10. Euler Sabiti e ve exp Fonksiyonu

Kitabın bu en uzun bölümünde matematiğin en ünlü ve en yaygın kullanılan sabitlerinden biri olan e sayısını tanımlayacağız. Ayrıca halk arasında daha çok e^x olarak bilinen exp fonksiyonunu tanımlayacağız. Bu bölüm sayesinde okurun diziler konusunda belli bir ustalık kazanacağını da düşünüyoruz.

10.1 Euler Sayısının Tanımı

Teorem 10.1. $((1+1/n)^n)_{n>0}$ *dizisi* 2 *ile* 3 *arasında bir sayıya yakınsar.*

Kanıt: Karmaşık hesapları Altbölüm 3.2'de yaptık. Şimdi meyveleri toplayalım: Önsav 3.24'e göre dizi artıyor. Önsav 3.23'e göre dizi alttan 2 ile, üstten 3 ile sınırlı. Demek ki dizinin 2 ile 3 arasında bir limiti vardır. □

İkinci Kanıt: Örnek 3.26'da,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ve } y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

tanımlarını yapıp, $(x_n)_n$ dizisinin artan, $(y_n)_n$ dizisinin ise azalan olduğunu kanıtlamıştık. Bundan,

$$2 = x_1 < x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4$$

çıkar. Demek ki $(x_n)_n$ dizisi artan ve üstten 4 tarafından sınırlı; yani 4'ten küçük bir limiti var, diyelim e. Aynı şekilde $(y_n)_n$ dizisinin 2'den büyük bir limiti vardır, diyelim f. Şu hesaplardan $e = f$ eşitliği çıkar:

$$\begin{aligned} f = \lim y_n &= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = e. \end{aligned}$$

$e < 3$ eşitsizliği için, $e \leq y_5 = (1+1/5)^6 < 3$ eşitsizliğini farketmek yeterli. □

Euler sayısı ya da ***Napier sabiti*** olarak bilinen ve matematiğin π'den sonra herhalde en ünlü ve ilginç sabiti olan bu limit, e harfiyle gösterilir. İlk 20 basamağı şöyledir:

$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\ldots$$

e sayısının kesirli bir sayı olmadığını ilerde kanıtlayacağız. e sayısının 0 polinomu hariç hiçbir polinomun kökü olmadığı da bilinmektedir.

Bundan böyle

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

olacak. e'nin başka tanımları da vardır; bunları da ilerde göreceğiz.

Her $n > 0$ için

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \le e$$

eşitsizliklerine de dikkatinizi çekeriz. Bu, Önsav 3.24'ten çıkar. Yukardaki teoremin kanıtında da kullanılmıştı.

Örnekler

10.1. *$n! > (n/e)^n$ eşitsizliğini kanıtlayın.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için eşitsizlik yukarda kanıtlanan $e > 2 > 1$ eşitsizliklerinden çıkıyor. Şimdi eşitsizliği n için kabul edip $n+1$ için kanıtlayalım:

$$(n+1)! = n!\,(n+1) > \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1)$$

eşitsizliğinden dolayı,

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \ge \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğini, ya da sadeleştirerek,

$$n^n \ge \frac{(n+1)^n}{e}$$

eşitsizliğini kanıtlamanın yettiğini görürüz. Ama bu eşitsizlik, aynen, bildiğimiz

$$e \ge \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

eşitsizliğine denktir. □

10.2. *$n! \ge a(n/e)^n$ eşitsizliği hangi a sayıları için geçerlidir?*

Yanıt: Eşitsizliğin $n = 1$ için doğru olması için, $e \ge a$ olmalı. Şimdi eşitsizliğin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlamaya çalışalım, bakalım a için nasıl bir koşul bulacağız:

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \ge a\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1)$$

olduğundan, eğer

$$a\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \ge a\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

ise istediğimiz kanıtlanır. Bu eşitsizlikte a sadeleştiğinden, a üzerine yeni bir koşul elde etmeyiz. Bakalım eşitsizlik doğru mu? Bu eşitsizliğin, sadeleştirmelerden sonra,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

eşitsizliğine eşdeğer olduğunu görmek zor değil. Ama bu son eşitsizliğin doğru olduğunu biliyoruz. Demek ki herhangi bir $a \leq e$ için sorudaki eşitsizlik doğru. □

10.3. *Aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın.*

$$n! \geq \left(\frac{n+1}{e}\right)^n.$$

Kanıt: Bir üstteki örnekte $a = e$ alabileceğimizi gördük. Öyle yapalım. Demek ki,

$$n! \geq e\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Sadeleştirmeleri yaparsak ($n-1$ için) istediğimizi elde ederiz. □

10.4. $300! > 100^{300}$ *eşitsizliğini gösterin.*

Kanıt: $e < 3$ olduğundan, Örnek 10.1'den $n! > (n/3)^n$ çıkar. Bunu $n = 300$'e uygularsak istediğimizi buluruz. □

10.5. $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n} = \infty$.

Kanıt: Örnek 10.1'den hemen çıkar. □

10.6. $\lim_{n\to\infty} n!/n^n = 0$.

Kanıt: $x_n = n!/n^n$ olsun. O zaman, $(1+1/n)^n$ dizisi artan olduğundan,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{n!}{(n+1)^n}\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \leq \frac{1}{2}$$

olur. Demek ki

$$x_{n+1} \leq \frac{1}{2}x_n.$$

Buradan tümevarımla,

$$x_{n+k} \leq \frac{1}{2^k}x_n$$

çıkar. k'yı sonsuza götürerek, istediğimizi kanıtlamış oluruz. □

Biraz Tarih. e sayısının ilk izlerine, logaritmayı icat eden İsviçreli matematikçi John Napier'nin 1618 tarihli bir kitabının sonundaki ekteki cetvellerde rastlanır; o cetvelleri de William Oughtred'in hazırladığı sanılıyor. Napier'nin kitabında açık açık e'den bahsedilmemekte, sadece bazı logaritmaların e sayısı kullanılarak hesaplandığı anlaşılmaktadır.

e'nin matematiksel bir sabit olarak ilk kullanımı 1690-1691 yılları arasında, Leibniz'in Christian Huygens'e yazdığı mektuplardadır. Bu mektuplarda sabite e değil b adı verilmiştir.

Jacob Bernoulli bileşik faizleri çalışırken $((1+1/n)^n)_n$ dizisinin farkına varmıştır. Dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamış ve limitini, yani e sayısını hesaplamaya çalışmıştır.

Euler, e sayısını 1727'de kullanmaya başlamıştır. e sayısını basımevine ilk sokan da Euler'dir, 1736'da yayımlanan **Mechanica** adlı eserinde e olarak sözetmiştir bu sayıdan. Büyük olasılıkla "üs" anlamına gelen "exponentiation" sözcüğünün ilk harfi olarak e demiştir. Son derece alçakgönüllü olan ve başkalarının çalışmalarına çok saygılı olan Euler'in bu sayıya kendi adından dolayı e demiş olması pek muhtemel değil.

$(1+1/n)^n$ sayıları e sayısına pek o kadar çabuk yakınsamaz. Dizinin ilk $k = 1, 2, 3, 4, 5$ terimini ve virgülden sonraki ilk doğru rakamları gösterelim:

n	$(1+1/n)^n$
1	$\underline{2}$
74	$\underline{2{,}7}0013967884683\ldots$
164	$\underline{2{,}71}004043793275\ldots$
4822	$\underline{2{,}718}00001954235\ldots$
16609	$\underline{2{,}7182}0000137902\ldots$

Görüldüğü gibi dizi e sayısına çok yavaş yakınsıyor. İlerde e'ye daha çabuk yakınsayan bir dizi bulacağız.

10.2 $((1+x/n)^n)_n$ Dizisi

Bu altbölümde, bir x gerçel sayısı için

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_n$$

dizisine takılacağız. Her bir x için ayrı bir diziden sözettiğimizi anlamışsınızdır. Eğer $x \in \mathbb{Q}$ ise bu dizinin e^x sayısına yakınsayacağını kanıtlayacağız. Önce dizinin yakınsaklığını gösterelim.

Önsav 10.2. *Eğer $x > 0$ ise, $((1+x/n)^n)_n$ dizisi artan ve üstten sınırlı bir dizidir; dolayısıyla yakınsaktır.*

Kanıt: Önsav 3.24'e göre dizi artar. Sonuca ulaşmak için dizinin üstten sınırlı olduğunu göstermeliyiz. Bu amaçla, x'ten büyükeşit bir k doğal sayısı seçelim.

$$1+\frac{x}{n} \leq 1+\frac{k}{n}$$

olduğundan, $((1+k/n)^n)_n$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlamak yeterli. Onu da şimdi kanıtlıyoruz:

Önsav 10.3. *Eğer k bir doğal sayıysa, $((1+k/n)^n)_n$ dizisi e^k tarafından üstten sınırlıdır.*

Kanıt: $(1+k/n)^n$ teriminde n yerine kn alırsak, dizi artan olduğundan, daha büyük bir sayı buluruz. Demek ki,

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{k}{kn}\right)^{kn} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k \leq e^k.$$

Demek ki dizi üstten sınırlıdır. Savımız kanıtlanmıştır. □

Bu yaptıklarımızdan, $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ limitinin varlığı ve eğer $x \leq k \in \mathbb{N}$ ise, bu limitin e^k sayısından küçükeşit olduğu çıkar, çünkü artan ve üstten sınırlı bir gerçel sayı dizisi her zaman yakınsaktır (Teorem 7.1). Önsav 10.2'nin kanıtı tamamlanmıştır. □

Birazdan $q \in \mathbb{Q}$ için $\lim_{n\to\infty}(1+q/n)^n = e^q$ eşitliğini kanıtlayacağız.

Önsav 10.4. *Eğer $x > 0$ ise, $((1-x/n)^n)_n$ dizisi yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

olur.

Kanıt: Eğer $\lim_{n\to\infty}\left(1-x^2/n^2\right)^n = 1$ eşitliğini kanıtlarsak işimiz iş, çünkü o zaman,

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

olur. $\lim_{n\to\infty}\left(1-x^2/n^2\right)^n = 1$ eşitliğini kanıtlayalım. Önsav 3.17'ye göre, her $n > x$ için,

$$1-\frac{x^2}{n} = 1-n\frac{x^2}{n^2} \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1^n = 1$$

eşitsizliği çıkar. Bundan ve Sandviç Teoremi'nden (Teorem 5.1),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$$

bulunur. □

Ve işte söz verdiğimiz eşitliğin kesirli sayılar için kanıtı:

Önsav 10.5. *Eğer $q \in \mathbb{Q}$ ise, $\lim_{n\to\infty}(1+q/n)^n = e^q$ olur.*

Kanıt: Birinci Durum. $q = 0$ ise her şey apaçık. Bundan böyle $q \neq 0$ olsun.

İkinci Durum. $q \in \mathbb{N}$ durumuna bakalım. Önsav 10.3'te,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n \leq e^q$$

eşitsizliğini kanıtladık. Şimdi eşitliği kanıtlayacağız. Bunun için

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q} = e$$

eşitliğini göstermek yeterli, çünkü bu eşitliği gösterebilirsek, o zaman,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}\right]^q = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}\right]^q = e^q$$

olur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}(1+q/n)^{n/q} = e$ eşitliğini gösterelim.

Eğer $((1+q/n)^{n/q})_n$ dizisinde tüm n'leri değil de sadece q'nün bir katı olan n'leri alırsak ($n = qm$), o zaman

$$\left(\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}\right)_n$$

dizisinin,

$$\left(\left(1+\frac{q}{qm}\right)^{qm/q}\right)_m$$

altdizisini, yani,

$$\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)_m$$

altdizisini elde ederiz. Bu son dizi de Teorem 10.1'e göre e'ye yakınsar. Demek ki yakınsak olduğunu bildiğimiz $((1+q/n)^{n/q})_n$ dizisinin bir altdizisi e'ye yakınsıyor. Bundan $((1+q/n)^{n/q})_n$ dizisinin de e'ye yakınsadığı çıkar (Teorem 8.2). Yani $q \in \mathbb{N}$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n = e^q$$

eşitliği kanıtlanmıştır.

Üçüncü Durum. Şimdi de $q \in \mathbb{Q}^{>0}$ durumuna bakalım. $a, b \in \mathbb{N}$ için, $q = a/b$ yazalım. O zaman,

$$\left(1+\frac{q}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{bn}\right)^n$$

olur. $((1+a/bn)^{bn})_n$ dizisine bakalım; bu $((1+a/n)^n)_n$ dizisinin bir altdizisidir ve o da bir önceki durumdan e^a sayısına yakınsar. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn}\right)^{bn} = e^a$$

bulunur. Öte yandan, $((1+a/bn)^n)_n$ dizisi Önsav 10.2'ye göre yakınsaktır. Demek ki,

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn}\right)^n\right]^b = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn}\right)^{bn} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}\right)^m = e^a$$

ve her iki taraf da pozitif olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn}\right)^n = e^{a/b}$$

bulunur.

Dördüncü Durum. Son olarak $q \in \mathbb{Q}^{<0}$ olsun. O zaman $-q > 0$ olur ve üçüncü durumdan,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{q}{n}\right)^n = e^{-q}$$

bulunur. Demek ki, Önsav 10.4'ten

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{q}{n}\right)^n\right]^{-1} = (e^{-q})^{-1} = e^q$$

çıkar. Önsav 10.5 tamamıyla kanıtlanmıştır. □

Örnek 10.7. $\left(-1+\frac{1}{n}\right)^n$ *dizisi ıraksar.* (Bkz. Örnek 6.2.)
Kanıt:

$$\left(-1+\frac{1}{n}\right)^n = (-1)^n\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

eşitliklerinden ve $\lim_{n\to\infty}\left((-1)^n\right)_n$ dizisinin ıraksak olmasından çıkar. □

Alıştırma 10.8. Terimleri $\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ olan dizi ıraksar mı?

Gerçel sayılarla üs almayı öğrendiğimizde, yukardaki teoremi r gerçel sayıları için de kanıtlayacağız, yani

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

eşitliği doğru olacak. Daha doğrusu, bu eşitlik (nerdeyse) e^r'nin tanımı olacak. Şimdilik şunu kolaylıkla kanıtlayabiliriz ama:

Sonuç 10.6. *Eğer $p \le r \le q$ ve p, $q \in \mathbb{Q}$ ise,*

$$e^p \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \le e^q$$

olur.

Kanıt: Varsayımdan, her n için,

$$1+\frac{p}{n} < 1+\frac{r}{n} < 1+\frac{q}{n}$$

ve

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n < \left(1+\frac{r}{n}\right)^n < \left(1+\frac{q}{n}\right)^n$$

çıkar. Üç tarafın da limitini alırsak, Sandviç Teoremi'nden (Teorem 10.5) ve Önsav 5.6'dan,

$$e^p \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \le e^q$$

buluruz. □

Örnek 10.9. *Aşağıdaki limiti hesaplayın:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1/3}{n-1/2}\right)^{5n}.$$

Çözüm:

$$\left(\frac{n+1/3}{n-1/2}\right)^{5n}=\left(\frac{1+1/3n}{1-1/2n}\right)^{5n}=\left(\frac{(1+1/3n)^n}{(1-1/2n)^n}\right)^5.$$

Payın ve paydanın limitlerini ayrı ayrı hesaplayalım:

$$(1+1/3n)^n=\left((1+1/3n)^{3n}\right)^{1/3}\longrightarrow e^{1/3}$$

ve

$$(1-1/2n)^n=\left((1-1/2n)^{2n}\right)^{1/2}=\left(e^{-1}\right)^{1/2}\longrightarrow e^{-1/2}$$

olur. Demek ki

$$\left(\frac{n+1/3}{n-1/2}\right)^{5n}\longrightarrow\left(\frac{e^{1/3}}{e^{-1/2}}\right)^5=\left(e^{1/3+1/2}\right)^5=e^{25/6}.$$

Alıştırmalar

10.10. Aşağıdaki limitleri hesaplayın:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n,\quad\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,\quad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{5n}\right)^{2n}.$$

10.11. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ve $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n$ limitlerini hesaplayın.

10.12. $(n!/n^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını ve 1'den küçük olduğunu kanıtlayın. $\lim_{n\to\infty} n!/n^n=0$ eşitliğini kanıtlayın.

10.13. k sabit bir doğal sayı olsun. $((kn)!/n^n)_n$ dizisinin limitini - varsa - bulun.

10.3 e'ye Yakınsayan Bir Başka Dizi

Bu altbölümde e sayısına daha çabuk yakınsayan bir başka dizi bulacağız. Tabii $(1+1/n)^n$ dizisi yerine terimleri

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n},\ \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2},\ \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}$$

olan dizilerden birini alırsak, e sayısına çok daha çabuk yakınsayan diziler buluruz ama bu mızıkçılık sayılır.

Yukarda, e sayısını, terimleri

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

olan dizinin limiti olarak tanımladık. Binom açılımını kullanarak bu terimi açalım ve ortaya çıkan ifadeyle oynayalım:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0} n\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{1}{n^i} = 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{1}{n^i}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\frac{1}{n^i}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i}\frac{1}{i!}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{i!}\\
&\le 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}.
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}.$$

Sağ tarafta bulduğumuz dizinin terimlerini (Excel'de mesela) hesaplayalım:

n	n'inci terim (yaklaşık)
0	1
1	2
2	2,5
3	2,6666666666667
4	2,7083333333333
5	2,7166666666667
6	2,7180555555556
7	2,7182539682540
8	2,7182787698413
9	2,7182815255732
10	2,7182818011464
11	2,7182818261985
12	2,7182818282862
13	2,7182818284468
14	2,7182818284582

Eğer kitaplarda yazan $e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\ldots$ eşitliği gözönüne alınırsa, sağdaki dizinin de e'ye yakınsadığı tahmin edilir. Bu tahmin doğrudur elbette; bu kadar da rastlantı olmaz... Ayrıca, bu yeni dizinin e'ye eskisine oranla daha çabuk yakınsadığı da belli, ne de olsa terimler hep daha büyükeşit.

Bu yeni dizinin e'ye yakınsadığını kanıtlayalım. Kanıt biraz uzun sürecek.

10.4 exp Fonksiyonu

Yukarda,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$$

dizisine baktık. Bu diziyi genelleştirip, her $x \in \mathbb{R}$ için, terimleri

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

olan diziye bakacağız. Bu dizi yakınsaktır; daha doğrusu bir Cauchy dizisidir ve Cauchy dizisi olduğundan yakınsaktır. Bunu kanıtlayalım.

Teorem 10.7. *Terimleri*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

olan dizi bir Cauchy dizisidir, dolayısıyla yakınsaktır.

Bu dizinin limiti $\exp x$, bazen de $\exp(x)$ ya da $\mathrm{Exp}(x)$ olarak yazılır:

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Bu bölümün sonunda $\exp 1 = e$ eşitliğini kanıtlayacağız. Hatta daha da ileri gidip, $q \in \mathbb{Q}$ için, daha da şaşırtıcı olan

$$\exp q = e^q$$

eşitliğini kanıtlayacağız. $\exp 0 = 1$ eşitliği daha şimdiden bariz olmalı. Gerçel üs almasını bilsek, $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\exp x = e^x$$

eşitliğini kanıtlardık ama ne yazık ki henüz bilmiyoruz! İlerde, bir gerçel sayının gerçel bir gücünü tanımladığımızda bu eşitliği de kanıtlayacağız. Bu fonksiyon hakkında, türevinin olması ve türevinin kendisine eşit olması gibi daha da şaşırtıcı olguları üçüncü cilde saklıyoruz.

Teorem 10.7'nin Kanıtı: Kanıt pek kolay olmasa da zenginleştirici olacak. Yavaş yavaş, yöntemi tartışa tartışa kanıtlayacağız. $x \neq 0$ eşitsizliğini varsayabiliriz. $\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun.

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!}\right| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için $n > m$ sayılarının ne kadar büyük olmaları gerektiğini bulacağız. Soldaki (küçültmemiz gereken) ifadeyle oynayalım:

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-\sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right|=\left|\sum_{i=m+1}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|\leq\sum_{i=m+1}^{n}\frac{|x|^i}{i!}$$

En sağda $n-m$ tane terim toplanmış. Bu toplamı ta en başta verilmiş olan pozitif ϵ sayısından küçük yapacağız. Toplamda bulunan bu $n-m$ tane

$$\frac{|x|^i}{i!}$$

sayısının her birini (ϵ'a göre çok küçük) sabit bir α sayısından daha küçük yapmak işe yaramaz, çünkü o zaman ϵ'dan küçük yapmak istediğimiz toplamın $(n-m)\alpha$'dan küçük olduğu ortaya çıkar ki, m'yi sabit tutup n'yi büyütürsek, $(n-m)\alpha$ sayısı sonsuza kadar büyür ve sadece ϵ'u değil, her sayıyı aşar. Burada kullanmamız gereken bilgi, x ne kadar büyük olursa olsun, i çok çok büyük olduğunda, $|x|^i/i!$ sayısının çok çok küçük olduğu ve bir sonraki $|x|^{i+1}/(i+1)!$ sayısının bundan daha daha küçük olduğu. Bu dediğimizi matematiksel olarak ortaya çıkaran küçük bir hesap yapalım şimdi:

$$\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!}=\frac{|x|}{i+1}\frac{|x|^i}{i!}<\frac{|x|}{N}\frac{|x|^i}{i!}=r\frac{|x|^i}{i!}$$

Burada, i'yi daha sonra belirleyeceğimiz belli bir N sayısından büyükeşit aldık; ayrıca $r=|x|/N$ aldık. N doğal sayısını da, zamanı geldiğinde

$$r=\frac{|x|}{N}<1$$

eşitsizliğini sağlayacak kertede büyük seçeceğiz, yani N sayısı, $|x|$'ten büyük bir doğal sayı olacak; hatta N'yi daha şimdiden $|x|$'ten büyük bir doğal sayı olarak seçelim. Birazdan N'nin seçiminde bir başka belirleyici kısıtlama daha bulacağız. Şimdilik sadece $r=|x|/N<1$ kısıtlamasıyla yetinip N'nin daha başka hangi kısıtlamalara maruz kalması gerektiğini - sabırla - araştıralım.

Her $i>N$ için geçerli olan

$$\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!}<r\frac{|x|^i}{i!}$$

eşitsizliğinden, kolayca, $i>j>N$ için,

$$\frac{|x|^i}{i!}<r\frac{|x|^{i-1}}{(i-1)!}<r^2\frac{|x|^{i-2}}{(i-2)!}<\ldots<r^{i-j}\frac{|x|^i}{j!}$$

eşitsizliklerini elde ederiz.

Başladığımız hesaplara devam edelim: $n > m > N$ için, $0 < r < 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-\sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right| &= \left|\sum_{i=m+1}^{n}\frac{x^i}{i!}\right| \leq \sum_{i=m+1}^{n}\frac{|x|^i}{i!} < \sum_{i=m+1}^{n} r^{i-(m+1)}\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\\ &= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{i=m+1}^{n} r^{i-(m+1)} = \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-(m+1)} r^i\\ &< \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1-r^{n-m}}{1-r} < \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-r}\end{aligned}$$

buluruz. En sondaki ifadeyi ϵ'dan küçük yapmalıyız, yani N sayısını, her $m > N$ için,

$$\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} < \epsilon(1-r)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçmeliyiz. Ama

$$\left(\frac{|x|^n}{n!}\right)_n$$

dizisi 0'a yakınsadığından (Örnek 6.1), böyle bir N sayısı bulmak mümkündür: N sayısı, $r = |x|/N$ sayısını 1'den küçük yapacak kadar büyük seçildiği gibi, bir de ayrıca, her $m > N$ için,

$$\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} < \epsilon(1-r)$$

eşitsizliğini doğru kılacak kadar da büyük seçilsin. Bu durumda, hesaplardan devam ederek, $n > m > N$ için, istediğimiz,

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-\sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right| < \ldots < \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-r} < \epsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Kanıtımız tamamlanmıştır. Bu önemli kanıtı kitabi bir şekilde yazalım.

Teorem 10.7'nin Kitabi Kanıtı: $x \neq 0$ eşitsizliğini varsayabiliriz. $\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun. $|x|$'ten büyük bir N_1 tamsayısı vardır.

$$r = \frac{|x|}{N_1}$$

olsun. Demek ki

$$0 < r < 1.$$

Ayrıca, $(|x|^{n/n!})_n$ dizisi de 0'a yakınsadığından (bkz. Örnek 6.1), her $n > N_2$ için

$$\frac{|x|^n}{n!} < \epsilon(1-r)$$

eşitsizliğini sağlayan bir N_2 sayısı vardır. Son olarak, $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Her $i > N$ için,

$$\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{|x|}{i+1}\frac{|x|^i}{i!} < \frac{|x|}{N}\frac{|x|^i}{i!} = r\frac{|x|^i}{i!}$$

bulunur. Demek ki, $i > j > N$ için,

$$\frac{|x|^i}{i!} < r\frac{|x|^{i-1}}{(i-1)!} < r^2\frac{|x|^{i-2}}{(i-2)!} < \ldots < r^{i-j}\frac{|x|^j}{j!}$$

olur. Böylece, $0 < r < 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right| &= \left|\sum_{i=m+1}^{n}\frac{x^i}{i!}\right| \leq \sum_{i=m+1}^{n}\frac{|x|^i}{i!} < \sum_{i=m+1}^{n} r^{i-(m+1)}\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \\ &= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{i=m+1}^{n} r^{i-(m+1)} = \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-(m+1)} r^i \\ &< \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1-r^{n-m}}{1-r} < \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-r} < \epsilon\end{aligned}$$

elde ederiz. Kitabi kanıtımız tamamlanmıştır. Cümleten geçmiş olsun. □

Artık

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

tanımını verebiliriz. e sayısına geri dönmeden önce, $x \geq 0$ için,

$$\exp x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

eşitsizliğine dikkat edelim. Teorem 10.8'in kanıtının son hamlesinde gerekecek.

Örnek 10.14. Eğer $y_0, y_1, \ldots, y_n \geq 0$ ise

$$(1+y_0)(1+y_1)\cdots(1+y_n) \leq \exp(y_0 + \cdots + y_n)$$

olur çünkü

$$1 + y_i \leq 1 + \frac{y_i}{1!} + \frac{y_i^2}{2!} + \frac{y_i^3}{3!} + \cdots = \exp y_i$$

ve

$$(1+y_0)(1+y_1)\cdots(1+y_n) \leq \exp y_0 \exp y_1 \cdots \exp y_n = \exp(y_0 + \cdots + y_n)$$

olur.

10.5 e'ye Yakınsayan Bir Başka Dizi (devam)

Söz verdiğimiz gibi,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}=e$$

eşitliğini, yani $\exp 1 = e$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bir önceki altbölümde limitin olduğunu kanıtladık ($x = 1$ alın.) Geriye limitin e olduğunu kanıtlamak kaldı.

Bunu kanıtlamak için, terimleri

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

olan dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlamamız yeterlidir. Ama elimiz değmişken, en genel şeyi kanıtlayalım, çok daha fazla zahmetli olmayacak:

Teorem 10.8. $\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Kanıt: exp'in tanımından dolayı,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)=0$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Hesaplara başlayalım. Daha önce de sık sık yaptığımız gibi, $(1+x/n)^n$ ifadesinin yerine bu ifadenin binom açılımını yazacağız.

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{x^i}{n^i}\right)=\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right)x^i$$

Tarafların mutlak değerlerini alırsak,

$$\left|\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|=\left|\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right)x^i\right|\le\sum_{i=2}^{n}\left|\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right||x|^i$$

buluruz. En sağdaki ifadeyi (n'yi büyütmeyi göze alarak) dilediğimiz kadar küçültebileceğimizi göstermemiz lazım.

Bu aşamada kanıtı nasıl bitirebileceğimizi tartışalım. Bu tartışmanın yararlı olduğuna da inanıyoruz. Bilinçsizce yapılan hesapların bir sonuç vermesini beklemek mucize beklemek gibi bir şeydir. Hesaplara girişmeden önce ne yapmak gerektiğini bilmek, en azından üç aşağı beş yukarı hissetmek gerekir.

Çok küçültmek istediğimiz bu ifadede, tam tamına $n-1$ tane terim toplanıyor. İşte o terimler:

$$\left|\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right||x|^i$$

$(i = 2, \ldots, n)$. Eğer bu $n-1$ terimin her birini dilediğimiz kadar küçültebilirsek, işimiz iş, o zaman toplamı da istediğimiz kadar küçültebiliriz... demek içimizden geçiyor hemen ama bu yanlış. $x = 1$ olsa bile yanlış. Çünkü eğer her bir terimi, örneğin, aşağı yukarı $1/n$ kadar küçültürsek, o zaman $n-1$ tane terimin toplamını aşağı yukarı

$$(n-1) \times \frac{1}{n} \approx 1$$

kadar küçültmüş oluruz ve 1 çok çok küçük bir sayı olmadığından (ve çok çok küçük bir sayı olmadığından!) bu küçültme bir işimize yaramaz. Burada yapılması gereken, her bir terimi, mesela, eğer mümkünse, $1/n^2$ kadar küçültmektir, çünkü o zaman $n-1$ tane terimin toplamını

$$(n-1) \times \frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n}$$

kadar küçülmüş oluruz ve n çok büyük olduğunda ifade de çok küçük olur. Demek ki her n ve her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\left| \frac{1}{i!} - \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \right| |x|^i \leq \frac{1}{n^2}$$

eşitsizliğini kanıtlamamız yeterli. ($x = 1$ özel durumuna bile razıyız!) Eğer bunu kanıtlamayı beceremezsek, ki beceremeyiz, çünkü yanlış, o zaman, $1/n^2$ yerine,

$$\left| \frac{1}{i!} - \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \right| |x|^i \leq f(n)$$

eşitsizliğini ve

$$\lim_{n \to \infty} n f(n) = 0$$

eşitliğini sağlayan $1/n^2$'den daha küçük bir f fonksiyonu bulmamız gerekecek.

Yukardaki tartışma aydınlatıcıdır aydınlatıcı olmasına ama aynı zamanda beyhudedir! Yöntemimiz yukarda tartıştığımız gibi olmayacak ama ona yakın olacak. Öyle bir f fonksiyonu bulacağız ki, hem her $2 \leq i \leq n$ için

$$\left| \frac{1}{i!} - \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \right| \leq \frac{f(i)}{n}$$

olacak, hem de her $n \geq 2$ için,

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) |x|^i$$

ifadesi n'den bağımsız bir $B(x)$ sayısı tarafından üstten sınırlı olacak. Eğer bunu başarabilirsek, o zaman,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{i=2}^{n}\left|\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right||x|^i \leq \sum_{i=2}^{n}\frac{f(i)}{n}|x|^i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}f(i)|x|^i \leq \frac{B(x)}{n}\end{aligned}$$

olur ve n çok büyük olduğunda, bu sayı çok küçük olur. İşte plan bu. Planımızı gerçekleştirmeden önce oldukça kolay bir savı aradan çıkaralım.

Sav 1. $0 \leq a_i \leq x$ *ise*

$$(x-a_1)\cdots(x-a_k) \geq x^k-(a_1+\cdots+a_k)\,x^{k-1}$$

olur.

Kanıt: Eşitsizliği k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $k=1$ ise eşitlik sözkonusu ve her şey çok bariz. Şimdi

$$(x-a_1)\cdots(x-a_k) \geq x^k-(a_1+\cdots+a_k)\,x^{k-1}$$

eşitsizliğini varsayıp,

$$(x-a_1)\cdots(x-a_{k+1}) \geq x^{k+1}-(a_1+\cdots+a_{k+1})\,x^k$$

eşitsizliğini kanıtlayalım.

$$\begin{aligned}(x-a_1)\cdots(x-a_{k+1}) &= (x-a_1)\cdots(x-a_k)\,(x-a_{k+1}) \\ &\geq \left(x^k-(a_1+\cdots+a_k)\,x^{k-1}\right)(x-a_{k+1}) \\ &= x^{k+1}-(a_1+\cdots+a_{k+1})\,x^k+(a_1+\cdots+a_k)\,x^{k-1}a_{k+1} \\ &\geq x^{k+1}-(a_1+\cdots+a_{k+1})\,x^k.\end{aligned}$$

Eşitsizliğimiz kanıtlanmıştır. □

Ve canalıcı sav:

Sav 2. *Her* $2 \leq i \leq n$ *doğal sayısı için,*

$$0 \leq \frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} \leq \frac{1}{2n}\frac{1}{(i-2)!}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: Sav 1'den yararlanıp ortadaki terimle oynayacağız.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i!} - \binom{n}{i}\frac{1}{n^i} &= \frac{1}{i!} - \frac{n!}{(n-i)!\,i!}\frac{1}{n^i} = \frac{1}{i!}\left(1 - \frac{n!}{(n-i)!}\frac{1}{n^i}\right) \\
&= \frac{1}{i!}\left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^i}\right) \\
&= \frac{1}{i!}\frac{n^i - n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^i} \\
&= \frac{1}{i!}\frac{n^{i-1} - (n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^{i-1}} \\
&\leq \frac{1}{i!}\frac{n^{i-1} - (n^{i-1} - (1+2+\cdots+(i-1))n^{i-2})}{n^{i-1}} \\
&= \frac{1}{i!}\frac{(1+2+\cdots+(i-1))n^{i-2}}{n^{i-1}} = \frac{(i-1)i}{2\cdot i!\cdot n} = \frac{1}{2n}\frac{1}{(i-2)!}.
\end{aligned}$$

Kanıtlamamız gereken birinci eşitsizlik, yani ifadenin ≥ 0 olduğu yukardaki hesabın daha ikinci satırından anlaşılıyor. □

Şimdi artık Teorem 10.8'in kanıtına nihai noktayı koyabiliriz. Her zamanki gibi küçük bir hesap yapacağız. x'i sabitleyip hesaplara devam edelim:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{i=2}^{n}\left|\frac{1}{i!} - \binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right||x|^i = \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i!} - \binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right)|x|^i \\
&\leq \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2n}\frac{1}{(i-2)!}|x|^i = \frac{|x|^2}{2n}\sum_{i=2}^{n}\frac{|x|^{i-2}}{(i-2)!} \\
&= \frac{|x|^2}{2n}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|x|^j}{j!} \leq \frac{|x|^2}{2n}\exp|x|.
\end{aligned}$$

Şimdi $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. N'yi,

$$2N\epsilon > |x|^2\exp|x|$$

eşitsizliğini sağlayacak kadar büyük seçelim. Her $n > N$ için,

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \ldots \leq \frac{|x|^2}{2n}\exp|x| < \frac{|x|^2}{2N}\exp|x| < \epsilon$$

buluruz. Son olarak, her iki tarafın n sonsuza giderken limitini alalım. Teorem 10.8 kanıtlanmıştır. □

Sonuç 10.9. *Eğer $x \in \mathbb{Q}$ ise,*

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$$

olur.

Kanıt: Teorem 10.5, 10.7 ve 10.8'den çıkar. □

Örnekler

10.15. $2 < e$ olduğundan, her $n > 0$ için $n < 2^n < e^n$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \exp n = \infty$ olur.

10.16. $2 < e$ olduğundan, her $n > 0$ için $1/n > 2^{-n} > e^{-n}$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$ olur.

10.17. $\lim_{n\to\infty} n(n^{1/n} - 1) = \infty$ *eşitliğini kanıtlayın.*

Kanıt: $A \in \mathbb{N}$ olsun. Önsav 10.2, 10.3 ve 10.5'e göre terimleri $(1 + A/n)^n$ olan dizi artarak $\exp A$'ya yakınsadığından, her $n > \exp A$ için $(1 + A/n)^n \leq \exp A < n$ olur. Buradan, her $n > \exp A$ için,

$$A < n(n^{1/n} - 1)$$

çıkar. □

10.18. exp *fonksiyonu polinomiyal bir fonksiyon değildir.*

Kanıt: p, derecesi d olan gerçel katsayılı bir polinom olsun. p'yi açık biçimde yazalım:

$$p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 + \cdots + p_dX^d.$$

p'yi bir $n > 0$ doğal sayısında değerlendirelim:

$$p(n) = p_0 + p_1n + p_2n^2 + \cdots + p_dn^d$$

sayısını buluruz. p'nin derecesi d olduğundan, $p_d \neq 0$'dır. Çıkan sayıyı n^d'ye bölelim:

$$\frac{p(n)}{n^d} = \frac{p_0}{n^d} + \frac{p_1}{n^{d-1}} + \cdots + \frac{p_{d-1}}{n} + p_d$$

elde ederiz. Şimdi n'yi sonsuza götürelim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^d} = p_d \neq 0$$

bulunur. Öte yandan eğer $k > d$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = 0$$

bulunur ve $k < d$ ise, p_d'nin pozitif ya da negatif oluşuna göre, $\pm\infty$ bulunur. Demek ki p polinomunun derecesi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ilişkisini sağlayan **yegâne** doğal sayıdır. Dolayısıyla bir f fonksiyonunun polinomiyal olmadığını kanıtlamak için, yukarda bulduklarımızın doğru olmadığını kanıtlamak yeterlidir. Demek ki eğer her k doğal sayısı için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(n)}{n^k} = \infty$$

olduğunu kanıtlayabilirsek, o zaman exp fonksiyonunun polinomiyal bir fonksiyon olmadığını da kanıtlamış oluruz. Bunun da kanıtı kolay, çünkü her $k > 0$ doğal sayısı için şu olur:

$$\frac{\exp(n)}{n^k} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!}}{n^k} \geq \frac{\sum_{i=0}^{k+1} \frac{n^i}{i!}}{n^k} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!}\frac{1}{n^{k-i}}\right) + \frac{1}{k!} + \frac{n}{(k+1)!} \to \infty.$$

10.6 $\exp x$'in Yaklaşık Değerini Bulmak

$\exp x$'in yaklaşık bir değerini bulmak için,

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

eşitliğinden yararlanıp, büyük bir n sayısı için, $\exp x$ yerine,

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

sayısını hesaplayabiliriz. n'yi ne kadar büyük alırsak, $\exp x$'e o kadar yakın bir sayı buluruz. Ancak yaptığımız hatanın üstsınırını bilmezsek, bu kestirimiz (yaklaşık hesabımız yani) uygulamada hiçbir işe yaramaz. Sosyologlar bile, bir anket yayımladıklarında hata payını, örneğin, "sonuçlarımız %95 olasılıkla ±%3 doğrudur" diyerek belirtirler... Önce aşina olduğumuz türden hesaplar yaparak

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

terimleri arasındaki farkı bulalım. $n > m$ olsun.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-\sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right| &= \left|\sum_{i=m+1}^{n}\frac{x^i}{i!}\right| \le \sum_{i=m+1}^{n}\frac{|x|^i}{i!} = |x|^{m+1}\sum_{i=m+1}^{n}\frac{|x|^{i-m-1}}{i!} \\
&= |x|^{m+1}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{|x|^j}{(j+m+1)!} \\
&= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{(m+1)!}{(j+m+1)!}|x|^j \\
&= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{j!(m+1)!}{(j+m+1)!}\frac{|x|^j}{j!} \\
&= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{1}{\binom{j+m+1}{j}}\frac{|x|^j}{j!} \\
&\le \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{|x|^j}{j!} \le \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\exp|x|.
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-\sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right| < \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\exp|x|$$

(Eğer $x \geq 0$ ise tüm mutlak değerler kalkabilir.) Her iki tarafın da n sonsuza giderken (m sabit kalacak) limitini alalım. Sağ taraf hiçbir yere gitmediğinden,

$$\left| \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \exp |x|$$

elde ederiz. Limiti mutlak değerinin içine sokabiliriz (Önsav 5.2.iv):

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \exp |x|$$

yani,

$$\left| \exp x - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \exp |x|$$

buluruz. Bu bize, $\exp x$ ile

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}$$

sayısı arasındaki azami farkı veriyor. m çok büyük bir sayı olduğunda bu fark görüldüğü gibi küçülüyor. Bir şey kanıtladık:

Sonuç 10.10. *Her $x \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için,*

$$\left| \exp x - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \exp |x|.$$

Bulduğumuz bu sonucun ne işe yarayabileceğini sorgulayabilir okur. Nitekim, $\exp x$ sayısıyla $\exp x$'in yaklaşık değeri arasındaki farkı, içinde $\exp |x|$ bulunan bir ifadeyle sınırladık; biz zaten $\exp x$'i tam olarak bilmediğimizden, bu yaptığımız ne işe yarayabilir ki? Yarar! $|x|$'ten büyükeşit bir q kesirli sayı bulalım. O zaman

$$\exp |x| \leq \exp q = e^q \leq 3^q$$

olur (neden?) ve yukardaki teoremdeki eşitsizliği

$$\left| \exp x - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} 3^q$$

olarak yazabiliriz. Örneğin $\exp 1$'i, yani e'yi en fazla 1000'de 1 hatayla bulmak istiyorsak, yukarda $q = x = 1$ alırız ve

$$\exp 1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} = \left| \exp 1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \right| \leq \frac{3}{(m+1)!}$$

buluruz; ardından,

$$\frac{3}{(m+1)!} \leq \frac{1}{1000}$$

eşitsizliğini sağlayan bir m bulmak gerekiyor. $m = 6$ yetiyor. Demek ki,

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{6!} = 2{,}7180555\ldots$$

sayısı e'ye 1000'de 1 yakın, yani,

$$2{,}7170555\ldots \leq e \leq 2{,}7190555\ldots$$

Fena bir iş yapmadık doğrusu.

Tabii Sonuç 10.10'dan daha ince ve daha doğru kestirimler yapılabilir. Ama amacımız bu değil.

İleri sınıflarda, $\exp x$ ifadesi, daha doğrusu,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

ifadesi x, kare bir matrisken, ya da x bambaşka uzaylardayken (örneğin karmaşık bir sayıyken) de anlamlı olacak. Bunu doğru kılan $n!$ sayısının çok büyük bir sayı olmasıdır, aynı olgu $n!$ yerine örneğin n^2 alırsak doğru olmaz, nitekim,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2}\right)$$

limiti ancak ve ancak $|x| \leq 1$ ise vardır, yoksa dizi ıraksaktır. İlerde bu ve benzer ifadeleri kanıtlamanın kolay yöntemlerini göreceğiz.

Alıştırmalar

10.19. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $q \in \mathbb{Q}$ için $\exp(qx) = (\exp x)^q$ eşitliğini kanıtlayın.

10.20. Her $q \in \mathbb{Q}$ için $\exp(q) = e^q$ eşitliğini kanıtlayın.

10.21. $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

10.22. $\lim_{n\to\infty} \exp(1/n) = 1$ eşitliğini kanıtlayın. (Dikkat: $\exp 0 = 1$ eşitliği yetmez, exp fonksiyonunun sürekli olduğunu (hatta sürekliliğin tanımını bile) henüz bilmiyoruz; tanımlara geri dönün.)

10.23. e^2 sayısını en fazla milyonda 1 hatayla hesaplayın.

10.24. e sayısının virgülden sonraki k'inci basamağı 9 değilse, bu basamağı bulmak için,

$$e \approx \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}$$

kestiriminde m kaç olmalıdır?

10.25. $\exp e$ sayısı en fazla on binde 1 hatayla bulun.

10.26. $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=2}^{n} (1 - \frac{1}{i})$ limitini bulun.

10.27. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$ eşitsizliğini kanıtlayın. Bundan $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$ eşitliğini çıkarın.

10.28. Her $x \in \mathbb{R}$ ve her $q \in \mathbb{Q}$ için, $\exp(qx) = (\exp x)^q$ eşitsizliğini kanıtlayın. (Bir önceki alıştırmayı kullanarak önce $q \in \mathbb{N}$ için, sonra $q \in \mathbb{Z}$ için kanıtlayın.)

10.29. Her $x \in \mathbb{R}$ için, $\exp x > 0$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10.30. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, eğer $x < y$ ise, $\exp x < \exp y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10.31. $\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n} - 1) = 1$ eşitliklerini kanıtlayın.

10.32. Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \left(\exp\left(x + \frac{1}{n} \right) - \exp x \right) \right) = \exp x$$

eşitliğini kanıtlayın.

10.33. $(n^{1/n})_n$ dizisinin zamanla azaldığını kanıtlayın. Buradan $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ eşitliğini kanıtlayın (bkz. Örnek 8.2).

10.34. $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{1/n}$ ve $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/(n-1)!}$ limitlerini bulun.

10.35. Her $x \in \mathbb{R}$ için, terimleri

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \text{ ve } \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

olan dizilerin yakınsak olduklarını kanıtlayın (Örnek 15.29). Bu dizilerin limitleri sırasıyla $\cos x$ ve $\sin x$ olarak yazılır. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

10.36. $(x_n)_n$, pozitif ve limiti olan bir dizi olsun. Limitin 0 ve 1'den farklı olduğunu varsayalım. $\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = 1$ eşitliğini kanıtlayın. Limit 0 ya da 1 olursa ne diyebilirsiniz?

10.7 $\exp(x+y) = \exp x \exp y$

Başlıktaki eşitliği kanıtlayıp bu eşitliğin önemli birkaç sonucunu vereceğiz. Kanıtımızda okurun hoşlanacağını umduğumuz güzel hesaplar yapacağız. Bu tür hesaplarla arası hoş olmayan matematikçi adayı okurun dikkatlice okumasında sonsuz yarar vardır. Bölüm 16'da Cauchy çarpımını gördüğümüzde, burada yaptığımız çok daha basit biçimde çıkacak.

Teorem 10.11. *Her x, $y \in \mathbb{R}$ için, $\exp(x+y) = \exp x \exp y$ eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: Kanıtlamak istediğimiz eşitliğin sağındaki ve solundaki ifadelerin ikisi de birer limit. Nitekim, soldaki ifade, exp fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(x+y)^i}{i!}$$

olur. Sağdaki ifade de, gene tanım gereği,

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{y^i}{i!} \right)$$

ifadesine eşittir; ama bunu,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right)\right)$$

olarak da yazabiliriz. Demek ki birinci limitle bu son limitin birbirine eşit olduğunu göstermeliyiz. Bir başka deyişle,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right)-\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(x+y)^i}{i!}\right)\right)=0$$

eşitliğini göstermeliyiz. Demek ki, terimleri

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right)-\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(x+y)^i}{i!}\right)$$

olan dizinin 0'a yakınsadığını göstermeliyiz. Oldukça karmaşık görünümlü bir dizi... $n = 0, 1, 2, 3$ için dizinin terimlerini hesaplamakta yarar var.

$n = 0$ için,

$$1 - 1 = 0$$

elde edilir.

$n = 1$ için,

$$(1+x)(1+y) - [1 + (x+y)] = xy$$

elde edilir.

$n = 2$ için, ilk elde,

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2}\right)-\left[1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}\right]$$

elde edilir. Çarpmalar ve sadeleştirmeler yapıldığında da geriye sadece,

$$\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+\frac{x^2y^2}{4}$$

kalır.

$n = 3$ için, ilk elde,

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}\right)-\left[1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{6}\right]$$

elde edilir. Çarpmalar ve sadeleştirmeler yapıldığında da geriye sadece (!),

$$\frac{x^3y}{6}+\frac{x^2y^2}{4}+\frac{xy^3}{6}+\frac{x^2y^3}{12}+\frac{x^3y^2}{12}+\frac{x^3y^3}{36}$$

kalır.

$n = 4$ için sonucun ne çıkacağını bulmayı okura bırakıyoruz. (Hesapları yapmakta çok yarar vardır. Şiddetle öneririz.)

Okur elini çamura bulayıp hesapları gerçekten yaparsa, iki ilginç tespitte bulunacaktır.

a. Birinci terimden çıkarılan ikinci terim tamamen sadeleşmekte ve ortadan kaybolmaktadır. Örneğin $n = 3$ durumunda,

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}\right)$$

ifadesinden çıkarılan

$$1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{2} + \frac{(x + y)^3}{6}$$

ifadesinin her terimi birinci ifadede de aynı katsayıyla bulunduğundan sadeleşerek yok olmaktadır.

b. Hesap sonucu bulunan ifadedeki terimlerin en küçük derecesi giderek büyümektedir. Örneğin,

$n = 1$ için 2'nci dereceden (xy),

$n = 2$ için 3'üncü dereceden $(x^2y/2 + \cdots)$

$n = 3$ için 4'üncü dereceden: $(x^3y/6 + \cdots)$

kalan bulunmaktadır. Okur hesapları yaparsa $n = 4$ için en küçük derecesi 5 olan bir kalan bulacağını görecektir.

Kalanın en büyük dereceli teriminin,

$$\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!}$$

olduğu belli.

Henüz başlamadığımız kanıta devam edelim. x ve y iki sabit sayı olsun. Birazdan bu sabit sayıları pozitif alabileceğimizi göreceğiz, yani teoremi pozitif x ve y sayıları için kanıtlamanın yeterli olduğunu göreceğiz. Ama şimdilik x ve y herhangi iki gerçel sayı.

$\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun.

$$\left|\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{y^i}{i!}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(x+y)^i}{i!}\right)\right| < \epsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Kolları sıvayıp, mutlak değer içindeki canavarı açalım ve birçok terimin sadeleşeceğini umalım.

Canavarı parça parça açalım. Önce ilk ifade:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{y^i}{i!}\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!}\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{x^i y^j}{i!j!}$$
$$= \sum_{0\le i\le n,\ 0\le j\le n} \frac{x^i y^j}{i!\cdot j!}.$$

Şimdi ikinci ifade:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(x+y)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} x^i y^{i-j}}{i!} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \frac{\binom{i}{j}}{i!} x^i y^{i-j}$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \frac{\frac{i!}{j!(i-j)!}}{i!} x^j y^{i-j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \frac{x^i y^{i-j}}{j!(i-j)!}$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j+k=i} \frac{x^j y^k}{j!k!} = \sum_{0\le j+k\le n} \frac{x^j y^k}{j!k!} = \sum_{0\le i+j\le n} \frac{x^i y^j}{i!j!}.$$

Ve şimdi σ kapsamındaki ifadeleri kısaltmak amacıyla

$$\triangle = \{(i,\, j) : 0 \le i \le n,\ n < i + j \le 2n\}$$

tanımını yapıp iki ifade arasındaki farka bakalım:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{y^i}{i!}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(x+y)^i}{i!}\right) = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{x^i y^j}{i!j!} - \sum_{0\le i+j\le n} \frac{x^i y^i}{i!j!}$$
$$= \sum_{(i,j)\in\triangle} \frac{x^i y^i}{i!j!}.$$

Görüldüğü ve denemelerimiz sonucu tahmin ettiğimiz gibi derecesi n'den küçükeşit olan terimler kayboldu ve geriye dereceleri $n+1$'den $2n$'ye kadar uzanan terimler kaldı.

Hesaplarımız sonunda bulduğumuz ifadenin mutlak değerinin ϵ'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız (belli bir N sayısından büyük olacak, işte o N'dir bulmak istediğimiz.)

Üçgen eşitsizliğinden,

$$\left|\sum_{\triangle} \frac{x^i y^j}{i!j!}\right| \le \sum_{\triangle} \frac{|x^i||y^j|}{i!j!}$$

bulunur. Dolayısıyla sağdaki terimi ϵ'dan küçük yapmalıyız ve dolayısıyla x ve y sayılarının pozitif olduklarını varsayabiliriz ve dolayısıyla mutlak değerleri kaldırabiliriz. (x ya da y sıfırsa yukardaki toplam da 0'dır ve kanıtlayacak bir şey kalmaz.) Bundan böyle, $x, y > 0$ sayıları için,

$$\sum_{\triangle} \frac{x^i y^j}{i!j!}$$

ifadesini (n'yi yeterince büyük alarak) ϵ'dan küçük yapmaya çalışacağız.

x ya da y sayılarından biri diğerinden büyükeşittir. Diyelim x, y'den büyükeşit olsun. O zaman,

$$\leq \sum_{\triangle} \frac{x^{i+j}}{i!j!}$$

ifadesi yukardaki ifadeden büyükeşittir. (Formülün başına koyduğumuz "$\leq$" simgesi, bir önceki formülden devam ediyoruz anlamına geliyor.) Demek ki bu son ifadeyi ϵ'dan küçük yapmalıyız. Bu son ifade de şuna eşit:

$$= \sum_{\triangle} \frac{(i+j)!}{i!j!} \frac{x^{i+j}}{(i+j)!} = \sum_{\triangle} \binom{i+j}{i} \frac{x^{i+j}}{(i+j)!}.$$

i ve j'yi n ile sınırlamazsak daha büyük bir ifade buluruz, yukardaki hesabı devam ettirelim:

$$\leq \sum_{n<i+j\leq 2n} \binom{i+j}{i} \frac{x^{i+j}}{(i+j)!}.$$

Şimdi bu son ifadeyi ϵ'dan küçük yapmalıyız. x^k'ların katsayılarını bir parantezde toparlayarak bu son ifadeyi şöyle de yazabiliriz:

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{2n} 2^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2x)^k}{k!}.$$

ϵ'dan küçük yapmamız gereken bu son ifadeye alıcı gözle bakalım. Bir şey anımsatıyor mu? ("Evet" deyin!) $\exp 2x$'e yakınsayan dizinin terimlerini anımsıyor musunuz? exp fonksiyonunun tanımını anımsatalım:

$$\exp(2x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!}.$$

Yani, terimleri

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!}$$

olan dizi yakınsak bir dizidir ($\exp 2x$'e yakınsar) ve yakınsak olduğundan bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden, öyle bir N vardır ki, her $m > n > N$ için,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(2x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!}$$

farkı ϵ'dan küçük olur. Eğer burada $m = 2n$ alacak olursak, her $n > N$ için,

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{(2x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!}$$

farkı, yani

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2x)^k}{k!}$$

toplamı ϵ'dan küçük olur. İstediğimiz en sonunda kanıtlanmıştır. □

Bu önemli teoremin önemli sonuçlarını irdelemeden önce kanıtına bir göz atalım. Kanıtta elde edilen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{y^i}{i!} \right) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(x+y)^i}{i!} \right) = 0$$

yakınsaklığın aslında gerçel sayılarla pek ilgili olmadığını gördünüz mü? x ve y'nin birer sayı olduklarını unutun ve bunları iki bilinmeyenli (ya da değişkenli) bir polinomun değişkenleri olarak görelim.

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{y^i}{i!} \right) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(x+y)^i}{i!}$$

ifadesini hesaplamak için yaptığımız işlemlere yakından bakacak olursanız, her $x^i y^j$ teriminin belli bir n'den sonra kaybolduğu görülecektir. Nitekim, exp fonksiyonu bambaşka uzaylarda da tanımlanacak ve bu bölümde kanıtladığımız

$$\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

eşitliği bu uzaylarda da geçerli olacaktır. Şimdi teoremin önemli sonuçlarını çıkaralım:

Sonuç 10.12. $\exp 0 = 1$ *ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ *olur.*

Kanıt: Birinci eşitlik aslında $\exp x$'in tanımından belli: Bu tanımda $x = 0$ almak yeterli.

İkinci sonuç bunun bir sonucu:

$$1 = \exp 0 = \exp(x - x) = \exp(x + (-x)) = (\exp x)(\exp(-x)).$$

Demek ki $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$. □

Sonuç 10.13. *Her* $x \in \mathbb{R}$ *için,* $\exp x > 0$. *Hatta eğer* $x \geq 0$ *ise* $\exp x \geq 1$, *yoksa* $0 < \exp x < 1$.

Kanıt: Eğer $x \geq 0$ ise, $\exp x$'in pozitif, hatta 1'den büyükeşit olduğu tanımından ve her şeyinden belli:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 1.$$

Bir başka kanıt: Eğer $x \geq 0$ ise,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \geq 1.$$

Eğer $x > 0$ ise, $-x > 0$ olduğundan, bu bulgudan ve Sonuç 10.12'den,

$$\exp x = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$$

çıkar. Kanıtlamamız gereken $\exp x < 1$ eşitsizliği de bundan çıkar. □

Sonuç 10.14. exp *kesin artan bir fonksiyondur, yani* $x < y$ *için* $\exp x < \exp y$ *olur.*

Kanıt: Teorem 10.11'den ve Sonuç 10.13'ten,

$$\exp y = \exp(x + (y - x)) = (\exp x)\exp(y - x) < \exp x$$

bulunur. □

Sonuç 10.15. *Her* $x \in \mathbb{R}$ *ve her* $q \in \mathbb{Q}$ *için* $\exp(qx) = (\exp x)^q$ *ve dolayısıyla* $\exp q = e^q$.

Kanıt: Önce q'nün bir doğal sayı olduğunu varsayalım. Bu durumda sonuç, q üzerine tümevarımla, teoremin doğrudan bir sonucu olan,

$$\exp((q+1)x) = \exp(qx + x) = \exp(qx)(\exp x)$$

eşitliğinden çıkar.

Şimdi $q \in \mathbb{Q}^{>0}$ olsun. $a, b \in \mathbb{N}$ için $q = a/b$ yazalım. O zaman, yukarda yapılana göre,

$$(\exp(qx))^b = \exp bqx = \exp ax = (\exp x)^a$$

olur ve exp hep pozitif olduğundan,

$$\exp(qx) = (\exp x)^{a/b} = (\exp x)^q$$

elde edilir.

$q \in \mathbb{Q}^{<0}$ durumu, bundan ve Sonuç 10.13'ten çıkar. Aynı sonuç Sonuç 10.9'dan da çıkar. □

Alıştırmalar

10.37. Bir kumarbaz kazanma şansının milyonda 1 olan bir oyunu 1 milyon kez oynuyor. Kumarbazın tek bir oyun bile kazanamama olasılığı aşağı yukarı kaçtır?

Okuma Parçası 1 : e Kesirli Bir Sayı Değildir

Başlıktaki önermeyi kanıtlayacağız. Aslında bu önermeden çok daha güçlü bir önerme doğrudur: e sayısı sadece kesirli olmamakla kalmaz, ***cebirsel*** bir sayı bile değildir, yani hiçbir $n \geq 1$ ve $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ için,

$$a_0 + a_1 e + \cdots + a_i e^i + \cdots + a_{n-1} e^{n-1} + e^n = 0$$

eşitliği sağlanmaz. Cebirsel olmayan sayılara ***aşkın sayılar*** denir. e'nin aşkınlığını 1873'te Charles Hermite kanıtlamıştır ve e, tarihte aşkın olduğu kanıtlanan ilk sayıdır. π'nin aşkınlığını daha sonra, 1882'de Ferdinand von Lindemann kanıtlamıştır. Ama Hermite'in teoremini kanıtlamak çok zor olduğundan, biz sadece başlıktaki önermeyi kanıtlamakla yetineceğiz.

Teorem 10.16. *e kesirli bir sayı değildir.*

Kanıt: Sonuç 10.9'da kanıtladığımız

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = e$$

eşitliğini kullanacağız. e'nin kesirli bir sayı olduğunu ve p ve q pozitif doğal sayıları için p/q sayısına eşit olduğunu varsayalım. Demek ki,

$$q!e = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{q!}{i!} = q! + \frac{q!}{1!} + \cdots + \frac{q!}{q!} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=q+1}^{n} \frac{q!}{i!}$$

olur. Hem $q!e$ hem de eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplamlar doğal sayı olduklarından, kuyruktaki

$$R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=q+1}^{n} \frac{q!}{i!}$$

limiti de bir doğal sayıdır. Toplamdaki terimleri sadeleştirsek,

$$R = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=q+1}^{n} \frac{1}{(q+1)\cdots(q+j)}$$

sayısının bir doğal sayı olduğunu buluruz. Ama $j > 1$ için,

$$\frac{1}{(q+1)\cdots(q+j)} < \frac{1}{(q+1)^j}$$

olduğundan,

$$R \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(q+1)^j}$$

olmalı. Sağ taraftaki limiti hesaplamayı biliyoruz (bkz. Teorem 6.2):

$$R \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(q+1)^j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{q+1}\right)^j$$
$$= \frac{1}{q+1} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{q+1}\right)^j = \frac{1}{q+1} \frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} < 1.$$

R pozitif doğal sayısının 1'den küçük olduğunu kanıtladık! Daha neler! □

Biraz Tarih. Lindemann aslında e sayısıyla ilgili çok daha genel bir teorem kanıtlamıştır: Eğer $0 \neq \alpha$ cebirselse (yani katsayıları $\mathbb{Q}$'da olan ve 0 olmayan bir polinomun köküyse), e^α sayısı aşkındır (yani cebirsel değildir). Kanıtlamadığımız ve bu ders notlarında kanıtlamayacağımız (ama kitabı çok değil yirmi sayfa daha uzatarak kanıtlayabileceğimiz) meşhur Euler eşitliğine göre $e^{i\pi} = -1$ olduğundan, $i\pi$ cebirsel olamaz, dolayısıyla π de cebirsel olamaz...

Bundan da, sadece çentiksiz cetvel ve pergel kullanarak, verilmiş bir dairenin alanına eşit bir karenin çizilemeyeceği çıkar...

Madem ki e ve π cebirsel değiller, o zaman $e+\pi$ ve $e\pi$ sayılarının her ikisi birden cebirsel olamazlar, yoksa, hem e hem de π,

$$x^2 - (e+\pi)x + e\pi = 0$$

denklemini sağlarlardı ve her ikisi birden cebirsel olurlardı... Tabii bu akıl yürütme, $e+\pi$ ya da $e\pi$ sayılarından hangisinin aşkın olduğunu söylemiyor. Her ikisi birden de aşkın olabilirler ve muhtemelen de öyleler.

1897'de ABD'nin İndiana eyaleti az kaldı π'yi kesirli bir sayı olarak kabul eden bir yasa çıkarıyordu. Rastlantı eseri o anda mecliste bulunan bir matematikçi rezaleti engellemiştir.

Okuma Parçası 2 : Bileşik Faizler

Bankaya A lira yatırdığınızı ve bankanın yüzde yüz faiz verdiğini düşünün. Bir yıl sonunda bankada $2A$ liranız olur. Eğer banka %15, yani 0,15 faiz verseydi, o zaman yıl sonunda bankada $A + 15A/100$ liranız olurdu, ilk yatırdığınız A lira ve buna ilaveten faizden gelen $15A/100$. Bankanın yıllık faizi x ise, (%100 faiz $x = 1$ demektir) bir yıl sonra paranız Ax artar ve toplam

$$A + Ax = A(1+x)$$

kadar paranız olmuş olur. Paranızı bankadan çekmez de, faiziyle birlikte bir yıl daha bekletirseniz, o zaman ikinci yılın faizi bu $A(1+x)$ üstünden hesaplanır ve ikinci yılın sonunda

$$A(1+x)(1+x) = A(1+x)^2$$

kadar paranız olur. Faizine hiç dokunmadan parayı bankada n yıl bırakırsanız ve faiz bu n yıl içinde değişmezse, n yıl sonra bankada,

$$A(1+x)^n$$

liranız birikmiş olur.

Şimdi de bankanın faizi müşterilerine altı ayda bir ödediğini varsayalım. O zaman, altı ay sonra bankadaki paranız

$$A\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

lira olur, çünkü yıllık faiz x ise, altı aylık faiz bunun yarısı kadar, yani $x/2$'dir. Eğer bu para bir sonraki altı ay boyunca da bankada işletilirse, o zaman bankadan x'ten daha fazla yıllık faiz alırsınız, çünkü banka, ikinci altı ayda ilk altı ay sonunda verdiği faize de faiz işleyecektir. Böylece yıl sonunda paranız

$$A\left(1+\frac{x}{2}\right)^2$$

lira olur ki bu da elbette yıllık ödenen x faizden daha fazla para getirir.

Ya faiz üç ayda bir ödenirse? O zaman bir yıl sonra,

$$A\left(1+\frac{x}{4}\right)^4$$

liranız olur. Eğer faiz her ay ödenirse ve anaparaya ve faizine hiç dokunmazsanız, yıl sonunda,

$$A\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12}$$

kadar paranız olur. Faiz günlük de ödenebilir ve o zaman bankada yıl sonunda

$$A\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365}$$

kadar paranız birikir. Genel olarak, eğer faizler yılda n kez ödenirse, o zaman yıl sonunda

$$A\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

kadar paranız birikir. Şimdi, yıl başında 1 liranızın ($A = 1$) ve faizin %100 ($x = 1$) olduğunu varsayalım. O zaman yıl sonunda bankada

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

liranız olur. n ne kadar büyükse, yani banka faizi ne kadar sık öderse, yıl sonunda bankada biriken paranız o kadar artar. n'yi sonsuza götürürsek, e buluruz. Yani banka paranızı %100 faizle işletirse ve faizi her an öderse, o zaman yıl sonunda,

$$e = 2{,}71828\ldots$$

liranız olur. Faizin ne kadar sıklıkla ödendiği pek büyük bir fark yaratmıyor:

Yıllık:	2	10 günlük:	2,68200
6 aylık:	2,25	5 günlük:	2,699894
3 aylık:	2,44141	1 günlük:	2,71457
1 aylık :	2,61304	sürekli:	2,71828

Okuma Parçası 3 : e Sayısının Değişik Gösterimleri

e sayısının çeşitli gösterimlerini kanıtlamadan yazacağız. Okur kendi başına kanıtlamaya çalışabilir ve çalışmalıdır.

Aşağıda, $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ ifadesi,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i$$

anlamına kullanılacaktır. Önce bildiklerimizi yazalım.

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^i}{i!}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Benzer eşitlikler:

$$\begin{aligned} e &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1-2i}{(2i)!}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i+1}{i!} = 2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i+1}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{3-4i^2}{(2i+1)!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{9i^2+1}{(3i)!} = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{4i+3}{2^{2i+1}(2i+1)!}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^2}{2\cdot i!} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^3}{5\cdot i!} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^4}{15\cdot i!}. \end{aligned}$$

Bu tür eşitlikler çoğaltılabilir.

Bir başka türden belki ama gene de standart sayılabilecek bir eşitlik:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\right].$$

n-inci ***Bell sayısı***, n elemanlı bir kümenin toplam parçalanış sayısıdır, yani küme üzerindeki değişik denklik ilişkisi sayısıdır. (Bu ad ünlü İskoç matematikçi yazar Eric Temple Bell'in (1883-1960) onuruna verilmiştir.) Örneğin, $n = 3$ ise, $\{1, 2, 3\}$ kümesinin parçalanışları,

$$\begin{aligned} &\{1,2,3\}; \\ &\{1\},\ \{2,3\}; \\ &\{2\},\ \{1,3\}; \\ &\{3\},\ \{1,2\}; \\ &\{1\},\ \{2\},\ \{3\} \end{aligned}$$

olmak üzere 5 tanedir, yani $p_3 = 5$. İlk Bell sayıları şöyledir:

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975.$$

Bell sayıları arasında kanıtlaması oldukça kolay olan şu ilişki vardır:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

Biraz önce verdiğimiz eşitlikler şöyle genelleştirilebilir:

$$e = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{B_{n-1} i!}.$$

Peki ya şu Dobinski formülüne ne demeli?

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}.$$

Şimdi tuhaf bir eşitlik verelim. p_k, k-inci asal olsun. Örneğin $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ vs. Eğer $n \geq 2$ bir doğal sayıysa, $n\sharp$, n'den küçükeşit asalların çarpımı olsun. Örneğin,

$$p_4\sharp = 7\sharp = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210.$$

Şimdi çarpıcı eşitliği verebiliriz:

$$e = \lim_{n \to \infty} (p_n\sharp)^{1/p_n}.$$

Bir sonraki okuma parçasından, e'nin neden ilginç bir sayı olduğu bir kez daha gün yüzüne çıkacak. Buna bağlantılı olarak: $1/n$ kazanma olasılığıyla kumar oynayan bir kumarbazın n kez oynadığında hiç kazanmama olasılığı, n büyük olduğunda, yaklaşık $1/e$'dir.

İlk Görünüşe Aldanma! $f(n) = [e^{(n-1)/2}] + 1$ olsun. Buradaki $[x]$, x'in tamkısmını ifade etmektedir. $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(9)$ değerleri şöyledir:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55;$$

yani Fibonacci dizisinin ilk sayıları. Ama bir sonraki değer $f(10) = 144$ olur! Demek ki neymiş? İlk görünüşe aldanmamak lazımmış!

Okuma Parçası 4 : Yer Bulma Olasılığı

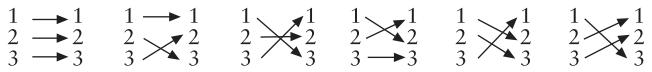
Kendi adlarını okuyacak kadar bile okuma yazması olmayan n kişi bir ziyafete davet edilmişler. Davet eden kişi, davet edilenlerin okuma yazma bilmediğini tahmin edemediğinden, ziyafet masasındaki yerleri belirlemek için konukların adlarını bir kartona yazıp tabaklarının üstüne koymuş. Hiçbir şeyin farkında olmayan ve varmayan konuklar masaya rasgele yerleşmişler. En az bir kişinin doğru yere oturma olasılığı kaçtır?

Yanıtı önce küçük n'ler için bulalım. Belki bir fikir verir. (Acemice bir yaklaşım!)

$n = 1$ ise, gelen tek davetlinin yanlış yapma ihtimali yoktur, mecburen kendisine ayrılan yere oturacaktır. Bu durumda en az bir kişinin doğru yere oturma olasılığı 1'dir.

$n = 2$ ise, ya ikisi de doğru ya da ikisi de yanlış oturacaklardır; olasılık %50, yani 1/2'dir.

$n = 3$ ise çeşitli yerleşme biçimlerini çizelim. Sol tarafa kişileri 1, 2, 3 diye yazalım, sağ tarafa da kartonda yazan adları. Ok da kişinin oturduğu yerin kartonunu göstersin. İşte 6 durum:



Sadece ilk 4 yerleşmede en az bir kişi doğru oturmuş. Son iki yerleşmede herkes yanlış yere oturmuş. Demek ki en az bir kişinin doğru yere oturma olasılığı 4/6, yani 2/3. Olasılık bu sefer arttı.

Şimdi $n = 4$ olsun. Yukardaki gibi şekil yaparsak, çok uzar, işin içinden çıkamayız. Yerleşimleri daha cebirsel bir biçimde simgeleme yöntemi bulmalıyız. Yukardaki 6 yerleşimi şöyle gösterelim:

(1)(2)(3) (1)(23) (13)(2) (12)(3) (123) (132)

Örneğin (123) yerleşimi, 1 numaralı konuk 2 numaralı iskemleye, 2 numaralı konuk 3 numaralı iskemleye ve 3 numaralı konuk 1 numaralı iskemleye oturuyor demektir. (13)(2) ise 1 numara 3 numaranın yerine, 3 numara 1 numaranın yerine oturmuş ve 2 numara da kendi yerine oturmuş demektir. Kendi numarasına oturanları hiç göstermesek de olur. O zaman (13)(2) yerine kısaca (13) yazabiliriz. Herkesin kendi yerine oturduğu durumu da Id olarak gösterelim.

Bu anlaşmayla $n = 4$ için tüm durumları teker teker yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Id},\\
&(12), (13), (14), (23), (24), (34),\\
&(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243),\\
&(12)(34), (13)(24), (14)(23),\\
&(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432).
\end{aligned}$$

Sadece ilk üç satırda en az bir kişi kendi yerine oturmuş, yani toplam 24 durumun 15'inde. Olasılık bu sefer $15/24 = 5/8$ bulunur. Bir önceki olasılıktan daha düşük.

Bir de $n = 5$ için bulalım ama bu sefer daha çabuk olalım. (Bu, matematik yapalım demektir!) En az 1 kişinin doğru yerleştiği yerleşimleri sayalım:

Id: 1 tane.

Tipi (12) olan yerleşimler, yani tam 3 kişinin doğru yere oturduğu yerleşimler, bunlardan toplam

$$\binom{5}{2} = 10$$

tane var.

Tipi (123) olan yerleşimler, yani tam 2 kişinin doğru yere oturduğu yerleşimler, toplam

$$\binom{5}{3} \times 2 = 20$$

tane.

Tipi (12)(34) olan yerleşimler, toplam

$$\frac{\binom{5}{2} \times \binom{3}{2}}{2} = 15$$

tane.

Tipi (1234) olan yerleşimler, toplam

$$\binom{5}{4} \times 3! = 30$$

tane.

Demek ki

$$1 + 10 + 20 + 15 + 30 = 76$$

değişik yerleşimde en az 1 kişi kendine ayrılan yere oturuyor. Toplam yerleşme sayısı da $5! = 120$ olduğundan, bu durumda olasılık $76/120 = 19/30$'dir. Bu sefer olasılık arttı, çünkü

$$\frac{5}{8} < \frac{19}{30}.$$

Bulduğumuz olasılıkları teker teker yazalım:

$$\begin{aligned}
&n = 1 \text{ için } 1,\\
&n = 2 \text{ için } 1/2,\\
&n = 3 \text{ için } 4/6,\\
&n = 4 \text{ için } 15/24,\\
&n = 5 \text{ için } 76/120.
\end{aligned}$$

Sanki hiçbir kural ya da formül yok... Var ama. Bulacağız. En azından paydaya $n!$ koyabileceğimiz belli! Bunun nedeni çok bariz olmalı: Toplam yerleşme sayısı $n!$ çünkü ne de olsa n kişi ve n yer var, dolayısıyla n elemanlı bir kümenin eşlemeleri söz konusu. Bu toplam $n!$ tane eşlemenin kaçının en az bir elemanı sabitlediğini bulmalıyız. Bu sayıyı $n!$ sayısına böldüğümüzde istediğimiz olasılığı buluruz.

$\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin eşleşmelerinden oluşan kümeye S_n diyelim. $|S_n| = n!$ olduğunu biliyoruz.

T_i, S_n'nin, i sayısını sabitleyen eşlemelerinden oluşan küme olsun. Örneğin eğer $n = 4$ ve $i = 2$ ise,

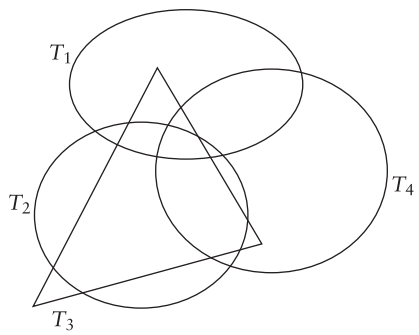
$$T_2 = \{\mathrm{Id}, (13), (14), (34), (134), (143)\}$$

olur. $|Ti| = (n-1)!$ çünkü T_i kümesi, $n-1$ tane elemanı olan $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ kümesinin eşlemelerinden oluşur.

Hesaplamak istediğimizin,

$$\bigcup_{i=1}^{n} T_i$$

kümesinin eleman sayısı olduğuna dikkatinizi çekerim. T_i'lerin bir resmi aşağıda.



Eğer değişik i'ler için T_i kümeleri kesişmeseydi, bu birleşimin eleman sayısı tam tamına T_i kümelerinin eleman sayısının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{n} |T_i|$$

olurdu. ($|T_i| = (n-1)!$ olduğundan, bu toplam tam $n!$ olur.) Ama maalesef T_i'ler kesişiyorlar.

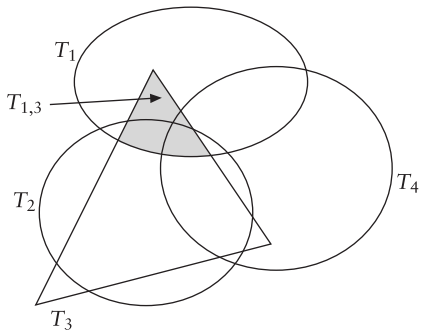
$T_{i,j}$, hem i'yi hem de j'yi sabitleyen eşlemelerin kümesi olsun, yani,

$$T_{i,j} = T_i \cap T_i,$$

olsun. Eğer $i \neq j$ ise,

$$|T_{i,j}| = (n-2)!$$

olur.



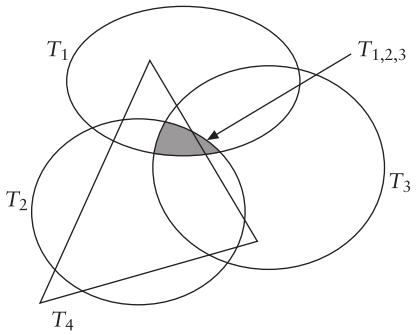
Bu tanımı genelleştirelim. $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ göstergeçleri için, $T_{i_1,\ldots,i_k}$ kümesi S_n'nin $i_1, \ldots, i_k$ sayılarını sabitleyen eşlemelerinden oluşan küme olsun. Yani

$$T_{i_1,\ldots,i_k} = T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_k}$$

olsun. Eğer $i_1, \ldots, i_k$ sayıları birbirinden değişikse,

$$|T_{i_1,\ldots,i_k}| = |S_{n-k}| = (n-k)!$$

olur.



Elbette, örneğin, $T_{1,4,2} = T_{4,1,2} = T_{2,4,1} = T_{1,2,4}$. Bundan böyle $T_{i_1,\ldots,i_k}$ yazılımını sadece

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$$

eşitsizliğini sağlayan $i_1, i_2, \ldots, i_k$ göstergeçleri için kullanacağız.

T_i'lerin birleşiminin eleman sayısını bulmak için [N1]'de kanıtladığımız İçindelik-Dışındalık Teoremi'ni kullanacağız:

$$\left|\bigcup_i T_i\right| = \sum_i |T_i| - \sum_{i_1<i_2} |T_{i_1,i_2}| + \sum_{i_1<i_2<i_3} |T_{i_1,i_2,i_3}| - \cdots$$

yani

$$\left|\bigcup_i T_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sum_{1\le i_1\le \ldots \le i_k \le n} |T_{i_1,\ldots,i_k}| \right).$$

Bu teoremi durumumuza uygulayalım. Eğer

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$$

ise, göstergeçler birbirinden değişik olacağından,

$$|T_{i_1,\ldots,i_k}| = |S_{n-k}| = (n-k)!$$

eşitliğini biliyoruz. Ayrıca her $k = 1, \ldots, n$ için, tam

$$\binom{n}{k}$$

tane $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ eşitsizliğini sağlayan

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

kümesi olduğunu biliyoruz. demek ki,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

olur. Bu sayıyı daha tıkız bir biçimde hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

buluruz. Demek ki, hesaplamak istediğimiz olasılık,

$$\frac{|\bigcup_{i=1}^{n} T_i|}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

olur. İstediğimizi bulduk.

Ancak, n çok büyükken, örneğin $n = 1000$ iken ya da $n = 1.000.000$ iken bu sayıyı hesaplamak çok zordur. Matematikçiler bu gibi durumlarda n'yi sonsuza götürürler ki n çok büyükken yaklaşık bir değer bulunabilsin. Aynı şeyi faiz hesaplarında da yapmıştık. Yukarda n'yi sonsuza götürürsek e^{-1} buluruz (bkz. Sonuç 10.9).

Teorem 10.17. *Rastgele eşlenen n çiftten en az birinin kendi eşiyle eşlenme olasılığı, n sonsuza giderken $1/e$'ye yakınsar, yani n çok büyükken bu olasılık yaklaşık $1/e$'dir.* □