12. Sonsuza Iraksayan Diziler ve Sonsuzlar

12.1 Sonsuza Iraksayan Diziler II

Her terimi

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

olan dizinin sürekli artan bir dizi olduğu belli, çünkü ne de olsa bir sonraki terim bir önceki terime pozitif bir sayı eklenerek elde ediliyor. Benzer şekilde, her terimi

$$y_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

olan dizi de sürekli artar. Ancak bu iki dizi arasında önemli bir fark vardır, ikinci dizi üstten sınırlıdır, çünkü her n için, $y_n \leq 2$ eşitsizliği sağlanır (Bkz. Bölüm 7), oysa birinci dizi üstten sınırlı değildir, yani her sayıyı bir zaman sonra aşar; nitekim, Altbölüm 7.2'de, her n doğal sayısı için, $x_{2^n} \geq 1 + n/2$ eşitsizliğini kanıtladık; dolayısıyla dizinin bir limiti olamaz. Bu tür dizilerin ***sonsuza ıraksadığı*** söylenir. Matematiksel tanım şöyle:

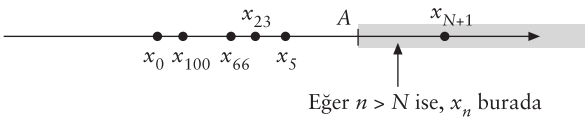
Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Hangi A sayısı verilirse verilsin, eğer her $n > N$ için,

$$x_n > A$$

eşitsizliğini sağlayan bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin sonsuza (∞'a) ıraksadığı ya da sadece ıraksadığı söylenir ve bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

olarak yazılır.



Bir dizinin sonsuza gitmesi için, A hangi sayı olursa olsun, belli bir göstergeçten sonra dizinin terimleri A'yı geçmeli.

Demek ki bölümün başında verdiğimiz örnekte,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty$$

"eşitliği" sözkonusu. Benzer biçimde,

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots$$

dizisi de sonsuza ıraksar elbet. Ancak,

$$0,\ \mathbf{1},\ 1,\ \mathbf{1},\ 2,\ \mathbf{1},\ 3,\ \mathbf{1},\ 4,\ \mathbf{1},\ 5,\ \mathbf{1},\ 6,\ \mathbf{1},\ldots$$

dizisi sonsuza ıraksamaz, çünkü her iki terimin arasına konmuş olan koyu puntolu 1'ler dizinin sonsuza gitmesini engeller; dizi hiçbir zaman, örneğin 2'yi **hep** aşmaz.

Dikkat: Burada "sonsuz" diye bir kavramı tanımlamadık, sadece bir "dizinin sonsuza gitmesi"nin ne demek olduğunu söyledik, yani "dizi-sonsuza-gidiyor" kavramını tanımladık. Tanımımıza göre, "sonsuza gitmek" demek, dizinin **her** A sayısını belli bir N göstergecinden sonra **hep** (yani her $n > N$ için; sadece bazı n'ler için değil) aşması demektir.

"$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$" ifadesinde aslında bir eşitlikten sözedilmemektedir, çünkü ∞ diye özel bir matematiksel nesne tanımlanmamıştır. Ama lafın gelişi ve alışkanlıklardan dolayı

$$\text{“}\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\text{”}$$

eşitliğinden bahsedeceğiz. Bir sonraki bölümde ∞ diye bir nesneyi **yapay** (hem de çok yapay, alabildiğine yapay, daha yapayı olamaz) bir biçimde var ettiğimizde, o zaman

$$\text{“}\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\text{”}$$

ifadesinden bir eşitlikmiş gibi sözetmeye biraz daha fazla hak kazanacağız.

Bu ∞ simgesi bir sayı olmamasına karşın o kadar bir sayıymış gibi algılanır ki, bazen "sonsuza ıraksar" yerine "sonsuza yakınsar" dendiği bile olur; görürseniz şaşırmayın.

Tanımın Tartışması. Bir $(x_n)_n$ dizisinin sonsuza ıraksadığını kanıtlamak için, önce herhangi bir A sayısı seçilir ve ardından,

$$x_n > A$$

eşitsizliğinin sağlanması için n göstergecinin ne kadar büyük, yani eşitsizliğin sağlanması için n'nin hangi N sayısından daha büyük olması gerektiği araştırılır. Bulunan N sayısı (aslında göstergeci) elbette A'ya göre değişir; A ne kadar büyükse, N göstergeci de o kadar büyük olmalıdır. Bu yüzden N yerine, N'nin

A'ya göre değiştiğini göstermek amacıyla N_A yazılabilir. Ama dikkat, bu yazılım, A verildiğinde işimizi gören tek bir N vardır anlamına gelmez. Nitekim, eğer A sayısı N göstergecinden sonra aşılıyorsa, aynı sayı elbette N'den büyük herhangi bir N' göstergecinden sonra da aşılır. Yani verilmiş bir A için işimizi gören sonsuz sayıda N göstergeci vardır. Amaç, işimizi gören bu N'lerin en küçüğünü bulmak değildir, kesinlikle değildir. (Bu en küçük N göstergecinden sadece bir tane vardır ama kimsenin umurunda değildir kendileri ve böyle bir uğraşa girmek genellikle çok zahmetli ve zahmetli olduğu kadar da gereksiz bir iştir.)

Eğer bir A için, istediğimiz eşitsizlikleri gerçekleştiren bir N göstergeci bulmuşsak, aynı göstergeci elbette A'dan küçük sayılar için de kullanabiliriz; dolayısıyla marifet küçük bir A sayısı için ilgili N'yi bulmak değil, büyük A'lar için ilgili N'yi bulmaktır. Örneğin eğer 8000'den büyük her A için istediğimizi sağlayan bir N bulabilirsek, bu, her A için bir N bulabiliriz demektir.

Sonsuza ıraksamanın dizinin kendisiyle değil, kuyruğuyla ilgili bir özellik olduğunu anlamışsınızdır, yani sonsuza ıraksayan bir dizinin terimlerinin arasına sonlu sayıda terim sıkıştırırsanız ya da diziden sonlu sayıda terim silseniz, elde ettiğiniz dizi gene sonsuza ıraksar. Geriye sonsuz sayıda terim kalacak şekilde terim silsek de sonsuza ıraksaklık değişmez.

Artan bir dizinin sonsuza ıraksadığını göstermek için, her A sayısı için $x_N > A$ eşitsizliğini sağlayan **tek bir** N göstergeci bulmak yeterlidir, çünkü o zaman, eğer $n > N$ ise, $x_n \geq x_N > A$ eşitsizlikleri de sağlanır.

Azalan diziler sonsuza gidemezler, ama arada bir azalan diziler sonsuza gidebilirler; örneğin.

$$1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 4,\ 6,\ 5, \ldots, n,\ n-1, \ldots$$

dizisi azalan bir dizidir ama sonsuza ıraksar.

Teorem 12.1. *Artan bir dizi ya yakınsaktır ya da sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Dizi sınırlıysa, o zaman limitinin olduğunu biliyoruz (Teorem 7.1). Eğer dizi sınırsızsa, o zaman verilmiş herhangi bir A sayısını belli bir N göstergecinden sonra aşar. Ama dizi artan olduğundan, o göstergeçten sonra dizi A sayısını sürekli aşar. □

Alıştırmalar

12.1. Sonsuza ıraksayan bir dizinin bir zaman sonra pozitif olması gerektiğini kanıtlayın.

12.2. Sonsuza ıraksayan bir dizinin alttan sınırlı olduğunu kanıtlayın.

12.3. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ olduğunu kanıtlayın. Tersi doğru mudur?

12.4. Sonsuza ıraksayan bir dizinin artan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın.

12.5. Sonsuza ıraksayan bir dizinin her altdizisinin de sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

12.6. $\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.7. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4}{3n} = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.8. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{3-4n} = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.9. Sonsuza ıraksayan iki dizinin toplamının da sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

12.10. Sonsuza ıraksayan iki dizinin çarpımının da sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

12.11. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise ve $r > 0$ ise, $\lim_{n\to\infty} rx_n = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.12. $p(X) = a_kX^k + \cdots + a_1X + a_0$ bir polinom ve $k > 0$ olsun. $a_k > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

Bir önceki sayfada, "Bir $(x_n)_n$ dizisinin sonsuza ıraksadığını kanıtlamak için, önce herhangi bir A sayısı seçilir ve ardından,

$$x_n > A$$

eşitsizliğinin sağlanması için n'nin ne kadar büyük, yani hangi N sayısından daha büyük olması gerektiği araştırılır" demiştik. Bu araştırma şu işten ibarettir: Yeterince büyük n göstergeçleri için, x_n teriminden daha küçük, ama gene de n'yi büyüterek istediğimiz kadar büyütebileceğimiz ve görünümü x_n'den daha sade bir y_n terimi bulmak. Böylece, yeterince büyük n'ler için,

$$x_n \geq y_n$$

olur. Şimdi $x_n > A$ eşitsizliği yerine $y_n > A$ eşitsizliğini elde etmeye çalışmalıyız. y_n'nin görünümü x_n'den daha sade olduğundan, problemi daha basite indirgemiş oluruz. Eğer bu indirgeme sonuca ulaşmak için yeterli değilse, yeterince büyük n'ler için,

$$y_n \geq z_n$$

eşitsizliğinin sağlandığı daha basit görünümlü bir z_n ifadesi aranır. Ama dikkat, z_n'yi örneğin hep 5000'den küçük bir şey seçerseniz, bu, hapı yuttuğunuzun resmidir, o zaman bu seçimle x_n'nin 5001'den büyük olduğunu gösteremezsiniz! Örneğin z_n'yi n ya da $\sqrt{n}$ gibi bir şey seçebilirseniz, o zaman sorun çözüldü demektir, ne de olsa bunlar bir zaman sonra her A sayısını geçeceklerdir.

Dikkat ettiyseniz yukarda önerdiğimiz yöntem şunu söylüyor:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

eşitliğini kanıtlamak için, bir zaman sonra

$$x_n \geq y_n$$

eşitsizliğinin sağlandığı ve

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

eşitliğinin sağlandığı bir $(y_n)_n$ dizisi bulmak gerekir. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

eşitliğini kanıtlayamıyorsanız, aynı yöntem $(x_n)_n$ yerine $(y_n)_n$ dizisiyle denenir. Önerdiğimiz bu yöntemin doğruluğu bir teoremle saptanabilir.

Teorem 12.2. *Eğer* $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ *ise ve bir zaman sonra (yani yeterince büyük n'ler için)* $x_n \geq y_n$ *eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *olur.*

Kanıt: Rastgele bir A sayısı alalım. N_1 sayısı, her $n > N_1$ için $y_n > A$ olacak biçimde seçilsin. $(y_n)_n$ dizisi sonsuza gittiğinden böyle bir N_1 vardır. Ayrıca N_2, her $n > N_2$ için, $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlayacak biçimde seçilsin. Varsayımdan dolayı böyle bir N_2 vardır. Nihayet $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Şimdi her $n > N$ için, $x_n \geq y_n > A$ olur ve kanıt tamamlanır. □

Benzer sonuçları çoğaltabiliriz ve çoğaltacağız. Ancak önce sonsuza ıraksadığı yukarda sunduğumuz örneklerdeki kadar bariz olmayan bir örnek sunalım.

Örnekler

12.13. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} = \infty$.

Kanıt: A verilmiş herhangi bir sayı olsun.

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} > A$$

eşitsizliğinin sağlanması için N'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Soldaki terimle oynayalım:

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{3n^2+n+4}$$

Sağdaki terim, soldakinden daha sade ama sadece biraz daha sade, yeterince sade değil, devam edelim. Eğer n'yi yeterince büyük almayı göze alırsak, ki göze almalıyız, paydayı $4n^2$'ye çıkarabiliriz ve o zaman sağdaki terim hem küçülür hem de sadeleşir.

$$3n^2 + n + 4 < 4n^2$$

olması için, $n^2 > n+4$ olmalı ve bunun için de $n \geq 3$ yeterli. Demek ki n'yi 3'ten büyük almayı kabullenirsek,

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{4n^2} = \frac{n^2-2}{4n}$$

elde ederiz. Paydadaki n'yi sadeleştirmek için paydaki 2 yerine n koyabiliriz, çünkü $n \geq 3 > 2$:

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{4n^2} = \frac{n^2-2}{4n} > \frac{n^2-n}{4n} = \frac{n-1}{4}.$$

Yüzdük yüzdük kuyruğuna geldik. En sağdaki ifadeyi A'dan büyük yapmalıyız, bu çok kolay, n'yi $4A+1$'den büyük seçelim. Artık N'nin ne olması gerektiği belli,

$$N = \max\{[4A+1]+1, 3\}$$

olsun. O zaman, her $n > N$ için,

$$\begin{aligned}\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} &> \frac{n^3-2n}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{4n^2} = \frac{n^2-2}{4n} \\ &> \frac{n^2-n}{4n} = \frac{n-1}{4} > \frac{N-1}{4} \geq A\end{aligned}$$

olur ve kanıt tamamlanır. □

Yukarda verdiğimiz kanıttan çok daha başkaları ve muhtemelen daha kısaları vardır. Amacımız sadece yöntemi örneklendirmekti.

Aynı örneği bir başka yöntemle kanıtlamaya çalışalım.

12.14. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} = \infty$.

Kanıt: Limiti alınacak ifadenin payını ve paydasını n^2'ye bölelim:

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} = \frac{n-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}.$$

n sonsuza giderken, sağdaki ifadenin paydası 3'e yakınsıyor. Payın n sonsuza giderken tam ne yaptığı belli değil, ama çok da belirsiz değil. Paydaki

$$n-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}$$

ifadesi, sonsuza ıraksayan n terimiyle, limiti 0 olan $-2/n+7/n^2$ teriminin toplamı. Böyle bir toplamın da sonsuza gitmesini beklemek, imkânsızı istemek olmasa gerek! Nitekim birazdan kanıtlayacağımız üzere bu böyledir. Demek ki pay sonsuza ıraksar. Payda da 3'e yakınsıyordu. Bu iki bilgiden başlangıçtaki ifadenin sonsuza ıraksadığı çıkar. Bütün bunları birazdan aşağıda göreceğiz.

Bu örnek, tahmin edileceği üzere polinomlarla ilgili genel bir teoremin özel bir halidir (bkz. Teorem 12.10 ve Teorem 12.11).

12.15. $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n} = \infty$.

Kanıt: Önce dizinin artan olduğunu, yani

$$(n!)^{1/n} < (n+1)!^{1/(n+1)}$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. Her iki tarafın da $n(n+1)$'inci gücünü alacak olursak, kanıtlamak istediğimizin,

$$(n!)^{n+1} < (n+1)!^n$$

eşitsizliğine dönüştüğünü görürüz. Bu eşitsizliği,

$$n!^n n! < n!^n (n+1)^n$$

olarak yazıp gereken sadeleştirmeyi yaparsak, bu sefer,

$$n! < (n+1)^n$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Ama her $1 \le i \le n$ doğal sayısı için, $i < 1+n$ olduğundan, bu son eşitsizlik elbette doğrudur. Demek ki artan bir dizi sözkonusu. Dolayısıyla eğer dizinin limiti yoksa, dizi sonsuza gider.

Bir an için dizinin limitinin olduğunu varsayalım ve limite x diyelim ve $x_n = n!^{1/n}$ olsun. Elbette $x > 0$ olmak zorunda.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = x$$

olur. Şimdi x_{2n} terimini açalım:

$$\begin{aligned} x_{2n} &= (2n)!^{1/2n} = (n!(n+1)(n+2)\cdots(n+n))^{1/2n} \\ &= n!^{1/2n}((n+1)(n+2)\cdots(n+n))^{1/2n} \\ &> n!^{1/2n}(n^n)^{1/2n} = x_n^{1/2} n^{1/2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Sağ taraftaki $x_n^{1/2} n^{1/2}$ teriminin limiti elbette ∞'dur (çünkü $x > 0$). Demek ki sol taraftaki x_{2n} terimi de ∞'a gider. Bu da istediğimizi kanıtlar.

Şimdi sonsuza ıraksamayla toplama ve çarpma gibi işlemler arasındaki ilişkileri irdeleyelim.

Toplamayla İlişkiler. İlk olarak sonsuza ıraksamakla dizilerin toplanması konusuna eğilelim.

Önsav 12.3. *Sonsuza ıraksayan bir diziyle alttan sınırlı bir dizinin toplamı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: $(x_n)_n$ sonsuza ıraksayan, $(y_n)_n$ de B tarafından alttan sınırlı bir dizi olsun. A herhangi bir sayı olsun. Belli bir zaman sonra,

$$x_n + y_n > A$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak istiyoruz. $y_n \geq B$ olduğundan,

$$x_n + y_n \geq x_n + B$$

doğrudur. Demek ki,

$$x_n + B > A$$

yani,

$$x_n > A - B$$

eşitsizliğinin belli bir zaman sonra geçerli olduğunu kanıtlamak yeterli. Ama $(x_n)_n$ sonsuza ıraksadığından bu doğru: Öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için, $x_n > A - B$ eşitsizliği geçerlidir. □

Sonuç 12.4. *Sonsuza ıraksayan bir diziyle yakınsak bir dizinin toplamı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Yakınsak bir dizi sınırlı olduğundan istediğimiz sonuç Önsav 12.3'ten çıkar. □

Sonuç 12.5. *Sonsuza ıraksayan iki dizinin toplamı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Sonsuza ıraksayan bir dizi alttan sınırlı olduğundan istediğimiz sonuç Önsav 12.3'ten çıkar. □

Çarpmayla İlişkiler. Sonsuza ıraksayan bir diziyle terimleri negatif olan bir diziyi çarparsak, sonsuza ıraksayan bir dizi elde etmeyiz elbette. Sonsuza ıraksayan bir diziyle terimleri pozitif olan bir diziyi çarparsak da her zaman sonsuza ıraksayan bir dizi elde etmeyiz. Örneğin, sonsuza ıraksayan $(n)_{n>0}$ dizisiyle terimleri pozitif olan $(1/n)_{n>0}$ dizisini çarparsak, sonsuza ıraksayan bir dizi değil, sabit 1 dizisini buluruz. Demek ki çarpmada toplamadan biraz daha dikkatli davranmalıyız.

Bir sonraki önsavı ifade etmek için bir tanıma ihtiyacımız var. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Eğer bir $\epsilon > 0$ için, $|xn| > \epsilon$ oluyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisi için

"0***'dan uzak duruyor***" denir. Limiti 0 olan diziler 0'dan uzak duramazlar. Öte yandan limiti 0'dan değişik olan ve hiçbir zaman 0 olmayan diziler 0'dan uzak dururlar.

Eğer $|x_n| > \epsilon$ eşitsizliği belli bir göstergeçten sonra sağlanıyorsa, dizinin ***zamanla*** 0***'dan uzak durduğu*** söylenir. Limiti 0 olan diziler zamanla da 0'dan uzak durmazlar ama limiti olan ve limitin 0'dan değişik olduğu diziler 0'dan uzak dururlar.

Dizinin zamanla 0'dan uzak durmasıyla, dizinin 0'a yakınsayan bir altdizisinin olmaması aynı şeydir.

Bütün bunları okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Önsav 12.6. *Sonsuza yakınsayan bir diziyle, zamanla hem pozitif olan ve hem de* 0*'dan uzak duran bir dizinin çarpımı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: $(y_n)_n$ zamanla pozitif olan ve 0'dan uzak duran bir dizi olsun; diyelim bu dediklerimiz N göstergecinden sonra gerçekleşsin, yani bir $\epsilon > 0$ ve her $n > N$ için,

$$\text{hem } y_n > 0 \text{ hem de } |y_n| > \epsilon$$

olsun. Demek ki her $n > N$ için,

$$y_n > \epsilon > 0$$

olur.

Bir de sonsuza ıraksayan bir $(x_n)_n$ dizisi alalım. $(x_n)_n$ dizisinin terimleri her sayıyı bir zaman sonra aştığından, 0'ı da bir zaman sonra aşarlar, yani pozitif olurlar. Yukardaki N'yi gerekirse daha da büyük seçerek, her $n > N$ için,

$$x_n > 0$$

varsayımını yapabiliriz. Bu hazırlıklardan sonra şimdi artık işin özüne inebiliriz. A, herhangi bir sayı olsun. Belli bir göstergeçten sonra

$$x_n y_n > A$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Bu göstergeci N'den büyükeşit alacağımıza söz verirsek,

$$x_n y_n > x_n \epsilon$$

olur. Şimdi sağdaki $x_n\epsilon$ terimini A'dan büyük yapmalıyız, yani x_n'yi A/ϵ'dan büyük yapmalıyız. Ama $(x_n)_n$ dizisi sonsuza ıraksadığından, bu mümkündür. Yukardaki N'yi bir de ayrıca, her $n > N$ için,

$$x_n > A/\epsilon$$

eşitsizliği gerçekleşecek kadar büyük seçelim. □

Sonuç 12.7. *Sonsuza ıraksayan bir diziyle pozitif bir sayıya yakınsayan bir dizinin çarpımı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Pozitif bir sayıya yakınsayan bir dizi zamanla hem pozitiftir hem de 0'dan uzak durur. □

Sonuç 12.8. *Sonsuza ıraksayan iki dizinin çarpımı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Sonsuza ıraksayan bir dizi zamanla 1'i (örneğin) aşar, dolayısıyla zamanla pozitiftir ve 0'dan uzaktır. Yukardaki önsavı uygulayalım. □

Sonuç 12.9. *Eğer $(x_n)_n$ sonsuza ıraksayan bir diziyse ve $r > 0$ ise, $(rx_n)_n$ dizisi de sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Sabit r dizisi, $r > 0$ olduğundan pozitif ve 0'dan uzaktır. □

Teorem 12.10. *$k > \ell$ ve $p_k q_\ell > 0$ olmak üzere,*

$$p(X) = p_k X^k + \cdots + p_1 X + p_0$$

ve

$$q(X) = q_\ell X^\ell + \cdots + q_1 X + q_0$$

iki polinom olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \infty$$

olur.

Kanıta girişmeden önce biraz düşünelim. Teoremin doğru olmasının nedeni, n çok büyük olduğunda,

$$p(n) = p_k n^k + \cdots + p_1 n + p_0$$

sayısının $p_k n^k$ ölçeğinde bir şey olmasıdır. Aynı şey $q(n)$ için de geçerli olduğundan, n çok büyükken,

$$\frac{p(n)}{q(n)} \approx \frac{p_k n^k}{p_\ell n^\ell} = \frac{p_k}{p_\ell} n^{k-\ell}$$

aşağı yukarılığı geçerlidir. En sağdaki terim de elbette her A sayısını geçtiğinden teorem doğrudur.

Teorem 12.10'un Kanıtı: Gerekirse p ve q polinomlarının her ikisini de -1'le çarparak p_k ve q_ℓ katsayılarının pozitif olduklarını varsayabiliriz. $p(n)/q(n)$ ifadesinin payını ve paydasını n^ℓ'ye bölelim:

$$\begin{aligned}\frac{p(n)}{q(n)} &= \frac{p_k n^k + \cdots + p_\ell n^\ell + p_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + p_0}{q_\ell n^\ell + q_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + q_0} \\ &= \frac{p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell + p_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + p_0 n^{-\ell}}{q_\ell + q_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + q_0 n^{-\ell}}.\end{aligned}$$

Demek ki $(p(n)/q(n))_n$ dizisini terimleri

$$(p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell) + (p_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + p_0 n^{-\ell})$$

ve

$$\frac{1}{q_\ell + q_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + q_0 n^{-\ell}}$$

olan dizilerin çarpımı olarak görebiliriz. İkinci dizinin pozitif bir sayı olan $1/q_\ell$'ye yakınsadığını biliyoruz. Birinci dizinin sonsuza ıraksadığını kanıtlarsak, sonucumuz Sonuç 12.7'den çıkacak. Birinci dizi, terimleri

$$p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell \text{ ve } p_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + p_0 n^{-\ell}$$

olan iki başka dizinin toplamı. Terimleri

$$p_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + p_0 n^{-\ell}$$

olan dizinin 0'a gittiğini biliyoruz. Terimleri

$$p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell$$

olan dizinin sonsuza ıraksadığını kanıtlarsak, Sonuç 12.4'ten istediğimize ulaşırız.

$$p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell = n^{k-\ell}(p_k + p_k n^{-1} + \cdots + p_\ell\, n^{\ell-k})$$

eşitliğinden ve Sonuç 12.7'den dolayı, $\lim_{n\to\infty} n^{k-\ell} = \infty$ ve

$$\lim_{n\to\infty} (p_k + p_k n^{-1} + \cdots + p_\ell n^{\ell-k}) = p_k$$

eşitliklerini kanıtlamak yeterli. İkinci limitin doğru olduğunu biliyoruz. Birinciyi kanıtlamalı. $k > \ell$ olduğundan,

$$n^{k-\ell} \geq n$$

olur ve Teorem 12.2'den dolayı birinci limit de doğru. □

Kanıtını okurlara bırakacağımız ve kanıtı yukardaki kanıttan pek değişik olmayan bundan daha genel bir teorem geçerlidir aslında.

Teorem 12.11. *$k > \ell$ ve $p_k q_\ell > 0$ olmak üzere,*

$$p(X) = p_k X^k + \cdots + p_1 X + p_0$$

ve

$$q(X) = q_\ell X^\ell + \cdots + q_1 X + q_0$$

iki polinom ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)}{q(x_n)} = \infty$$

olur.

Sonuç 12.12. *p, derecesi en az 1 olan ve başkatsayısı pozitif olan bir polinomsa ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} p(x_n) = \infty$ olur.*

Okur herhalde 0'a yakınsamakla sonsuza ıraksamak arasında yakın bir ilişkinin olduğunu düşünüyordur. Biraz dikkat etmek koşuluyla bu doğrudur.

Teorem 12.13. *Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = 0$ olur. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ise ve $(x_n)_n$ dizisi zamanla pozitif oluyorsa, $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = \infty$ olur.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Sonuç 12.14. *$\ell > k$ ve $p_k q_\ell > 0$ olmak üzere,*

$$p(X) = p_k X^k + \cdots + p_1 X + p_0$$

ve

$$q(X) = q_\ell X^\ell + \cdots + q_1 X + q_0$$

iki polinom ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)}{q(x_n)} = 0$$

olur.

Kanıt: Teorem 12.11 ve 12.13'ten çıkar. □

Benzer biçimde "eksi sonsuza ıraksama"yı da tanımlayabiliriz:

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Hangi A sayısı verilirse verilsin, eğer her $n > N$ için,

$$x_n < A$$

eşitsizliğini sağlayan bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin eksi sonsuza (ya da $-\infty$'a) ıraksadığı söylenir ve bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

olarak yazılır.

Eksi ve artı sonsuza ıraksamak elbette birbirine çok yakın iki kavramdır:

Teorem 12.15. *$(x_n)_n$ bir dizi olsun. O zaman,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty.$$

olur.

Kanıt: Soldan sağa kanıtlayalım. A herhangi bir sayı olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ olduğundan, öyle bir N vardır ki, $n > N$ ise, $x_n > -A$ olur. (Sonsuza gitme'nin tanımında, yani (*) koşulunda A yerine $-A$ alın.) Demek ki $n > N$ için $-x_n < A$ oluyor, yani $\lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty$. Sağdan sola da aynı biçimde kanıtlanır. □

Alıştırmalar

12.16. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ve her n için $x_n \geq 0$ ise ve $q > 0$ kesirli bir sabit sayıysa, $\lim_{n\to\infty} x_n^q = \infty$ olduğunu kanıtlayın.

12.17. Eğer $r > 1$ ise ve $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} r^{q_n} = \infty$ olduğunu kanıtlayın.

12.18. $0 < r < 1$ ise ve $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} r^{q_n} = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

12.19. Öyle $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri bulun ki,
a. her n için $y_n > 1$,
b. her n için $x_n \in \mathbb{Q}$,
c. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$,
d. $\lim_{n\to\infty} y_n^{x_n} \in \mathbb{R}$
olsun.

12.20. Eğer p polinomunun derecesi en az 1 ise ve başkatsayısı negatifse, $\lim_{n\to\infty} p(n) = -\infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.21. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

12.22. $\mathcal{C}_\infty$, ∞'a ıraksayan diziler kümesi, $\mathcal{C}_u$, zamanla pozitif ve sıfırdan uzak diziler kümesi olsun. $\mathcal{C}_\infty\mathcal{C}_u = \mathcal{C}_\infty + \mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}_\infty$ eşitliklerini kanıtlayın.

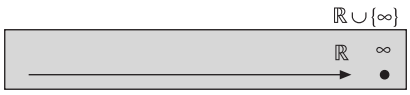
12.23. $x_n = (n!)^{1/n}$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin artan olduğunu ve sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

12.2 Sonsuzları $\mathbb{R}$'ye Eklemek

$\overline{\mathbb{R}}$ Tamsıralaması. Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye yepyeni bir eleman ekleyelim. ∞ simgesiyle göstereceğimiz bu yeni elemana "sonsuz" adını verelim. ∞, gerçel bir sayı değildir, yepyeni bir şeydir, daha doğrusu yepyeni bir simgedir, o kadar bambaşka bir şeydir ki bu yeni simgeye "sayı" bile denmez. ∞ elemanını $\mathbb{R}$'nin en sonuna koyalım, yani $\mathbb{R}$'nin bildiğimiz sıralamasını, $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ kümesine şöyle genişletelim: Her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$r < \infty$$

olsun. Böylece $\mathbb{R}$'nin eski sıralamasını korumuş oluruz ve $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesi tamsıralanmış[1] bir küme olur. Bu tamsıralamada, ∞, her gerçel sayıdan daha büyüktür.

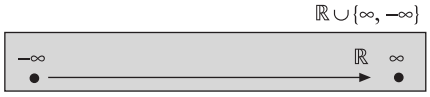


$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ tamsıralaması

[1] Yani her $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ için, ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$.

X, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinin boş olmayan herhangi bir altkümesi ise o zaman $\sup X$ mutlaka vardır, nitekim eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ve X üstten sınırlıysa o zaman $\sup X, \mathbb{R}$'nin bir elemanıdır, öte yandan $\infty \in X$ ise ya da $X \cap \mathbb{R}$ üstten sınırlı değilse, $\sup X = \infty$ olur.

Tamsıralanmış $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesine $-\infty$ diye göstereceğimiz bir başka eleman daha ekleyelim ve yukarda tanımlanan $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinin tamsıralamasını $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ kümesine şu kuralla genişletelim: $-\infty, \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinin bütün elemanlarından daha küçük olsun. Böylece $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ kümesi tamsıralanmış olur. Bu tamsıralamada $-\infty$ en küçük eleman, ∞ en büyük elemandır.



$\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ tamsıralaması

$\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ kümesini $\overline{\mathbb{R}}$ simgesiyle gösterelim:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

$\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi temel işlemlerden söz edeceğiz; bir sonraki bölümde de inf, sup ve limit alma gibi işlemlerden.

Temel İşlemler. Toplamayı, çıkarmayı ve çarpmayı şöyle tanımlayalım:

$+$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}$	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$s \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$r+s$	∞
∞		∞	∞

$-$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}$	∞
$-\infty$		∞	∞
$s \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$r-s$	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	

$\times$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}^{<0}$	0	$r \in \mathbb{R}^{>0}$	∞
$-\infty$	∞	∞		$-\infty$	$-\infty$
$s \in \mathbb{R}^{<0}$	∞	rs	0	rs	$-\infty$
0		0	0	0	
$s \in \mathbb{R}^{>0}$	$-\infty$	rs	0	rs	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$		∞	∞

$\div$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}^{<0}$	0	$r \in \mathbb{R}^{>0}$	∞
$-\infty$		0	0	0	
$s \in \mathbb{R}^{<0}$	∞	r/s	0	r/s	$-\infty$
0					
$s \in \mathbb{R}^{>0}$	$-\infty$	r/s	0	r/s	∞
∞		0	0	0	

x sütunuyla y sırasının kesiştiği yere $x * y$ işleminin sonucunu yazdık. Çarpı olan yerleri tanımsız kabul ediyoruz. Görüldüğü gibi $\mathbb{R}$'deki işlemler aynen $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde de geçerli.

Bu işlemler rastgele tanımlanmadılar. Bu işlemler, aşağıdaki teorem doğru olsun diye tanımlanmışlardır.

Teorem 12.16. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki gerçel sayı dizisi olsun.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\ \lim_{n\to\infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}}$$

olsun. Eğer $*$ işlemi yukardaki $+,-$, $\times$ ve $/$ işlemlerinden biriyse ve

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) * \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

işlemi tanımlıysa,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n * y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) * \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

olur.

Kanıt: Bu teorem büyük ölçüde önceki altbölümde kanıtlandı. Olası eksiklikler okura bırakılmıştır. □

Alıştırma 12.24. $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde "kesirli sayıyla üs alma" işlemini tanımlamak isteseydiniz nasıl tanımlardınız?