9. Sınırlı Diziler

9.1 Büzen Diziler

$r \in (-1, 1)$ iken, hem

$$(r^n)_n$$

dizisinin hem de

$$(1 + r + \cdots + r^n)_n$$

dizisinin yakınsaklığını Bölüm 6'da kanıtlamıştık. Bu iki dizinin ortak bir özelliğini ortaya çıkaralım: Önce birinci diziyi ele alalım.

$$x_n = r^n$$

ise, o zaman,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|r^{n+2} - r^{n+1}\right| = |r| \left|r^{n+1} - r^n\right| = |r| \, |x_{n+1} - x_n|$$

olur. Şimdi ikinci diziye bakalım. Bu sefer,

$$x_n = 1 + r + \cdots + r^n$$

olsun. O zaman da

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|r^{n+2}\right| = |r| \left|r^{n+1}\right| = |r||x_{n+1} - x_n|$$

olur. Her iki durumda da

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |r||x_{n+1} - x_n|$$

elde ettik. Aslında bu iki dizinin yakınsamasını bu eşitliğe borçluyuz, hatta bundan daha zayıf bir koşul olan,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq |r||x_{n+1} - x_n|$$

eşitsizliğine borçluyuz. Bu özelliği sağlayan dizilere, "ardışık terimler arasındaki mesafe belli bir orandan daha az büzülüyor" anlamında, ***büzen dizi*** adı verilir.

Tanım. $(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi olsun. Eğer sabit bir $r \in (0,1)$ sayısı için,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \le r|x_{n+1} - x_n|$$

her n için sağlanıyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***büzen dizi***, r'ye ***büzme katsayısı*** denir. Eğer bu eşitsizlik yeterince büyük n'ler için sağlanıyorsa, diziye ***zamanla büzen dizi*** denir. Zamanla büzüşen dizilerin yakınsak olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 9.1. *Zamanla büzen bir dizi yakınsaktır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ büzen bir dizi olsun. (Zamanla büzen dizilerin yakınsaklığının kanıtı aynıdır.) Dizinin Cauchy dizisi olduğunu kanıtlayacağız ve böylece teorem kanıtlanmış olacak.

$\epsilon > 0$ ve $n > m$ olsun.

$$|x_n - x_m| \le \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için m'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız ama önce bir k göstergeci için,

$$|x_{k+1} - x_k|$$

teriminin ne kadar küçük olabileceğini bulmaya çalışalım.

$$|x_{k+1} - x_k| \le r\,|x_k - x_{k-1}|,$$

ve

$$|x_k - x_{k-1}| \le r\,|x_{k-1} - x_{k-2}|$$

eşitsizliklerinden,

$$|x_{k+1} - x_k| \le r^2\,|x_{k-1} - x_{k-2}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ve

$$|x_{k-1} - x_{k-2}| \le r\,|x_{k-2} - x_{k-3}|$$

eşitsizliğinden,

$$|x_{k+1} - x_k| \le r^3\,|x_{k-2} - x_{k-3}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Tümevarımla, kolaylıkla, her $\ell = 1, 2, \ldots, k$ için,

$$|x_{k+1} - x_k| \le r^\ell\,|x_{k-\ell+1} - x_{k-\ell}|$$

eşitsizliğini ve $\ell = k$ için de,

$$|x_{k+1} - x_k| \le r^k\,|x_1 - x_0|$$

eşitsizliğini buluruz. Dizinin Cauchy olduğunu göstermek için, her k için geçerli olan bu son eşitsizliği kullanacağız. Fazla kalabalık etmemesi için,

$$|x_1 - x_0|$$

yerine a yazalım. Demek ki,

$$|x_{k+1} - x_k| \leq r^k a$$

eşitsizliği doğrudur. r, 0 ile 1 arasında bir sayı olduğu için k çok büyük olduğunda $r^k a$'nın çok küçük olduğuna dikkatinizi çekeriz. Şimdi $n > m$ için $|x_n - x_m|$ terimini küçültmeye geçebiliriz. Bu terimin ϵ'dan küçük olması için m'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız.

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= |(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{m+1} - x_m)| \\
&\leq |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\
&\leq r^{n-1}a + \cdots + r^m a = (r^{n-1} + \cdots + r^m)a \\
&= r^m(r^{n-m-1} + \cdots + 1)a = r^m \frac{1 - r^{n-m}}{1 - r} a \leq a\frac{r^m}{1 - r}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden dolayı,

$$a\frac{r^m}{1 - r}$$

terimini ϵ'dan küçük yapmak yeterli. Bunun için de,

$$r^m \leq \frac{\epsilon(1 - r)}{a}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Ama $(r^m)_m$ dizisinin 0'a yakınsadığını bildiğimizden, öyle bir N vardır ki, bu N'den büyük m'ler için, $r^m \leq \epsilon(1 - r)/a$ eşitsizliği sağlanır ve bu da kanıtı tamamlar. □

Örnek 9.1. Bu önemli teoremin bir uygulamasını verelim hemen. $a \geq 0$ ise $\sqrt{a}$'ya yakınsayan bir dizi bulalım.

a herhangi bir gerçel sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin terimlerini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$(*) \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + a}{x_n + 1}$$

Bu tanım sayesinde, eğer doğru bir x_0 değeri verilmişse, tüm x_n'leri hesaplayabiliriz. Ama bazı x_0 değerleri için dizi sonsuza dek hesaplanamaz. Örneğin, $x_0 = -1$ için x_1 hesaplanamaz olur. Ya da

$$x_0 = -\frac{a + 1}{2}$$

için $x_1 = -1$ olur ve bu sefer de x_2 hesaplanamaz olur. Dizinin sonsuza dek hesaplanamayacağı x_0 değerleri olsa da, dizinin sonsuza dek hesaplanabileceği sonsuz sayıda x_0 değeri vardır. Örneğin eğer a pozitifse, x_0'ı pozitif seçersek dizinin tüm terimleri pozitif olur, dolayısıyla hiçbir terimi -1 olamaz, dolayısıyla böyle bir seçimle dizinin tüm terimleri hesaplanabilir.

Eğer bu dizi yakınsaksa, limiti ancak $\sqrt{a}$ olabilir. Nitekim eğer dizinin limiti x ise, $(*)$ eşitliği bize, Teorem 5.4'ten dolayı

$$x = \frac{x+a}{x+1}$$

verir. Paydayı eşitleyerek ve sadeleştirerek

$$x^2 = a$$

buluruz. Demek ki eğer $a < 0$ ise $(*)$ dizisi (x_0 ne olursa olsun) yakınsak olamaz; dolayısıyla Cauchy de olamaz. Öte yandan eğer $a \geq 0$ ise, bundan, dizinin -eğer yakınsaksa- karesi a olan bir sayıya, yani ya $\sqrt{a}$ ya da $-\sqrt{a}$'ya yakınsadığı anlaşılır.

Bundan böyle a'nın pozitif olduğunu varsayacağız. Ayrıca $x_0 \geq 0$ varsayımını da yaparak dizinin tanımlı olup olmaması sorunuyla muhattap olmak zorunda kalmayacağız.

Eğer $a = 1$ ise, ilk terimden sonra 1 olarak sabitleşen bir dizi elde ederiz ki bu da pek ilginç bir dizi değil, ayrıca Cauchy olduğu da çok belli. Dolayısıyla bundan böyle $a \neq 1$ varsayalım.

Şimdi $|x_{n+2} - x_{n+1}|$ ile $|x_{n+1} - x_n|$ arasındaki büzüşme ilişkisini bulmaya çalışalım. Kolay bir hesapla,

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left|\frac{x_{n+1}+a}{x_{n+1}+1} - \frac{x_n+a}{x_{n+1}}\right| = \left|\frac{(a-1)(x_n - x_{n+1})}{(x_{n+1}+1)(x_n+1)}\right| \\ &= \left|\frac{(a-1)(x_n - xn + 1)}{2x_n + a + 1}\right| = \frac{|a-1|}{2x_n+a+1}|x_{n+1} - x_n| \end{aligned}$$

elde ederiz. Demek ki,

$$\frac{|a-1|}{2x_n+a+1}$$

terimine yoğunlaşmamız gerekiyor. Bu terimin her zaman 1'den küçük olduğunu göstermek yetmez, bu terimin, n ne olursa olsun, 1'den küçük **aynı** r sayısından küçük olduğunu göstermek gerekir. Şimdi bunu yapalım.

İki değişik durumu ele alacağız: $1 < a$ ve $1 > a$ durumlarını.

Eğer $1 < a$ ise, kolaylıkla $1 < x_n$ eşitsizliği kanıtlanır, buradan da,

$$\frac{|a-1|}{2x_n+a+1} = \frac{1-a}{2x_n+a+1} < \frac{1-a}{2+a+1} = \frac{1-a}{a+3} < 1$$

elde ederiz.

Eğer $1 > a$ ise, kolaylıkla $a < x_n$ eşitsizliği kanıtlanır, buradan da,

$$\frac{|a-1|}{2x_n+a+1} = \frac{a-1}{2x_n+a+1} < \frac{a-1}{2a+a+1} = \frac{a-1}{3a+1} < 1$$

elde ederiz. Demek ki, r'yi,

$$r = \begin{cases} \frac{a-1}{a+3} & \text{eğer } 1 < a \text{ ise} \\ \frac{1-a}{1+3a} & \text{eğer } 1 > a \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlarsak, o zaman $0 < r < 1$ ve

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq |r||x_{n+1} - x_n|$$

olur. Sonuç: Dizi büzüşen bir dizidir; dolayısıyla yakınsar. Dizinin hangi sayıya yakınsadığını biliyoruz: $\sqrt{a}$'ya.

Alıştırmalar

9.2. $x_{n+1} = 6 - 1/x_n$ ve $x_0 = 1$ olsun. Her $n \geq 1$ için x_n'nin tanımlandığını ve $x_n \geq 5$ eşitsizliğini kanıtlayın; ayrıca $x_n \leq 6$ eşitsizliğini kanıtlayın.

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{25}\,|x_n - x_{n-1}|$$

($n \geq 1$) eşitsizliğini kanıtlayın. $(x_n)_n$ dizisinin limitini bulun.

9.3. Fibonacci dizisini ele alalım: $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ ve $x_0 = x_1 = 1$. Ve

$$y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

olsun.

$$y_{n+1} = \frac{1}{y_n} + 1$$

ve $y_0 = 1$ eşitliklerini gözlemleyin. Her n için $1 \leq y_{n+1} \leq 2$ eşitsizliklerini kanıtlayın. $|y_{n+1} - y_n|$ sayıları arasında bir önceki alıştırmadaki gibi bir eşitsizlik bulun. $(y_n)_n$ dizisinin limitini hesaplayın.

9.4. Her n için $|a_n| \leq 3$ ve $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq |a_{n+1}^2 - a_n^2|/7$ olsun. $(a_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

9.5. $s \geq 0$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları verilmiş olsun. Her $n \geq 0$ için

$$x_{n+1} = \sqrt{s + x_n}$$

tanımını yapalım. Bu diziyi Örnek 7.14'te de incelemiştik. O alıştırmayı tekrar gözden geçirerek dizinin büzen olup olmadığını inceleyin.

9.2 Kapalı Kutular Teoremi

Bu altbölümde, birbiri içine geçmiş kapalı aralıkların kesişiminin boşküme olamayacağını kanıtlayacağız.

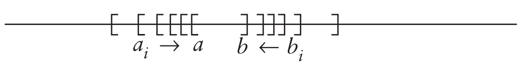
Teorem 9.2 (Kapalı Kutular Teoremi I). *$(a_i)_i$ ve $(b_i)_i$, her $i < j$ için,*

$$a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i$$

eşitsizliklerini sağlasın. O zaman $\bigcap_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i]$ kesişimi boş değildir. Ayrıca,

$$\lim_{i\to\infty} a_i \text{ ve } \lim_{i\to\infty} b_i$$

limitleri vardır ve limitlere sırasıyla a ve b dersek, $a \leq b$ ve $\bigcap_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i] = [a, b]$ olur. Dahası, eğer $\lim_{i\to\infty}(a_i - b_i) = 0$ ise, $a = b$ olur ve kesişim tek bir noktadan ibarettir.



Kanıt: $(a_i)_i$ dizisi artan ve her b_i tarafından üstten sınırlıdır. Bundan da $(a_i)_i$ dizisinin limiti olduğu çıkar. Eğer a bu limitse,

$$a_i \leq a \leq b_i$$

olur. Demek ki $(b_i)_i$ dizisi azalan olduğu gibi aynı zamanda a tarafından da alttan sınırlıdır. Dolayısıyla

$$a \leq b \leq b_i$$

olmak zorunda. Bu ikisini bir araya getirirsek,

$$a_i \leq a \leq b \leq b_i$$

buluruz. Demek ki $a \leq x \leq b$ eşitsizliklerini sağlayan her x tüm $[a_i, b_i]$ aralıklarındadır, yani

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i]$$

olur. Şimdi diğer tarafı kanıtlayalım. x tüm $[a_i, b_i]$ aralıklarında olsun. O zaman,

$$a_i \leq x \leq b_i$$

olur ve tarafların limiti alındığında, Sandviç Teoremi'nden (Teorem 5.1),

$$a \leq x \leq b$$

bulunur, yani $x \in [a, b]$.

Eğer $\lim_{i\to\infty}(a_i - b_i) = 0$ ise, elbette $a = b$ olur ve kesişimde tek bir sayı vardır. □

Bu teoremden daha genel bir teorem kanıtlayabiliriz. Yukarda sayılabilir sayıda aralık aldık, oysa buna gerek yoktu:

Teorem 9.3 (Kapalı Kutular Teoremi II). *$(K_i)_{i\in I}$ bir kapalı aralıklar ailesi olsun ve her $i, j \in I$ için ya $K_i \subseteq K_j$ ya da $K_j \subseteq K_i$ olsun. O zaman $\bigcap_{i\in I} K_i$ kesişimi boş değildir.*

Kanıt: $K_i = [a_i, b_i]$ olsun. Her $i, j \in I$ için, ya $K_i \subseteq K_j$ ya da $K_j \subseteq K_i$ ol-duğundan,

$$\text{ya } a_j \leq a_i \leq b_i \leq b_j \text{ ya da } a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i$$

olur. Ama her durumda, $a_i \leq b_j$ olur. Demek ki

$$\{a_i : i \in I\}$$

kümesi üstten her b_j tarafından üstten sınırlıdır. Dolayısıyla, $\{a_i : i \in I\}$ kümesinin en küçük üstsınırı, yani $\sup\{a_i : i \in I\}$ sayısı vardır ve bu en küçük üstsınıra a dersek, her $j \in I$ için

$$a \le b_j$$

olur. Demek ki

$$\{b_j : j \in I\}$$

kümesi alttan a tarafından alttan sınırlıdır. Dolayısıyla, $\inf\{b_j : j \in I\}$ vardır ve bu en büyük altsınıra b dersek, $a \le b$ olur. Bundan da, her $i, j \in I$ için,

$$a_i \le a \le b \le b_j$$

eşitsizlikleri çıkar. Demek ki, her $i \in I$ için $[a, b] \subseteq K_i$ ve sonuç olarak,

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{i \in I} K_i$$

olur. Şimdi diğer tarafı kanıtlayalım. x, kesişimde olsun. O zaman her $i \in I$ için,

$$a_i \le x \le b_i$$

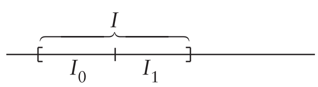
olur. Bundan da $a \le x \le b$ çıkar. □

9.3 Bolzano-Weierstrass Teoremi

Ünlü Bolzano-Weierstrass Teoremi sınırlı her dizinin yakınsak bir altdizisi olduğunu söyler. Değişik türden ve daha genel ifadeleri de vardır. Klasik analizin temel teoremlerinden biridir. Bu bölümde bu teoremin birkaç değişik kanıtını göstereceğiz. (Daha önce sayfa 148'daki Alıştırma 25'te bunun bir kanıtını göstermiştik.)

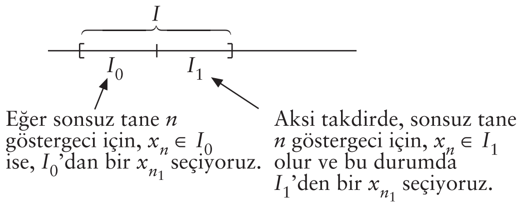
Teorem 9.4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sınırlı bir dizinin yakınsak bir altdizisi vardır.*

Birinci (Standart) Kanıt: $(x_n)_n$, sınırlı bir dizi olsun. Dizinin bir I aralığında olduğunu varsayalım. I aralığını tam ortasından ikiye bölüp sol ve sağ parçalarına bakalım. Bu parçalara I_0 ve I_1 diyelim.

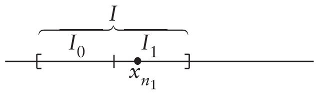


I_0 ve I_1 parçalarının yarıaçık ya da kapalı aralıklar olması önemli değil, her ikisinin de kapalı olduklarını varsayalım.

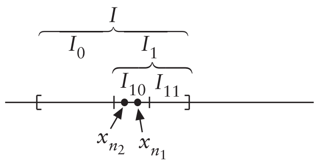
Eğer sonsuz sayıda n göstergeci için, x_n terimi I_0'daysa, I_0'dan bir x_{n_1} terimi seçelim.



Eğer aksine, $x_n \in I_0$ özelliğini sağlayan sonlu sayıda n göstergeci varsa, o zaman sonsuz sayıda n göstergeci için, x_n terimi I_1'dedir ve bu durumda x_{n_1} elemanını I_1 aralığından seçelim. Diyelim x_{n_1} elemanını I_1 aralığından seçtik. Bu eleman, kanıtın sonunda bulacağımız yakınsak altdizinin ilk terimi olacak.



Şimdi bir sonraki x_{n_2} elemanını seçeceğiz. Bunun için I_1 aralığını tam ortadan ikiye bölelim. Bu aralıklara I_{10} ve I_{11} adını verelim. Eğer sonsuz sayıda n göstergeci için, x_n terimi I_{10}'daysa, I_{10} aralığından, $n_0 < n_1$ olacak şekilde bir x_{n_1} terimi seçelim. Eğer aksine, $x_n \in I_{10}$ özelliğini sağlayan sonlu sayıda n göstergeci varsa, o zaman sonsuz sayıda n göstergeci için, x_n terimi I_{11}'dedir ve bu durumda x_{n_1} elemanını I_{11} aralığından seçelim. Diyelim x_{n_1} elemanını I_{10} aralığından seçtik. Bu eleman bulacağımız yakınsak altdizinin ikinci terimi olacak.



Her aşamada, bir önceki aralığı tam ortadan ikiye böleceğiz ve bu iki aralıktan hangisinde sonsuz sayıda n göstergeci için x_n terimi varsa, o aralığı seçeceğiz. (Eğer her ikisinde de sonsuz sayıda varsa, soldaki aralığı seçiyoruz. Böylece Seçim Aksiyomu'nu gereksiz yere kullanmamış oluyoruz.)

Kanıtın sonunda bulacağımız yakınsak dizinin bir sonraki terimini işte bu seçtiğimiz aralıktan seçiyoruz.

Daha matematiksel olalım ve yukardaki inşayı daha simgesel olarak yapalım.

Öyle bir $(I_k)_k$ kapalı aralıklar dizisi ve $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi bulacağız ki,

1) Her k için $n_k < n_{k+1}$ olacak.
2) Her k için $I_{k+1} \subset I_k$ olacak.
3) I_{k+1}'in uzunluğu I_k'nin uzunluğunun yarısı kadar olacak.
4) Her $k > 0$ için, $x_{n_k} \in I_k$ olacak.

5) Her k için, $x_n \in I_k$ ilişkisini sağlayan sonsuz sayıda n göstergeci olacak.

Bu inşayı k üzerine tümevarımla yapacağız. Önce $k = 0$ için: $I_0 = I$ olsun. Sadece 5'inci koşulun doğruluğunu kontrol etmemiz gerekiyor ki bu da I'nın tanımından dolayı bariz: Her n için $x_n \in I = I_0$'dir.

Yukardaki özellikleri sağlayan,

$$I = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_k$$

aralıklarını ve

$$n_0 < n_1 < \ldots < n_k$$

doğal sayılarını (göstergeçlerini) seçtiğimizi varsayalım. ($k = 0$ da olabilir.) Bir sonraki I_{k+1} aralığını ve n_{k+1} doğal sayısını seçelim. Tümevarım varsayımına göre, sonsuz tane n için, I_k aralığında x_n teriminin olduğunu biliyoruz. I_k aralığını tam ortadan ikiye bölerek iki kapalı aralığın birleşimi olarak yazalım. Bu iki kapalı aralığa $I_{k,0}$ ve $I_{k,1}$ adını verelim (soldaki hep $I_{k,0}$ olsun mesela):

$$I_k = I_{k,0} \cup I_{k,1}.$$

Eğer sonsuz sayıda n göstergeci için $x_n \in I_{k,0}$ ise, $I_{k+1} = I_{k,0}$ olsun (böylece 2, 3 ve 5'inci koşullar sağlanmış olur). Eğer aksine $x_n \in I_{k,0}$ ilişkisini sonlu sayıda n göstergeci sağlıyorsa, o zaman sonsuz tane n göstergeci için $x_n \in I_{k,1}$ olur.

Bu son durumda $I_{k+1} = I_{k,0}$ olsun (2, 3 ve 5'inci koşullar gene sağlanmış olur).

Sonsuz sayıda n göstergeci için $x_n \in I_{k+1}$ olduğundan

$$x_n \in I_{k+1} \text{ ve } n < n_k$$

ilişkilerini sağlayan bir n göstergeci vardır. Bu n'lerin en küçüğüne n_{k+1} diyelim. (Seçim Aksiyomu'nu gene kullanmadık!) Böylece 1 ve 4'üncü özellikler de sağlanmış oldu.

İnşaat tamamlandı.

Şimdi $(x_{n_k})_k$ dizisinin yakınsak olduğunu ya da (aynı şey) bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

Yakınsaklığın Birinci Kanıtı: $\epsilon > 0$ olsun. I'nın uzunluğuna ℓ diyelim. (3)'e göre, I_k'nin uzunluğu $\ell/2^k$'dır. Eğer $r \geq s$ ise,

$$x_{n_r} \in I_r \subseteq I_s \text{ ve } x_{n_s} \in I_s$$

olduğundan,

$$|x_{n_r} - x_{n_s}| < \frac{\ell}{2^s}$$

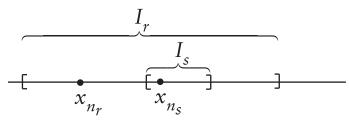
olur. (Bkz. aşağıdaki şekil.) Demek ki eğer N doğal sayısı,

$$\frac{\ell}{2^N} < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak kadar büyük seçilirse, o zaman her $r \geq s > N$ için,

$$|x_{n_r} - x_{n_s}| < \frac{\ell}{2^s} < \frac{\ell}{2^N} < \epsilon$$

olur. Demek ki $(x_{n_k})_k$ bir Cauchy dizisidir.



Yakınsaklığın İkinci Kanıtı: $I_k = [a_k, b_k]$ olsun. I'nın uzunluğuna ℓ diyelim. (3)'e göre, I_k'nin uzunluğu $\ell/2^k$'dır, yani

$$b_k - a_k = \frac{\ell}{2^k}.$$

Ayrıca, (2) ve (4)'ten dolayı,

$$a_k \leq a_{k+1} \leq x_{n_k} \leq b_{k+1} \leq b_k.$$

Demek ki $(a_k)_k$ üstten sınırlı ve artan bir dizi, dolayısıyla yakınsak. Benzer nedenden $(b_k)_k$ dizisi de yakınsak. Bu dizilerin limit a ve b ise,

$$b - a = \lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ell}{2^k} = 0$$

olur, yani $a = b$. Şimdi Sandviç Teoremi'ne (Teorem 5.1'e) göre

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

vardır (ve a'ya eşittir). □

Bolzano-Weierstrass Teoremi'nin İkinci (daha basit) Kanıtı: $(x_n)_n$, sınırlı bir dizi olsun. Eğer $(x_n)_n$ dizisi sonlu sayıda değer alıyorsa, yani

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

kümesi sonluysa, o zaman bu dizi sabit bir altdizi içerir ve bu durumda istediğimiz yakınsak altdiziyi elde ederiz. Eğer $(x_n)_n$ dizisi sonsuz sayıda değer alıyorsa, o zaman bu dizinin her terimi değişik olan bir altdizisi vardır. (Neden? Ve bu altdiziyi Seçim Aksiyomu'nu kullanmadan bulabilir misiniz?) Gerekirse

$(x_n)_n$ dizisi yerine her terimi değişik olan bu altdiziyi alarak, $(x_n)_n$ dizisinin her teriminin değişik olduğunu varsayabiliriz.

$(x_n)_n$ dizisinin bir $[a, b]$ aralığına sığdığını varsayalım.

$$A = \{x \leq b : \text{sonlu tane } x_n \text{ terimi } [a, x] \text{ aralığında } \}$$

kümesine bakalım. $a \in A$ olduğundan, $A \neq \emptyset$. Ayrıca A kümesi b tarafından üstten sınırlı. Demek ki A'nın bir en küçük üstsınırı var.

$$c = \sup A$$

olsun. Şimdi c'ye yakınsayan bir altdizi olduğunu kanıtlayacağız. $k > 0$ herhangi bir doğal sayı olsun. $c - 1/k < c$ olduğundan, $c - 1/k$ sayısı A'nın bir üstsınırı değildir. Dolayısıyla

$$c - \frac{1}{k} \leq d \leq c$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $d \in A$ vardır. A'nın tanımına göre, $[a, d]$ aralığında dizinin sonlu sayıda terimi bulunmaktadır. Öte yandan $c < c + 1/k$ olduğundan, $c + 1/k \notin A$ ve $[a, c + 1/k]$ aralığında dizinin sonsuz sayıda terimi bulunmaktadır. Demek ki $(d, c + 1/k]$ aralığında dizinin sonsuz sayıda terimi bulunmaktadır. Bundan da

$$\left[c - \frac{1}{k}, c + \frac{1}{k}\right]$$

aralığında dizinin sonsuz sayıda terimi bulunduğu çıkar. x_{n_k} bu terimlerden biri olsun. Demek ki,

$$c - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq c + \frac{1}{k}$$

olur ve bundan da [Sandviç Teoremi],

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = c$$

çıkar. □

Bolzano-Weierstrass Teoremi'nin Üçüncü (en basit) Kanıtı: $(x_n)_n$, sınırlı bir dizi olsun. Her dizinin olduğu gibi, bu dizinin de monoton bir altdizisi vardır (Teorem 8.6). Her monoton ve sınırlı dizi gibi bu altdizi yakınsaktır (Teorem 7.1).

Alıştırmalar

9.6. $c \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer bir dizinin c'ye yakınsayan bir altdizisi varsa, c'ye dizinin ***yoğunlaşma*** ya da ***limit noktası*** diyelim. Tek bir yoğunlaşma noktası olan sınırlı her dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

9.7. $S \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer S'nin her dizisinin yoğunlaşma noktası varsa S'nin sınırlı olduğunu kanıtlayın.