden arınmış biçimde görürsek, bu sefer seri yakınsamaz, çünkü belli aşamalarda parantezsiz serinin kısmi toplamları her k doğal sayısına eşit olurlar. (b sayısı bazı kısmi toplamlar her k olsun diye itinayla seçilmişlerdir.)

Öte yandan gruplanan terim sayısı sınırlı tutulursa ve serinin genel terimi 0'a yakınsıyorsa, her şey yolunda gider:

Teorem 14.9. *Eğer bir serinin genel terimi* 0*'a yakınsıyorsa ve terimler en fazla b terim içeren bloklar halinde* (*terimlerin sıraları bozulmadan*) *gruplandığında seri yakınsak bir seriye dönüşüyorsa, o zaman başlangıçtaki seri de* (*yani gruplaşmamış seri de*) *yakınsaktır; üstelik gruplanmış ve gruplanmamış seriler aynı sayıya yakınsarlar.*

Bu teoremi kanıtlamadan önce kanıtı çok daha kolay olan şu teoremi kanıtlayalım:

Teorem 14.10. $\sum x_i$ *bir seri olsun.* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *varsayımını yapalım. Bir* $k > 0$ *doğal sayısı için* $(s_{kn})_n$ *kısmi toplamların bir s sayısına yakınsadığını varsayalım. O zaman* $\sum x_i$ *serisi de s sayısına yakınsar.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ eşitliğinden dolayı her $n > N_1$ için $|x_n| < \epsilon/2k$ eşitsizliğini sağlayan bir N_1 vardır. $\lim_{n\to\infty} s_{kn} = s$ eşitliğinden dolayı her $n > N_2$ için $|s - s_{kn}| < \epsilon/2$ eşitsizliğini sağlayan bir N_2 vardır. $N = (k+1)\cdot\max\{N_1, N_2\}$ ve $n > N$ olsun. n'yi k'ya bölelim: Bir $n_0 > \max\{N_1, N_2\}$ ve bir $r = 0, 1, \ldots, k-1$ için, $n = kn_0 + r$ olur. Buradan da

$$\begin{array}{rcl} |s - s_n| & = & |s - (s_{kn_0} + x_{kn_0+1} + \cdots + x_{kn_0+r})| \\ & \leq & |s - s_{kn_0}| + |x_{kn_0+1}| + \cdots + |x_{kn_0+r}| \\ & \leq & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2k} + \cdots + \frac{\epsilon}{2k} \\ & = & \epsilon \end{array}$$

çıkar, ki bu da istediğimizi kanıtlar. □

Şimdi yukardaki fikri genelleştirip Teorem 14.9'u kanıtlayalım.

Teorem 14.9'un Kanıtı: Seri $\sum x_i$ olsun. s_n de $\sum x_i$ serisinin kısmi toplamları olsun:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

Şimdi $0 < j_k - j_{k-1} \leq b$ eşitsizliğini sağlayan bir

$$0 = j_0 < j_1 < j_2 < j_3 < \dots$$

göstergeç dizisi ele alalım ve $\sum x_i$ serisini

$$(x_0 + \cdots + x_{j_1-1}) + (x_{j_1} + \cdots + x_{j_2-1}) + \cdots$$

biçiminde gruplayıp böylece elde edilen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} x_i \right)$$

serisinin bir t sayısına yakınsak olduğunu varsayalım. t_m bu gruplaşmış serinin kısmi toplamlarını simgelesin:

$$t_m = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} x_i \right) = \sum_{i=0}^{j_{m+1}-1} x_i = s_{j_{m+1}-1}.$$

Varsayımdan dolayı

$$\lim_{m\to\infty} t_m = t$$

eşitliğini biliyoruz ve

$$\lim_{n\to\infty} s_n = t$$

eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Bunun için s_n'lerle t_m'ler arasında bir ilişki bulacağız.

n verilmiş olsun. $j_{m+1} < n \leq j_{m+2}$ eşitsizliklerini sağlayan m sayısını seçelim. O zaman,

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{j_{m+1}-1} x_i + \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i = t_m + \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i$$

buluruz. Demek ki,

$$|s_n - t_m| = \left| \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=j_{m+1}}^{n} |x_i|$$

olur. m'nin seçiminden dolayı, en sağdaki toplamda en fazla b terim vardır. $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsadığından, n'yi büyüterek (ki o zaman m ve j_m de büyürler) $|s_n - t_m|$ sayısını dilediğimiz kadar küçültebiliriz, yani

$$\lim_{n\to\infty} |s_n - t_m| = 0$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - t_m) = 0$$

olur. Belki söylemeye bile gerek yok ama m sayısı n'ye bağımlıdır ve n sonsuza gittiğinde m de sonsuza gider (çünkü $n \le (m+2)b$ eşitsizliği geçerlidir); dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - t_m) + \lim_{n\to\infty} t_m = \lim_{n\to\infty} t_m = \lim_{n\to\infty} t_m = t$$

olur. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Eğer serinin terimleri ≥ 0 ise, gruplanan terim sayısına sınır koymak gereksizdir. O zaman da her şey yolunda gider:

Teorem 14.11. *Eğer terimleri negatif olmayan bir serinin genel terimi* 0*'a yakınsıyorsa ve terimler* (*sıraları bozulmadan*) *herhangi bir şekilde gruplandığında seri yakınsak bir seriye dönüşüyorsa, o zaman başlangıçtaki seri de* (*yani gruplanmamış seri de*) *yakınsaktır; üstelik gruplanmış ve gruplanmamış seriler aynı sayıya yakınsarlar.*

Kanıt: Bir önceki kanıttaki gösterimi kabul edelim ve aynı fikri devam ettirelim.

$$|s_n - t_m| = \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i$$

aşamasına kadar geldik. Bundan sonra,

$$|s_n - t_m| = \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i \le \sum_{i=j_{m+1}}^{j_{m+2}-1} x_i = t_{m+1} - t_m$$

şeklinde devam edelim. $(t_m)_m$ dizisi Cauchy olduğundan, n'yi, dolayısıyla m'yi de yeterince büyük alırsak, $t_{m+1} - t_m$ sayısını her sayıdan küçük yapabiliriz. Şimdi bir önceki teoremin kanıtındaki gibi devam edelim. □

Serinin Terimlerini Karmak. Yukarda serinin terimlerinin yerlerini değiştirmemiştik. Şimdi serinin terimlerinin yerlerini değiştirdiğimiz zaman başımıza geleceklere bakalım.

Terimleri özel bir biçimde kararak, serinin yakınsaklığının ya da ıraksaklığının bozulmayacağını görebiliriz. Örneğin

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2i} + x_{2i+1} + \cdots$$

serisi yerine

$$x_1 + x_0 + x_3 + x_2 + \cdots + x_{2i+1} + x_{2i} + \cdots$$

serisine bakabiliriz. Eğer birinci seri yakınsaksa ikinci seri de yakınsaktır. s_n ve t_n bu iki serinin (bu sırayla) kısmi toplamları olsun ve birinci serinin s'ye yakınsadığını varsayalım. t_n'leri s_n cinsinden hesaplamaya çalışalım.

$$t_{2n+1} = x_1 + x_0 + \cdots + x_{2n+1} + x_{2n} = s_{2n+1}$$

olur. Ama t_{2n}'de küçük bir düzeltme payı gerekir:

$$t_{2n} = x_1 + x_0 + \cdots + x_{2n-2} + x_{2n+1} = t_{2n-1} + x_{2n+1} = s_{2n-1} + x_{2n+1}.$$

Demek ki, Teorem 14.4'ten dolayı,

$$\lim_{n\to\infty} t_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} + x_{2n+1}) = s.$$

Aynı zamanda

$$\lim_{n\to\infty} t_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$$

olduğundan, $(t_n)_n$ kısmi toplamlar dizisinin limiti de vardır ve bu limit s'ye eşittir (Alıştırma 8.9).

Aynı biçimde, eğer ikinci seri yakınsaksa birinci seri de yakınsaktır.

Yukarda serinin terimlerini ikişer ikişer kardık. Beşer beşer de karabilirdik, bir şey değişmezdi. Ayrıca beşer beşer hep aynı biçimde de karmak zorunda değiliz, her seferinde ayrı bir karma kullanabiliriz. Bunu birazdan kanıtlayacağız.

Ama okur dikkatli olmalıdır, terimler rastgele uzunlukta gruplar halinde karılırsa yakınsak seriler ıraksayabilir. Birazdan bir örnek göreceğiz. Yakınsaklığın değişmemesi için ya yukardaki gibi özel karmaları ya da bazı özel serileri almak gerekir. Teorem 14.13'te göreceğimiz üzere, terimleri pozitif olan bir seriyi istediğimiz gibi karabiliriz, yakınsaklığı/ıraksaklığı değişmez. Ama terimleri negatif ve pozitif olan serileri kararken dikkatli olmak gerekir.

Teorem 14.12. *$j > 0$ bir doğal sayı olsun. Her $k \geq 0$ için σ_k,*

$$\{0, 1, \ldots, j-1\}$$

kümesinin bir eşleşmesi olsun. Her i doğal sayısı için, r_i sayısı $0 \leq r_i < j$ ve $i = kj + r_i$ olacak biçimde seçilsin.

$$y_i = x_{kj+\sigma_k(r_i)}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır. Ayrıca bu durumda her iki seri de aynı sayıya yakınsar.

Kanıt: $\sum x_i$ serisinin s'ye yakınsadığını varsayalım. Yaptığımız karma, $\sum x_i$ serisinin terimlerini, en baştan başlayarak, j'li bloklar halinde karıyor, ama her j'lik bloğu değişik biçimde karabilir. Her k doğal sayısı için,

$$x_{kj},\ x_{kj+1},\ \ldots,\ x_{kj+(j-1)}$$

terimleri

$$x_{kj+\sigma_{k(0)}},\ x_{kj+\sigma_k(1)},\ \ldots,\ x_{kj+\sigma_k(j-1)}$$

terimlerine dönüşüyor. Dolayısıyla eğer s_n ve t_n sayıları $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin (bu sırayla) kısmi toplamlarıysa, her k ve $0 \le r < j$ doğal sayıları için,

$$s_{kj+r} = t_{kj+r} - x_{kj} - \cdots - x_{kj+r} + x_{kj+\sigma_k(0)} + \cdots + x_{kj+\sigma_k(r)}$$

elde ederiz. Teorem 14.4'ten dolayı her $0 \le r < j$ için,

$$\lim_{j\to\infty} t_{kj+r} = \lim_{j\to\infty} s_{kj+r} = s$$

olur. Demek ki $\sum_{i\ge1} y_i$ serisi de s'ye yakınsıyor.

Şimdi $\sum y_i$ serisinin yakınsadığını varsayalım. $\sum x_i$ serisi de $\sum y_i$ serisinden yukardaki biçimde elde edilir. Bunun için σ_k yerine σ_k^{-1} almak yeterlidir. Dolayısıyla aynı sonuç $\sum y_i$ serisi için de geçerlidir. □

Bu teoremi hafifçe genelleştirmek mümkündür. Karmalarını hep j tane terim üzerine olma koşulunu, karma yapılan terim sayısını sınırlı tutmak koşuluyla değiştirebiliriz.

Eğer karma yukardaki gibi terbiyeli bir biçimde yapılmazsa, başlangıçtaki seri yakınsak bile olsa, kararak elde edilen seri bir başka sayıya yakınsayabilir, hatta ıraksak olabilir. Bir örnek verelim.

Örnek 14.38. Bölüm 17'de $\sum_{i\ge1} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$ serisinin yakınsak olduğunu göreceğiz, şimdilik bu serinin yakınsadığını varsayalım. Şimdi serinin terimlerini karacağız. $j = 0, 1, 2$ için,

$$y_{3i+j} = \begin{cases} \frac{1}{2i+1} & \text{eğer } j = 1 \text{ ise} \\ \frac{-1}{4i+2} & \text{eğer } j = 2 \text{ ise} \\ \frac{-1}{4i+4} & \text{eğer } j = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. $(y_i)_i$ dizisinin $((-1)^{i+1}/i)_{i\ge1}$ dizisinin bir karması olduğunu kanıtlamak oldukça kolay. Şimdi $\sum_{i\ge1} y_i$ serisine bakalım:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

$(y_n)_{n\ge1}$ dizisi 0'a yakınsadığından, Teorem 14.9'a göre, yakınsaklığı bozmadan, $\sum_{i\ge1} y_i$ serisini şöyle gruplayabiliriz:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots$$

ve

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

serisini, yani $\sum_{i\geq 1}(-1)^{i+1}/i$ serisinin yarısı olan

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)$$

serisini buluruz. Görüldüğü gibi toplam yarıya indi!

Öte yandan eğer serinin terimleri negatif değilse terimlerini istediğimiz gibi karabiliriz, yakınsaklık ve toplam değişmez:

Teorem 14.13. *$\sum x_i$, terimleri pozitif olan bir seri olsun. σ, $\mathbb{N}$'nin bir eşleşmesi olsun. O zaman, eğer $\sum x_i$ ve $\sum x_{\sigma(i)}$ serilerinden biri yakınsıyorsa diğeri de yakınsar ve yakınsadıklarında aynı sayıya yakınsarlar.*

Kanıt: s_n ve t_n sırasıyla $\sum x_i$ ve $\sum_i x_{\sigma(i)}$ serilerinin kısmi toplamları, s ve t de serilerin limitleri olsun. Her iki kısmi toplamlar dizisi de artan dizidir. $(t_n)_n$ dizisinin üstten s tarafından sınırlı olduğunu kanıtlayacağız.

$$m(n) = \max\{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}$$

olsun. Hesaplayalım:

$$t_n = \sum_{i=0}^{n} x_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=0}^{m(n)} x_i = s_{m(n)} \leq s.$$

Demek ki $(t_n)_n$ dizisi de, dolayısıyla $\sum x_{\sigma(i)}$ serisi de yakınsak. Eğer limite t dersek, yukardaki eşitsizlikten $t \leq s$ elde ederiz. Ama şimdi s, t ve σ ile yaptığımızı t, s ve σ^{-1} ile de yapabiliriz ve bu sefer $s \leq t$ elde ederiz. □

Bu teorem biraz daha genel bir haliyle de doğrudur. Bkz. Teorem 15.9.

Kimi zaman göstergeç kümesini sonsuz parçalara ayırmak zorunda kalabiliriz. Eğer serinin terimleri pozitifse bu bir sorun teşkil etmez. Kanıta geçmeden önce bunun yararını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 14.39.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$$

serisini toplamak istediğimizi varsayalım. Bu seriyi şöyle açalım:

$$\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)+\cdots$$

Teorem 14.8 ve 14.11'e göre bu serilerden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır ve iki seri de bu durumda aynı sayıya yakınsarlar. Şimdi bu ikinci serinin yakınsaklığını kanıtlamaya çalışalım.

İkinci serideki her parantezin ilk terimini alarak

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$$

serisini, (ikinci parantezden başlayarak) her parantezin ikinci terimini alarak

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

serisini, (üçüncü parantezden başlayarak) her parantezin üçüncü terimini alarak

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots$$

serisini alalım ve bunu böylece sonsuza kadar devam edelim. Elde ettiğimiz seriler yakınsaktır:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots &= 1\\
\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots &= \frac{1}{2}\\
\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots &= \frac{1}{2^2}
\end{aligned}$$

Bunları toplarsak da 2 buluruz. Bu bulgudan, birinci ve ikinci serilerin 2'ye yakınsadığını söyleyebilir miyiz?

Ne yaptığımızın farkına vardınız mı?

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}}_{2 \text{ adet}} + \underbrace{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}}_{3 \text{ adet}} + \underbrace{\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4}}_{4 \text{ adet}} + \cdots$$

serisini hesaplamak için, sayıları, seride önerildiği ve her Avrupalının yapacağı gibi terimleri soldan sağa doğru teker teker toplayacağımıza, aşağıdaki gibi dizip

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\\
\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\\
\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\\
\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4}\\
\quad\quad\cdots
\end{array}$$

Çinliler gibi en sol sütundan başlayarak yukardan aşağı topladık ve sonra sütunların toplamlarını topladık:

En sol sütunun toplamı 1.

Bir sonraki sütunun toplamı 1/2.

Soldan üçüncü sütunun toplamı 1/4. Vs.

Soru belli: Bunu yapmaya hakkımız var mı? Yani satırların toplamının toplamı, sütunların toplamının toplamına eşit midir? Yanıt: Evet var! Bir sonraki teoremde bunu kanıtlayacağız.

Teorem 14.14. *$\sum_{i\geq 0} x_i$ terimleri negatif olmayan bir seri ve*

$$\mathbb{N} = A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots$$

$\mathbb{N}$'nin herhangi bir parçalanışı olsun.

i. *Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa, her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi de yakınsaktır. Ayrıca, eğer $y_j = \sum_{i\in A_j} x_i$ tanımını yaparsak, $\sum y_j$ serisi de yakınsaktır ve bu seri $\sum x_i$ toplamına eşittir.*

ii. *Her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi yakınsak olsun. $y_j = \sum_{i\in A_j} x_i$ tanımını yapalım. Eğer $\sum y_j$ serisi de yakınsaksa o zaman $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır ve bu seri $\sum y_j$ toplamına eşittir.*

Kanıt: i. $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisinin kısmi toplamları elbette $\sum x_i$ serisinden küçükeşittir. Kısmi toplamları artan bir dizi oluşturduğundan, $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi yakınsaktır (Teorem 7.1) ve toplamı $\sum x_i$ serisinden küçükeşittir. Demek ki

$$y_j \le \sum x_i.$$

$\sum y_j$ serisinin kısmi toplamları $\sum x_i$ serisi tarafından üstten sınırlanmıştır ve $\sum y_j$ serisi yakınsar (Teorem 7.1) ve

$$\sum y_j \le \sum x_i$$

olur. Şimdi eşitliği kanıtlayalım. $\epsilon > 0$ olsun. k'yı yeterince büyük seçerek

$$\sum x_i - (y_0 + \cdots + y_k)$$

farkını ϵ'dan küçük yapabileceğimizi kanıtlamalıyız. Ama tek bir k için farkı ϵ'dan küçük yapmak yeterli, çünkü k büyüdükçe yukardaki fark küçülür. Önce öyle bir n bulalım ki,

$$\sum x_i - (x_0 + \cdots + x_n) < \epsilon$$

olsun. Ardından öyle bir k bulalım ki,

$$0, 1, \ldots, n \in A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k$$

olsun. O zaman elbette,

$$x_0 + \cdots + x_n \le y_0 + \cdots + y_k$$

olur. Dolayısıyla,

$$\sum x_i - (y_0 + \cdots + y_k) \le \sum_{i\ge 0} x_i - (x_0 + \cdots + x_n) < \epsilon$$

olur. Birinci önerme kanıtlanmıştır.

ii. Verilmiş bir i için, $j(i)$ göstergeci, $i \in A_{j(i)}$ içindeliğini sağlayacak biçimde seçilmiş olsun. O zaman $x_i \le y_{j(i)}$ olur. Dolayısıyla,

$$x_0 + \cdots + x_n \le y_{j(0)} + \cdots + y_{j(n)} \le \sum y_j$$

olur. Demek ki $\sum x_i$ serisinin kısmi toplamları üstten $\sum y_j$ tarafından sınırlıdır. Bundan da, Teorem 7.1 yardımıyla, $\sum x_i$ serisinin yakınsak olduğu ve

$$\sum x_i \le \sum y_j$$

eşitsizliği çıkar. Şimdi eşitliği gösterelim. $\epsilon > 0$ olsun. n'yi yeterince büyük seçerek

$$\sum y_j - (x_0 + \cdots + x_n)$$

farkını ϵ'dan küçük yapabileceğimizi kanıtlamalıyız. Ama tek bir n için farkı ϵ'dan küçük yapmak yeterli, çünkü n büyüdükçe yukardaki fark küçülür. Hatta sağda toplanan x_i'lerin göstergeçlerinin illa 0'dan n'ye gitmeleri gerekmez, aradan sadece bazı göstergeçleri seçsek de yeter. Önce öyle bir k seçelim ki,

$$\sum y_j - (y_0 + \cdots + y_k) < \frac{\epsilon}{2}$$

olsun. Her $j = 0, \ldots, k$ için öyle bir sonlu $I_j \subseteq A_j$ göstergeç kümesi vardır ki,

$$y_j - \sum_{i \in I_j} x_i < \frac{\epsilon}{2(k+1)}$$

olur. O zaman

$$I = I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_k$$

tanımını yaparsak,

$$(y_0 + \cdots + y_k) - \sum_{i \in I} x_i < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Demek ki,

$$\begin{aligned}\sum y_j - \sum_{i \in I} x_i &= \left(\sum y_j - (y_0 + \cdots + y_k)\right) + \left((y_0 + \cdots + y_k) - \sum_{i \in I} x_i\right) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

Şimdi n'yi o kadar büyük seçelim ki

$$I = I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_k \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum y_j - (x_0 + \cdots + x_n) \le \sum y_j - \sum_{i \in I} x_i < \epsilon$$

olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

Yukardaki teoremin ikinci kısmı herhangi bir seri için ve sonlu sayıda parçalanma için de doğrudur:

Teorem 14.15. *$\sum x_i$ herhangi bir seri olsun. $\mathbb{N} = A \sqcup B$, $\mathbb{N}$'nin herhangi bir parçalanışı olsun. Eğer $\sum_{i \in A} x_i$ ve $\sum_{i \in B} x_i$ serileri yakınsaksa ve toplamlar a ve b'ye eşitse, o zaman $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır ve bu seri $a + b$ toplamına eşittir.*

Kanıt: s_n, $\sum x_i$ serisinin kısmi toplamı olsun.

$$A_n = A \cap \{0, 1, \ldots, n\} \text{ ve } B_n = B \cap \{0, 1, \ldots, n\}$$

olsun. Ayrıca

$$a_n = \sum_{i \in A_n} x_i \text{ ve } b_n = \sum_{i \in B_n} x_i$$

tanımlarını yapalım. Her a_n, $\sum_{i \in A} x_i$ serisinin bir kısmi toplamıdır. $(a_n)_n$ dizisinin $\sum_{i \in A} x_i$ serisinin kısmi toplamları dizisinden tek farkı, $(a_n)_n$ dizisinde bazı kısmi toplamların tekrar etmesidir, nitekim $A_n = A_{n+1}$ olduğunda $a_n = a_{n+1}$ olur. Aynı şeyler $(b_n)_n$ dizisi için de geçerlidir. Dolayısıyla $(a_n)_n$ dizisi a'ya ve $(b_n)_n$ dizisi b'ye yakınsar. Tanımdan dolayı

$$s_n = a_n + b_n$$

olduğundan, $\lim_{n \to \infty} s_n$ vardır ve $a + b$'ye eşittir. □

Sonuç 14.16. *$\sum x_i$ herhangi bir seri olsun. $\mathbb{N} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$, $\mathbb{N}$'nin herhangi bir parçalanışı olsun. Eğer her $j = 1, \ldots, k$ için $\sum_{i \in A_j} x_i$ serisi yakınsaksa ve toplamlar a_i'ye eşitse, o zaman $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır ve bu seri*

$$a_1 + \cdots + a_k$$

toplamına eşittir. □

Teorem 14.14'ü ilerde Teorem 15.10 olarak genelleştireceğiz.