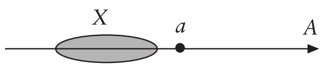
13. Dizilerin Alt ve Üstlimitleri

$(A, <)$ tamsıralı herhangi bir küme olsun. $X \subseteq A$, boş olmayan bir altküme ve $a \in A$ olsun. Eğer her $x \in X$ için, $x \leq a$ oluyorsa, a'ya X'in ***üstsınırı*** denir, daha doğrusu $(A, <)$ tamsıralamasında üstsınır denir, çünkü üstsınır A üzerine konulan sıralamaya göre değişir. Eğer a, X'in bir üstsınırıysa, a'dan büyük her eleman da X'in bir üstsınırıdır; yani üstsınırdan tek bir tane olmayabilir. Ama bazen de hiç üstsınır yoktur; örneğin $A = \mathbb{R}$ ise ve X, $\mathbb{N}$'yi içeriyorsa X'in bir üstsınırı olamaz. Öte yandan eğer $A = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ise, ∞ elemanı, A'nın boş olmayan her altkümesinin bir üstsınırıdır.



a, X'in bir üstsınırıdır

X'in üstsınırlarının en küçüğüne -eğer varsa- ***en küçük üstsınır*** denir ve en fazla bir tane olan bu eleman $\sup X$ olarak gösterilir. Bilindiği üzere $\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten sınırlı her altkümesinin bir en küçük üstsınırı vardır. En büyük altsınır da -olduğunda- $\inf X$ olarak gösterilir.

Bir önceki bölümde tanımladığımız $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ tamsıralamasını anımsayalım: ∞'un her gerçel sayıdan büyük, $-\infty$'un ise her gerçel sayıdan daha küçük olmasına karar verilmişti. $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinin (daha doğrusu tamsıralamasının) boş olmayan her X altkümesinin $\inf X$ olarak gösterilen en büyük altsınırı vardır. Benzer şekilde $\sup X$ de her zaman vardır.

Örnek 13.1. Aşağıdaki örneklerde sup ve inf, $\overline{\mathbb{R}}$ tamsıralamasında alınmıştır.
$\sup \overline{\mathbb{R}} = \infty,\ \inf \overline{\mathbb{R}} = -\infty.$
$\sup \mathbb{R} = \infty,\ \inf \mathbb{R} = -\infty.$
$\sup \mathbb{Z} = \infty,\ \inf \mathbb{Z} = -\infty.$
$\sup \mathbb{N} = \infty,\ \inf \mathbb{N} = 0,$
$\sup[-\infty, 5] = 5,\ \inf[-\infty, 5] = -\infty,$
$\sup(-\infty, 5) = 5,\ \inf(-\infty, 5) = -\infty,$
$\sup\{-\infty, 5, 7\} = 7,\ \inf\{-\infty, 5, 7\} = -\infty,$
$X = \{-1/n : n = 1, 2, \ldots\}$ ise, $\sup X = 0$, $\inf X = -1$.

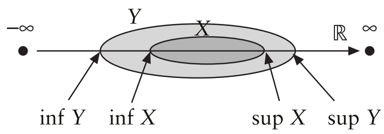
Alıştırmalar

13.2. $A(x) = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\sup A(x)$ ve $\inf A(x)$'i bulun.

13.3. $A(x) = \{x^n : -n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\sup A(x)$ ve $\inf A(x)$'i bulun.

13.4. $A(x) = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olsun. $\sup A(x)$ ve $\inf A(x)$'i bulun.

Eğer $\emptyset \neq X \subseteq Y$ ise, $\sup X \leq \sup Y$ ve $\inf X \geq \inf Y$ olur elbette, yani sup artan, inf ise azalan bir fonksiyondur.



Limit. Terimleri $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinden olan dizilerin limitlerinden de söz edebiliriz. Açıklayalım: $(x_n)_n$, terimleri $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde olan bir dizi olsun ve

$$\begin{aligned} I &= \{n : x_n \in \mathbb{R}\}, \\ I_\infty &= \{n : x_n = \infty\}, \\ I_{-\infty} &= \{n : x_n = -\infty\} \end{aligned}$$

tanımlarını yapalım. $(y_n)_n = (x_n)_{n\in I}$ olsun, yani $(y_n)_n$, $(x_n)_{n\in I}$ dizisinden $-\infty$ ve ∞'ları çıkardığımızda kalan altdizi olsun.

• Eğer I_∞ ve $I_{-\infty}$ kümelerinden ikisi birden sonsuzsa, o zaman -tanım gereği- $(x_n)_n$ dizisinin limiti yoktur.

• Eğer I_∞ ve $I_{-\infty}$ kümelerinin ikisi birden sonluysa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin limitinin olup olmadığına ve varsa limitin ne olduğuna $(y_n)_n$ dizisine bakıp karar verelim:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(Sonuç ∞ ya da $-\infty$ da çıkabilir.)

• Eğer I_∞ sonsuz, $I_{-\infty}$ sonluysa, o zaman diziden ∞ ve $-\infty$'ları atalım, geriye kalan dizi sonluysa ya da ∞'a ıraksıyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin limitinin ∞ olduğunu söyleyelim:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

• Eğer $I_{-\infty}$ sonsuz, I_∞ sonluysa, o zaman diziden ∞ ve $-\infty$'ları atalım, geriye kalan dizi sonluysa ya da $-\infty$'a ıraksıyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin limitinin $-\infty$ olduğunu söyleyelim:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Bu limit kavramı bir önceki bölümde $\overline{\mathbb{R}}$ üzerine tanımlanan dört işlemle uyumludur, yani Teorem 12.16 $\overline{\mathbb{R}}$ için de geçerlidir.

Terimleri $\overline{\mathbb{R}}$'de olan ve artan bir $(x_n)_n$ dizisinin limiti dizinin en küçük üstsınırıdır elbette:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Limsup ve Liminf. $(x_n)_n$, terimleri $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinden olan bir dizi olsun. Bizi asıl ilgilendiren, dizinin gerçel sayı dizisi olduğu durumdur ama şimdilik bu genellikte almanın bir mahsuru yok. Gene de okur sürekli olarak $(x_n)_n$ dizisinin gerçel sayı dizisi olduğu durumu irdelemesinde yarar vardır.

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\},$$

kümesi $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinin de bir altkümesidir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için,

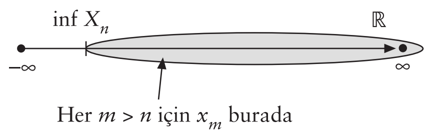
$$X_n = \{x_m : m > n\}$$

kümesinin $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde en büyük altsınırı vardır: $\inf X_n$. (Eğer dizinin terimleri gerçel sayılar olsaydı, o zaman $\inf X_n$, $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ kümesinin bir elemanı olurdu.)

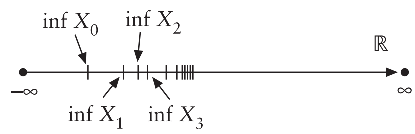
$(x_n)_n$ dizisinin belki ilk birkaç terimi dışında tüm terimleri $\inf X_n$'den büyükeşittir; nitekim her $m > n$ için,

$$\inf X_n \le x_m$$

olur. Şekil aşağıda:



Her n için $X_n \supseteq X_{n+1}$ olduğundan, $(\inf X_n)_n$ artan bir dizidir.

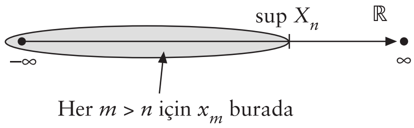


Benzer şekilde X_n kümesinin en küçük üstsınırı vardır: $\sup X_n$. (Eğer dizinin terimleri gerçel sayılar olsaydı, o zaman $\sup X_n$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinin bir elemanı olurdu.)

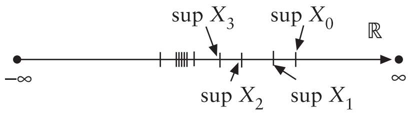
$(x_n)_n$ dizisinin belki ilk birkaç terimi dışında tüm terimleri $\sup X_n$'den küçükeşittir; nitekim her $m > n$ için,

$$\sup X_n \ge x_m$$

olur.



Ayrıca, $(\sup X_n)_n$ azalan bir dizidir.

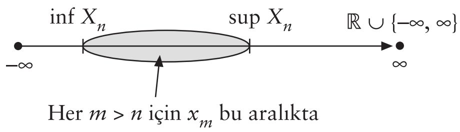


Alıştırma 13.5. $(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi olsun. Eğer belli bir n için $\sup X_n = \infty$ ise her n için $\sup X_n = \infty$ olması gerektiğini kanıtlayın. Eğer belli bir n için $\inf X_n = -\infty$ ise her n için $\inf X_n = -\infty$ olması gerektiğini kanıtlayın.

Sonuç olarak, belki dizinin başındaki sonlu sayıdaki terim dışında, $(x_n)_n$ dizisi $\inf X_n$ ile $\sup X_n$ arasına sıkışmıştır: Her $m > n$ için,

$$\inf X_n \leq x_m \leq \sup X_n$$

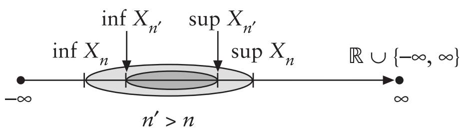
olur.



Yani dizinin kuyruğu, her n için, $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinin

$$[\inf X_n, \sup X_n]$$

kapalı aralığındadır. n büyüdükçe bu aralıklar küçülür ve dizinin "özünün"(yani kuyruğunun, yani bizi ilgilendiren kısmının) ne kadar küçük bir aralığa sığıştığını görebiliriz.



$\inf X_n \in \overline{\mathbb{R}}$ olduğundan, $(\inf X_n)_n$ dizisinin $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde en küçük üstsınırı vardır. $(x_n)_n$ dizisinin ***altlimiti***,

$$\sup\{\inf X_n : n \geq 0\}$$

olarak tanımlanır ve

$$\underline{\lim}\, x_n \text{ ya da } \liminf x_n$$

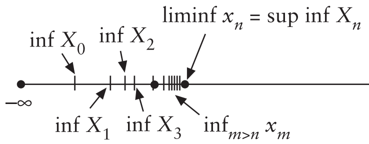
olarak gösterilir. Demek ki

$$\liminf x_n = \sup\{\inf\{x_m : m \geq n\} : n \geq 0\} = \lim_{n\to\infty}\{\inf\{x_m : m \geq n\} : n \geq 0\}.$$

Şu yazılımların da kullanıldığı olur:

$$\liminf x_n = \lim_{n\to\infty} \inf X_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} x_m = \lim_{n\to\infty} \inf_{m>n} x_m = \sup_{n\geq 0} \inf_{m>n} x_m$$

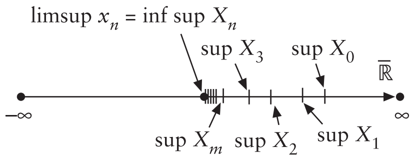
Elbette her n için, $\inf X_n \leq \liminf x_n$ olmalı.



$(x_n)_n$ dizisinin ***üstlimiti*** de benzer şekilde tanımlanır:

$$\limsup x_n = \lim_{n\to\infty} \sup X_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} x_m = \lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} x_m = \inf_{n\geq 0} \sup_{m>n} x_m.$$

Elbette her n için $\sup X_n \geq \liminf x_n$ olmalı.



Dikkat: Dizi gerçel sayı dizisi olsa da, $\limsup x_n$ ve $\limsup x_n$, $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinin herhangi bir elemanı olabilir, yani herhangi bir gerçel sayı olabileceği gibi, ∞ ya da $-\infty$ olabilir.

Kimi zaman $\liminf x_n$ ve $\limsup x_n$ ifadelerindeki n yanıltıcı olabilir, olmasın! Bu ifadelerde aslında n yoktur! Yani bu ifadeler n'den bağımsızdır, aynen $\lim_{n\to\infty} x_n$ ve $\cup_n A_n$ ifadelerinin n'den bağımsız olduğu gibi... Örneğin $\liminf x_n = \liminf x_m$.

Örnekler

13.6. $\limsup n = \liminf n = \infty$.

13.7. $\limsup (-1)^n n = \infty$, $\liminf (-1)^n n = -\infty$.

13.8. $\limsup 1/n = \liminf 1/n = 0$.

13.9. Eğer n çiftse $x_n = n$, tekse $x_n = 0$ olsun. O zaman $\limsup x_n = \infty$, $\liminf x_n = 0$ olur.

13.10.
$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n^2+4} & \text{eğer } n \equiv 0 \mod 3 \text{ ise} \\ 1 - 1/n & \text{eğer } n \equiv 1 \mod 3 \text{ ise} \\ 2 + 1/n & \text{eğer } n \equiv 2 \mod 3 \text{ ise} \end{cases}$$
olsun. O zaman limsup $x_n = 2$, $\liminf x_n = 0$ olur. Dizinin 0'a, 1'e ve 2'ye yakınsayan altdizileri vardır.

13.11. p_n, n'inci asal sayı olsun. $\liminf(p_{n+1} - p_n) = 2$ eşitliği matematikte ***ikiz asallar sanısı*** olarak bilinir ve matematiğin bugüne kadar kanıtlanmamış en önemli ve en ünlü önermelerinden biridir.

Alıştırma 13.12. Terimleri verilmiş şu dizilerin $\limsup$ ve $\liminf$'ini bulun: $(-1)^n + 1/n$, $2^{-n} + 3^{-n}$, $2^n + 3^{-n}$, $\frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{(-1)^n n}{n+1}$, $\frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$, $(-1)^n(2 + 3/n)$, $\frac{n+(-1)^n(2n+1)}{n}$.

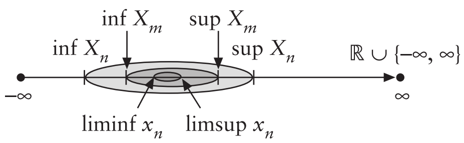
$\liminf$ ve $\limsup$'ün önemini daha iyi kavramak için kolaydan zora doğru giden birkaç sonuç kanıtlayalım.

$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki dizi olsun. Dizinin terimleri $\mathbb{R}$ ya da $\overline{\mathbb{R}}$ kümelerinden olabilir, elde edeceğimiz sonuçlar değişmeyecek. Böyle yazılan diziler için de X_n ve Y_n kümeleri yukarda verilen anlama gelecekler, örneğin,

$$Y_n = \{y_m : m > n\}$$

olacak.

Önsav 13.1. $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.



$m > n$ durumu

Kanıt: Her $m > n$ için,

$$\inf X_n \leq \inf X_m \leq \sup X_m \leq \sup X_n$$

olduğundan, her $m > n$ için,

$$\inf X_m \leq \sup X_n$$

olur. Eğer n'yi sabitleyip her iki tarafın da m'ye göre limitini (ya da en küçük üstsınırını) alırsak

$$\liminf x_m \leq \sup X_n$$

buluruz. Sol taraftaki ifade m'den bağımsızdır. Şimdi her iki tarafın da n'ye göre limitini (ya da en büyük altsınırını) alalım.

$$\liminf x_m \leq \limsup x_n$$

buluruz ki bu da aynen $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ anlamına gelir. □

Bu önsavdan dolayı,

$$\liminf x_n = \infty \text{ ise } \limsup x_n = \infty$$

ve

$$\limsup x_n = -\infty \text{ ise } \liminf x_n = -\infty$$

önermeleri doğrudur.

Önsav 13.2. *Eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki diziyse, o zaman*

$$\limsup\,(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$$

ve

$$\liminf\,(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$$

olur.

Kanıt: Birinci eşitsizliği kanıtlamakla yetinelim. Elbette, her n için,

$$\sup\{x_m + y_m : m > n\} \leq \sup\{x_m : m > n\} + \sup\{x_m : m > n\}.$$

Şimdi her iki tarafın da limitini alırsak, istediğimiz kanıtlanmış olur. □

Yukardaki eşitsizlik eşitliğe çevrilemez:

$$x_n = (-1)^n \text{ ve } y_n = (-1)^{n+1}$$

olsun. O zaman $x_n + y_n = 0$ ve

$$\begin{aligned} &\limsup\,(x_n + y_n) = 0,\\ &\limsup x_n = 1\\ &\limsup y_n = 1 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 13.13. $-\liminf x_n = \limsup\,(-x_n)$ eşitliğini kanıtlayın.

Önsav 13.3. $\liminf x_n = \infty$ *ancak ve ancak* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *ve* $\limsup x_n = -\infty$ *ancak ve ancak* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Kanıt: Birincisini kanıtlamak yeterli, diğeri birincisine çok benzer. Önce

$$\liminf x_n = \infty$$

varsayımını yapalım. Tanıma göre,

$$\sup_{N\geq 0} \inf_{n>N} x_n = \infty.$$

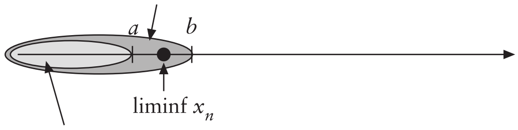
A herhangi bir gerçel sayı olsun. Demek ki belli bir N için,

$$A < \inf_{n>N} x_n;$$

yani her $n > N$ için, $A < x_n$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Şimdi de $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ varsayımını yapalım. $\inf_{n>N} x_n$ sayılarının her sayıyı aştıklarını göstermek gerekiyor; yani A hangi gerçel sayı olursa olsun, belli bir N için $\inf_{n>N} x_n > A$ eşitsizliğini, yani her $n > N$ için $x_n > A$ eşitsizliğini göstermeliyiz, ki bu da $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ varsayımının doğrudan sonucu. □

Önsav 13.4. i. *Eğer* $\liminf x_n \neq \infty$ *ise,* $\epsilon > 0$ *hangi gerçel sayı olursa olsun, dizinin sadece sonlu sayıda terimi* $\liminf x_n - \epsilon$ *sayısından küçüktür.*
ii. *Eğer* $\liminf x_n \neq -\infty$ *ise, dizinin sonsuz sayıda terimi* $\liminf x_n + \epsilon$ *sayısından küçüktür.*
iii. *Eğer* $\liminf x_n = \infty$ *ise,* r *hangi gerçel sayı olursa olsun, dizinin sadece sonlu sayıda terimi* r*'den küçüktür.*



Kanıt: i. Eğer $\liminf x_n = -\infty$ ise, tanım gereği,

$$\liminf x_n - \epsilon = -\infty$$

olduğundan, önsav bariz. Bundan böyle

$$\ell = \liminf x_n \in \mathbb{R}$$

olsun.

$$\ell - \epsilon < \ell = \sup_{n \geq 0} \inf_{m > N} x_m$$

olduğundan, $\ell - \epsilon$ sayısı $\{\inf_{m>N} x_m : n \geq 0\}$ kümesinin bir üstsınırı olamaz. Demek ki,

$$\ell - \epsilon < \inf_{m > N} x_m$$

eşitsizliğini sağlayan bir N vardır, yani, her $n > N$ için, $\ell - \epsilon < x_n$ eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla $\ell - \epsilon$ sayısından küçük en fazla $N + 1$ tane x_n terimi olabilir.

ii. Eğer $\liminf x_n = \infty$ ise, $\liminf x_n + \epsilon = \infty$ olacağından, önerme bariz. Bundan böyle

$$\ell = \liminf x_n \in \mathbb{R}$$

olsun. Dizinin sadece sonlu sayıda teriminin

$$\ell + \epsilon$$

sayısından küçük olduğunu varsayalım. Demek ki öyle bir n var ki her $m > n$ için,

$$x_m \geq \ell + \epsilon.$$

Dolayısıyla,

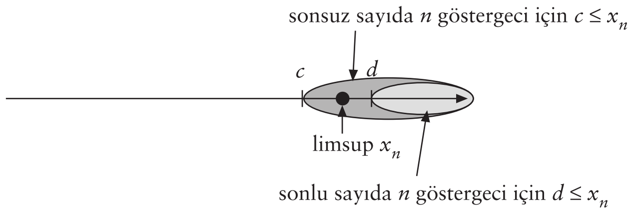
$$\inf X_n \geq \ell + \epsilon > \ell = \sup \inf X_n$$

ve bu bir çelişkidir.

iii. Bu aynen Önsav 13.3. □

Aşağıdaki önsav da benzer şekilde kanıtlanabilir.

Önsav 13.5. i. *Eğer* $\limsup x_n \neq -\infty$ *ise,* $\epsilon > 0$ *hangi gerçel sayı olursa olsun, dizinin sadece sonlu sayıda terimi* $\limsup x_n + \epsilon$ *sayısından büyüktür.*
ii. *Eğer* $\limsup x_n \neq \infty$ *ise, dizinin sonsuz sayıda terimi* $\limsup x_n - \epsilon$ *sayısından büyüktür.*
iii. *Eğer* $\limsup x_n = -\infty$ *ise, r hangi gerçel sayı olursa olsun, dizinin sadece sonlu sayıda terimi r'den büyüktür.* □



$c <$ limsup $x_n < d$ ise

Yukardaki iki önsava göre, her

$$a < \liminf x_n < \limsup x_n < d$$

için, sonlu sayıda terim dışında, dizinin tüm terimleri (a, d) aralığındadır. Yani,

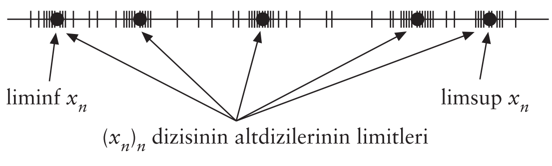
$$[\liminf x_n, \limsup x_n]$$

kapalı aralığını içeren her (a, d) açık aralığı dizinin hemen hemen tüm terimlerini içerir. Ayrıca

$$[\liminf x_n, \limsup x_n]$$

kapalı aralığı bu özelliği sağlayan en küçük kapalı aralıktır. (Okura alıştırma.)

Bir sonraki önsavın şekli aşağıda:



Şekil şunu anlatmak istiyor: $\limsup x_n$, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak altdizilerinin $\overline{\mathbb{R}}$'de en büyüğüdür (sonsuzlar dahil olmak üzere) ve $\limsup x_n$ en küçüğüdür.

Önsav 13.6. i. *$(x_n)_n$ dizisinin* $\liminf x_n$*'ye ve* $\limsup x_n$*'ye yakınsayan altdizileri vardır.*
ii. *Ayrıca eğer $(y_n)_n$, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisiyse*

$$\liminf x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \le \limsup x_n$$

olur. Yani $\liminf x_n$ *ve* $\limsup x_n$*, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak altdizilerinin limitlerinin sırasıyla en küçüğü ve en büyüğüdür.*

Kanıt: i. $(x_n)_n$ dizisinin $\limsup x_n$'ye yakınsayan bir altdizisi olduğunu kanıtlayalım.

Eğer $\limsup x_n = -\infty$ ise, Önsav 13.1'den, $\liminf x_n = -\infty$ bulunur ve istediğimiz, Önsav 13.3'ten çıkar.

Şimdi $\limsup x_n = \infty$ varsayımını yapalım. Demek ki her n için (ya da tek bir n için), $\sup X_n = \infty$. Öyle bir artan $(n_k)_k$ göstergeç dizisi bulacağız ki, her $k > 0$ için,

$$x_{n^k} > k$$

olacak ve bu da kanıtı tamamlayacak. $\sup X_0 = \infty$ olduğundan, dizinin pozitif terimleri olmalı. n_0 göstergeci $x_{n_0} > 0$ olacak biçimde seçilsin. İstediğimiz koşulları sağlayan,

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$$

sonlu bir göstergeçler dizisinin seçildiğini varsayalım. Bir sonraki n_k göstergecini seçeceğiz. $\sup X_0 = \infty$ olduğundan, $\{n : x_n > k\}$ sonsuz bir kümedir, dolayısıyla n_{k-1}'den büyük bir elemanı vardır. n_k bu tür elemanlardan biri olsun, örneğin en küçüğü.

Şimdi de $\limsup x_n \in \mathbb{R}$ varsayımını yapalım.

$$\ell = \limsup x_n$$

olsun. Öyle bir artan $(n_k)_k$ göstergeç dizisi bulacağız ki, her $k > 0$ için,

$$|x_{n^k} - \ell| < \frac{1}{k}$$

olacak ve bu da kanıtı tamamlayacak. $n_0 = 0$ olsun. İstediğimiz koşulları sağlayan,

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$$

sonlu bir göstergeçler dizisinin seçildiğini varsayalım. Bir sonraki göstergeç olan n_k'yı seçeceğiz. Önsav 13.5.i'e göre, $\ell + \frac{1}{2k}$'den büyük sadece sonlu sayıda x_n terimi var. Öte yandan, Önsav 13.4.ii'ye göre, dizinin sonsuz sayıda terimi $\ell - \frac{1}{2k}$ sayısından büyüktür. Demek ki öyle bir $n_k > n_{k-1}$ göstergeci vardır ki,

$$\ell - \frac{1}{2k} < x_{n^k} < \ell + \frac{1}{2k}$$

olur. Bu da istediğimizi kanıtlar.

$(x_n)_n$ dizisinin $\liminf x_n$'ye yakınsayan bir altdizisi olduğu benzer şekilde kanıtlanır.

ii. $(y_n)_n$, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi olsun.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} y_n$$

olsun. $\ell \le \limsup x_n$ eşitsizliğini gösterelim. Eğer $\limsup x_n = \infty$ ya da $\ell = -\infty$ ise sorun yok. Eğer $\limsup x_n = -\infty$ ise, Önsav 13.3'ten dolayı, ℓ de $-\infty$ olmak zorunda ve gene sorun yok. Eğer $\ell = \infty$ ise, X_n kümesi hiçbir n için sınırlı olamaz ve $\limsup x_n = \infty$ olur. Bundan böyle $\limsup x_n$ ve ℓ birer gerçel sayı olsunlar. Bir çelişki elde etmek için $\limsup x_n < \ell$ eşitsizliğini varsayalım. $\epsilon > 0$,

$$\limsup x_n < \ell - \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir sayı olsun. Varsayımdan dolayı, sonsuz sayıda n sayısı için

$$x_n \in (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$$

olur. Demek ki, sonsuz sayıda n için,

$$\limsup x_n < \ell - \epsilon < x_n$$

olur. Ama bundan da her n için,

$$\ell - \epsilon < \sup X_n$$

çıkar, yani

$$\ell - \epsilon < \limsup x_n,$$

bir çelişki. □

Bir sonraki teorem önemli.

Teorem 13.7. *$(x_n)_n$ dizisinin bir gerçel sayıya yakınsaması ya da $\pm\infty$'a ıraksaması için gerek ve yeter koşul,*

$$\liminf x_n = \limsup x_n$$

eşitliğidir ve bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup x_n$$

olur.

Kanıt: Önsav 13.6'nın bir sonucudur. Ama bu sonucu bir de tanımlardan hareketle kanıtlayalım.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ olsun. Demek ki $\epsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir N var ki her $n > N$ için,

$$\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon.$$

Demek ki

$$\sup X_n \le \ell + \epsilon \text{ ve } \inf X_n \ge \ell - \epsilon.$$

Dolayısıyla

$$\ell - \epsilon \le \inf X_n \le \liminf x_n \le \limsup x_n \le \sup X_n \le \ell + \epsilon,$$

yani

$$\ell - \epsilon \le \liminf x_n \le \limsup x_n \le \ell + \epsilon.$$

Bu her $\epsilon > 0$ için geçerli olduğundan, $\liminf x_n = \limsup x_n$ bulunur.

Şimdi $\liminf x_n = \limsup x_n = \ell$ eşitliğini varsayalım.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$$

olmasın. Demek ki öyle bir $\epsilon > 0$ var ki, sonsuz sayıda n için,

$$|x_n - \ell| \ge \epsilon;$$

yani ya sonsuz sayıda n için

$$x_n \ge \ell + \epsilon$$

ya da sonsuz sayıda n için

$$x_n \le \ell - \epsilon.$$

(İkisi birden de sonsuz defa gerçekleşebilir.) Birinci durumda

$$\limsup x_n \ge \ell + \epsilon > \ell,$$

ikinci durumda

$$\liminf x_n \le \ell - \epsilon < \ell$$

bulunur. Her ikisi de bir çelişki. □

Önsav 13.8. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki pozitif dizi olsun ve ikincisi ya yakınsak olsun ya da sonsuza ıraksasın. O zaman,*

$$\limsup x_n y_n = \limsup x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliği geçerli olur.

Kanıt: ($\leq$) eşitsizliğini kanıtlamak kolay:

$$\begin{aligned}\limsup x_n y_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m y_m\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m \cdot \sup_{m\geq n} y_m\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m\right)\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} y_m\right) = \limsup x_n \cdot \limsup y_n.\end{aligned}$$

Aynı eşitsizliği şöyle de kanıtlayabiliriz: $\limsup x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ olsun. x ya da y'nin sonsuz olduğu durumlar oldukça kolay, kendimizi x ve y'nin sonlu olduğu durumla kısıtlayalım. Herhangi bir $\epsilon > 0$ alalım. Demek ki yeterince büyük n'ler için,

$$0 < x_n < x + \epsilon \text{ ve } 0 < y_n < y + \epsilon$$

olur. Dolayısıyla,

$$0 < x_n y_n < (x+\epsilon)(y+\epsilon) = xy + \epsilon(x + y + \epsilon)$$

olur. Ama ϵ sayısını istediğimiz kadar küçük seçebileceğimizden, bu hesaptan, $(x_n y_n)_n$ dizisinin altdizilerinin en büyük limitinin xy olduğu çıkar. (Bunun doğruluğundan emin olun.) Demek ki,

$$\limsup x_n y_n \leq xy$$

eşitliği geçerlidir.

Demek ki x ya da y sayılarından biri 0'a eşitse istediğimiz eşitsizliği elde ederiz. Bundan böyle $x > 0$ ve $y > 0$ eşitsizliklerini varsayalım.

Şimdi $\epsilon > 0$ sayısı, $0 < x - \epsilon$ ve $0 < y - \epsilon$ eşitsizliklerini sağlayacak kadar küçük seçilsin. x'in tanımından dolayı

$$x - \epsilon < x_n$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonsuz sayıda n vardır (Önsav 13.4.i). Ama

$$y - \epsilon < y_n$$

eşitsizliği bir zaman sonra **hep** sağlandığından,

$$x - \epsilon < x_n \text{ ve } y - \epsilon < y_n$$

eşitsizliklerinin ikisi birden sonsuz sayıda n göstergeci için sağlanır. Dolayısıyla,

$$(x-\epsilon)(y-\epsilon) < x_n y_n,$$

yani

$$xy < x_n y_n + \epsilon(x + y - \epsilon)$$

eşitsizliği sonsuz sayıda n için sağlanır. Demek ki,

$$xy \leq \limsup x_n y_n$$

olur. (Neden?) Önsavımız kanıtlanmıştır. $\square$

Örnekler

13.14. *Eğer $(s_n)_n$ pozitif bir seriyse, aşağıdaki eşitsizlikleri gösterin:*

$$\liminf x_n \leq \liminf \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \limsup \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \limsup x_n.$$

Kanıt: Ortadaki eşitsizlik bariz. Sonuncu eşitsizliği göstermekle yetinelim. $N < M < n$ olsun.

$$x_{N+1} + \cdots + x_n \leq (n-N)\max\{x_{N+1}, \ldots, x_n\} \leq (n-N)\sup_{k>N} x_k \leq n \sup_{k>N} x_k$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{x_1 + \cdots + x_N}{n} + \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n} \\
&\leq \frac{x_1 + \cdots + x_N}{M} + \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n} \\
&\leq \frac{x_1 + \cdots + x_N}{M} + \sup_{k>N} x_k
\end{aligned}$$

olur. Demek ki,

$$\sup_{n>N} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_N}{M} + \sup_{k>N} x_k$$

olur. Şimdi N'yi sabitleyip M'yi sonsuza götürsek, bu eşitsizlikten

$$\sup_{n>N} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sup_{k>N} x_k$$

eşitsizliğini ve bu son eşitsizlikte N'yi de sonsuza götürürsek istediğimizi elde ederiz. $\square$

13.15. *Eğer $(x_n)_n$ pozitif bir diziyse,*

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

olur.

Kanıt: Ortanca eşitsizlik bariz. Birinciyle üçüncü benzer. Üçüncüyü kanıtlayalım.

$$a = \limsup \sqrt[n]{x_n} \text{ ve } b = \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

olsun. $a \leq b$ eşitsizliğini kanıtlayacağız. Bunun için her $c > b$ için $a \leq c$ eşitsizliğini kanıtlamamız yeterli. Böyle bir c alalım. Demek ki öyle bir N vardır ki, her $n \geq N$ için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c$$

ve

$$x_n = x_N \frac{x_{N+1}}{x_N} \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq x_N c^{n-N} = \frac{x_N}{x^N} c^n$$

olur. Eğer $d = \frac{x_N}{x^N}$ tanımını yaparsak, $x_n \leq dc^n$ ve $x_n^{1/n} \leq d^{1/n}c$ elde ederiz. Demek ki

$$\limsup x_n^{1/n} \leq \limsup d^{1/n} c = \lim d^{1/n} c = c$$

olur. $\square$