7. Dizi Çeşitleri

7.1 Monoton Diziler

Artan ya da azalan bir diziye ***monoton dizi*** denir. Yani eğer bir $(x_n)_n$ dizisi her n için,

$$x_n \leq x_{n+1}$$

koşulunu sağlıyorsa (yani artansa), ya da her n için,

$$x_n \geq x_{n+1}$$

koşulunu sağlıyorsa (yani azalansa), o zaman bu diziye ***monoton dizi*** adı verilir[1]. Örneğin

$$\left(\frac{n+3}{n+1}\right)_n$$

azalan bir dizidir. Bazı diziler başlangıçta monoton olmasalar da zamanla, örneğin 1 milyonuncu terimden sonra monotonlaşabilirler.

Örnekler

7.1. *$(a_n)_n$ dizisi artansa (azalansa), terimleri*

$$\frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}}{n}$$

$(n \geq 1)$ olan dizi de artandır (azalandır).

Kanıt: Soruyu artan diziler için kanıtlayalım. $a_0 + \cdots + a_{n-1}$ toplamına s_n diyelim. İstediğimiz,

$$\frac{s_n}{n} \leq \frac{s_{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow \frac{s_n}{n} \leq \frac{s_n + a_n}{n+1} \Leftrightarrow s_n \leq na_n$$

eşdeğerliğinden ve

$$s_n = a_0 + \cdots + a_{n-1} \leq na_{n-1} \leq na_n$$

eşitsizliğinden çıkar. □

[1]Eğer eşitsizliği mutlak eşitsizlikle değiştirirsek, ***kesin azalan*** ya da ***kesin artan*** dizi kavramını buluruz. Birçok kitapta bizim "artan" dediğimize "azalmayan" dense de, bu terminolojinin pek pratik olmadığını düşünüyoruz.

7.2. $a > 0$ olsun ve yukarda kanıtladığımızı terimleri $a_n = a^n(1-a)$ olan diziye uygulayalım. Bu dizinin azalan olduğunu kanıtlamak zor değil (ama kanıtı $a \leq 1$ ve $a \geq 1$ olarak iki parçaya ayırmak gerekir). Demek ki $(s_n)_n$ dizisi de azalandır.

$$s_n = \frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}}{n} = \frac{(1-a) + a(1-a) + \cdots + a^{n-1}(1-a)}{n} = \frac{1-a^n}{n}$$

olduğundan, buradan kolaylıkla

$$na^{n-1}(1-a) < 1 - a^n < n(1-a)$$

çıkar.

7.3. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki dizi olsun. Her n için $b_n > 0$ olduğunu ve $(a_n/b_n)_n$ dizisinin artan (azalan) olduğunu varsayalım. O zaman terimleri*

$$\frac{a_0 + \cdots + a_n}{b_0 + \cdots + b_n}$$

olan dizi de artandır (azalandır).

Kanıt: Kanıtı sadece artan diziler için yapalım. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizilerinin kısmi toplamlarını sırasıyla s_n ve t_n ile gösterelim. Önce

(1)
$$\frac{s_n}{t_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

eşitsizliğini n üzerinden tümevarımla kanıtlayalım. $n = 0$ için her şey yolunda. (1) eşitsizliğini kabul edip

(2)
$$\frac{s_{n+1}}{t_{n+1}} \leq \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. (1) eşitsizliğinden kolayca

$$\frac{s_n + a_{n+1}}{t_n + b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

yani

$$\frac{s_{n+1}}{t_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

eşitsizliği çıkar. Ama varsayıma göre

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}.$$

Demek ki (2), dolayısıyla (1) de doğru.

Şimdi $(s_n/t_n)_n$ dizisinin artan olduğunu kanıtlayabiliriz.

$$\frac{s_n}{t_n} \leq \frac{s_{n+1}}{t_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{s_n}{t_n} \leq \frac{s_n + a_{n+1}}{t_n + b_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{s_n}{t_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

ki son eşitsizliği bir paragraf önce kanıtlamıştık. □

Alıştırmalar

7.4. Örnek 7.1'in ters istikametlisinin yanlış olduğunu kanıtlayın.

7.5. Örnek 7.2, $n < 0$ için doğru mudur? Doğru değilse ne tür bir eşitlik doğrudur?

7.6. Örnek 7.2, kesirli sayılar için doğru mudur? Doğru değilse ne tür bir eşitlik doğrudur?

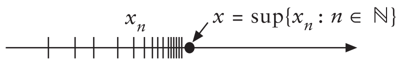
7.7. Örnek 7.3'ün artan yerine azalan için de doğru olduğunu kanıtlayın.

7.8. Örnek 7.3'ün ters istikametlisinin doğru olmadığını gösterin. Yani öyle $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri bulun ki, $(s_n/t_n)_n$ dizisi artan olsun ama (a_n/b_n) dizisi artan olmasın.

7.9. $a > 0$ olsun. Her $a_n = a^{n+1}(1-a)$ ve $b_n = n+1$ olsun. Örnek 7.3'ü a_n/b_n dizisine uygulayın.

Monoton dizilerin diğer dizilere göre önemli bir üstünlüğü vardır: Bu dizilerin yakınsak olmaları için sadece sınırlı olmaları yeterlidir. Nitekim, sezgilerimiz de, sürekli (ya da bir zaman sonra) artan bir dizinin, eğer terimleri belli bir sayıyı hiçbir zaman aşamıyorsa, belli bir sayıya (en küçük üstsınırına) yoğunlaşması gerektiğini söylüyor.

Teorem 7.1. *Artan ve sınırlı bir dizi yakınsaktır. Eğer $(x_n)_n$ böyle bir diziyse, bu dizinin limiti $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ olur.*



Teorem, kesirli sayılar kümesi için geçerli değildir. [N2]'de kesirli bir sayıya yakınsamayan birçok artan kesirli sayı dizisi örneği gördük. Daha ince zevklere hitap eden bir örnek verelim. x, kesirli olmayan herhangi bir gerçel sayı olsun. x_1, x ile $x-1$ arasında olan herhangi bir kesirli sayı olsun. Eğer

$$x_1 < \ldots < x_n < x$$

kesirli sayıları,

$$x - x_i < \frac{1}{i}$$

eşitsizlikleri doğru olacak biçimde tanımlanmışsa, x_{n+1} sayısını,

$$(x_n,\, x) \cap \left(x - \frac{1}{n+1},\, x\right)$$

açık aralığından herhangi bir kesirli sayı olarak seçelim. O zaman $(x_n)_n$ dizisi sürekli artan bir kesirli sayı dizisidir ve gerçel sayılarda x'e yakınsar, ancak kesirli sayılar kümesinde limiti yoktur (çünkü x kesirli değil.)

Bundan da, teoremin kanıtında, gerçel sayılarda doğru olan ama kesirli sayılarda doğru olmayan (SUP) aksiyomunun kullanılması gerektiği çıkar.

Teorem 7.1'in Kanıtı: $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. x'nin varlığını dizinin sınırlı olmasına ve SUP aksiyomuna borçluyuz. Elbette, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le x$. Herhangi bir $\epsilon > 0$ alalım. $x - \epsilon < x$ olduğundan ve x, dizinin **en küçük** üstsınırı olduğundan, $x - \epsilon$, dizinin bir üstsınırı değildir. Demek ki, belli bir N sayısı için,

$$x - \epsilon < x_N \le x$$

olur. Dolayısıyla her $n > N$ için de,

$$x - \epsilon < x_N \leq x_n \leq x$$

olur, yani

$$|x_n - x| = x - x_n \leq \epsilon$$

olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

Dizi, zamanla artan bir dizi olsa da sonuç değişmez elbet.

Sonuç 7.2. *Zamanla artan ve sınırlı olan bir dizi yakınsaktır. Eğer $(x_n)_n$ böyle bir diziyse ve dizi M göstergecinden sonra azalmamaya başlıyorsa, o zaman bu dizinin limiti* $\sup\{x_n : n > M\}$ *olur.* □

Benzer sonuçlar azalan diziler için de geçerli:

Sonuç 7.3. *Zamanla azalan ve sınırlı bir dizi yakınsaktır. Eğer $(x_n)_n$ böyle bir diziyse, bu dizinin limiti* $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *olur.* □

Sonuç 7.4. *Zamanla monotonlaşan sınırlı diziler yakınsaktır.* □

Ve elbette monoton bir dizi sınırlı değilse yakınsak olamaz, çünkü bildiğimiz gibi yakınsak her dizi sınırlı olmak zorundadır.

Bu sonuçlar çok önemlidir ve birçok uygulamasını göreceğiz. Hemen başlayalım.

Örnekler

7.10. Genel terimi

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

olan diziye bakalım. Bu dizinin sürekli arttığı belli, her terime yeni pozitif bir sayı ekleniyor. Teoreme göre, eğer dizi sınırlıysa yakınsak olması gerekir.

Bu elektronik çağda, insanın eli mecburen aygıtlara gidiyor. Dizinin ilk birkaç terimini bilgisayara hesaplatalım.

$$\begin{array}{ll}
1/1^2 & = 1 \\
1/1^2 + 1/2^2 & = 1{,}25 \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 & = 1{,}361111\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 & = 1{,}423611\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/5^2 & = 1{,}463611\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/6^2 & = 1{,}491389\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/7^2 & = 1{,}511797\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/8^2 & = 1{,}527422\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/9^2 & = 1{,}539768\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/10^2 & = 1{,}549768\ldots
\end{array}$$

Toplamlar gittikçe büyüyorlar, doğru, ama bu, toplamların her sayıyı aşacağı anlamına gelmez. Örneğin,

$$0{,}9,\ 0{,}99,\ 0{,}999,\ 0{,}9999,\ \ldots$$

dizisi de durmadan büyür, ama 1'i hiçbir zaman geçemez. Birkaç terim daha hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/100^2 &= 1{,}634984\ldots\\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/200^2 &= 1{,}639947\ldots\\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/300^2 &= 1{,}641606\ldots\\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/1000^2 &= 1{,}643935\ldots\\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/2000^2 &= 1{,}644432\ldots\\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/3000^2 &= 1{,}644595\ldots\\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/4000^2 &= 1{,}644714\ldots\\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/5000^2 &= 1{,}644725\ldots
\end{aligned}$$

Sanki dizi 1,65'i geçmeyecek gibi bir hisse kapıldınız mı? Doğru, haklısınız, hislerinizde yanılmadınız... Bu dizi $\pi^2/6$'ya yakınsar. π'yi ikinci ciltte tanımlayacağız. Limitin $\pi^2/6$'ya eşit olduğunun kanıtı da bu kitabı aşar. Bunu olmasa da, dizinin en azından 2'yi geçemeyeceğini kanıtlayabiliriz.

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

olsun.

Sav. *Her $n \geq 1$ doğal sayısı için, $x_n \leq 2 - 1/n$.*

Kanıt: $n = 1$ için kanıtlayacak fazla bir şey yok. Eşitsizliği n için varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\\
&= 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} < 2 - \frac{n^2+n}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Sav kanıtlanmıştır. □

Demek ki dizi 2'den küçük bir sayıya yakınsar. Bu arada,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$$

eşitsizliği tümevarımla kolaylıkla kanıtlandığından (kanıtlayın lütfen), dizinin limitinin $1,5$ ile 2 arasında bir sayı olduğu anlaşılır. (Bu dizinin limiti $\pi^2/6$'dır. Euler kimsenin tahmin edemediği bu ünlü sonucu bulduğunda yer yerinden oynamıştı.)

7.11. Peki

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$$

dizisinin limiti nasıl bir sayıdır? $1/i^2 \geq 1/i^3$ olduğundan, bu yeni toplam $\pi^2/6$'dan daha küçük bir sayıdır. (Sonlu toplamlar $\pi^2/6$'dan küçük ama artan bir dizidir, dolayısıyla yakınsaktır.) Bu sayının hangi sayı olduğu bilinmiyor. Nasıl bir sayı olduğu da bilinmiyor, tek bildiğimiz, bu sayının kesirli bir sayı olmadığı. Bu da, sadece 1990'ların başında kanıtlandı.

7.12. $1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \cdots + 1/n^4$ toplamının limitinin kaç olduğu biliniyor. Genel olarak, eğer k çift bir sayıysa,

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}$$

toplamının limitinin π^k ile kesirli bir sayının çarpımı olduğu biliniyor (Euler), örneğin,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

Ama eğer $k \geq 5$ tek bir sayıysa, bu sonsuz toplam üzerine pek bir şey bilindiğini sanmıyorum.

7.13. **[Gauss]** $0 \leq a_0 \leq b_0$ ve

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \text{ ve } b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$$

olsun. Tümevarımla $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ eşitsizliklerini göstermek kolay. Demek ki $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri yakınsaktır. Limitlere sırasıyla a ve b dersek,

$$a=\frac{a+b}{2}$$

yani $a=b$ olur. Bu ortak değere a_0 ve b_0 sayılarının ***aritmetik-geometrik ortalaması*** adı verilir.

7.14. $s \geq 0$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları verilmiş olsun. Her $n \geq 0$ için $x_{n+1}=\sqrt{s+x_n}$ tanımını yapalım. Her x_n bu formülle gerçekten tanımlanır, nitekim eğer x_n tanımlanmışsa, $x_n \geq 0$ olmak zorundadır, dolayısıyla $s+x_n \geq 0$ olur ve karekökü vardır, dolayısıyla x_{n+1} de tanımlanmıştır.

Her iki tarafın da karesini alarak $x_{n+1}^2 = s+x_n$ buluruz, demek ki dizinin limiti eğer varsa, $x^2-x-s=0$ köklerinden biri olmalıdır. Ama köklerden küçük olanı negatif olduğundan, dizinin limiti varsa, bu limit ancak

$$\frac{1+\sqrt{1+4s}}{2}$$

olabilir.

Dizinin artanlığına azalanlığına karar verelim.

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_n^2 - x_n \geq s$$

önermesini kanıtlamak zor değil, x_{n+1} yerine x_n cinsinden ifadesini yazınca çıkıyor. Bunu kullanarak

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

önermesini kanıtlayabiliriz:

$$x_{n+2} \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1}^2 - x_{n+1} \geq s \Leftrightarrow (x_n+s)-x_{n+1} \geq s \Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n.$$

Demek ki dizi bir yerde artarsa her yerde artıyor, bir yerde azalırsa her yerde azalıyor, yani dizi monoton. Daha keskin bir ifadeyle

$$(x_n)_n \text{ azalan} \Leftrightarrow x_1 \leq x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 \geq s.$$

Dizi azalansa dizinin bir limiti olduğu belli. Şimdi dizinin üstten sınırlı olduğunu gösterelim ki dizinin her durumda yakınsadığı anlaşılsın.

$$\alpha = \max\left\{x_0, \frac{1+\sqrt{1+4s}}{2}\right\}$$

olsun. Elbette $x_0 \leq \alpha$ ve $\alpha^2-\alpha-s \geq 0$ olur. Eğer $x_n \leq \alpha$ eşitsizliğini varsayarsak,

$$x_{n+1}^2 = x_n + s \leq \alpha + s \leq \alpha^2$$

ve buradan da $x_{n+1} \leq \alpha$ buluruz. Demek ki $(x_n)_n$ dizisi üstten sınırlıdır ve her durumda limiti vardır.

7.15. [A] *$a_0 = -3/2$ ve $3a_{n+1} = 2 + a_n^3$ olsun. $(a_n)_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını kanıtlayın.*
Kanıt: Eğer dizinin limiti varsa, bu limit $3x = 2 + x^3$ eşitliğini sağlamalı.

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

olduğundan bu limit ya 1 olabilir ya da -2. Ayrıca $a_0 < 0$ ve $a_1 = -11/24 < 0$ olduğundan, limit (eğer varsa) negatif gibi görünebilir ilk bakışta ama kolayca hesaplanabileceği üzere

$$0 < a_2 = \frac{2}{3} - \frac{11^3}{3 \cdot 24^3} \simeq 0,63457 < 1$$

oluyor. Dizinin tanımı kullanılarak buradan her $n \geq 2$ için $a_n \geq 0$ eşitsizliği hemen görülüyor. Bu bilgiyle

$$a_{n+1} < 1 \Leftrightarrow a_n < 1$$

eşdeğerliğini de kanıtlamak kolay. Demek ki $n \geq 2$ için $0 < a_n < 1$. Buradan $n \geq 2$ için

$$3(a_{n+1} - 1) = (2 + a_n^3) - 3 = a_n^3 - 1 = (a_n - 1)(a_n^2 + a_n + 1) > 3(a_n - 1)$$

elde ederiz (çünkü $a_n - 1 < 0$). Böylece $(a_n)_n$ dizisinin bir zaman sonra artan olduğu anlaşılır. Demek ki dizinin limiti 1'dir. □

Alıştırmalar

7.16. $(n!/n^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını kanıtlayın. Bu dizinin limitinin 0 olduğunu kanıtlayın.

7.17. $r \in (0,1)$ olsun. $(nr^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını, dolayısıyla yakınsak olduğunu kanıtlayın. Dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

7.18. $r \in (0,1)$ olsun. $(n^2r^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını, dolayısıyla yakınsak olduğunu kanıtlayın. Dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

7.19. $r \in (-1,1)$ ve sabit bir $k \in \mathbb{N}$ için $(n^kr^n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

7.20. Terimleri

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

olan dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

7.21. $a_1 = 3$ ve $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$ eşitliğini kanıtlayın.

7.22. Terimleri

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

olan dizinin 1 ile 2 arasında değer aldığını ve arttığını kanıtlayın. Dolayısıyla bu dizinin bir limiti vardır[2].

7.23. $a > 0$ ve $x_0 >$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

olsun.
a. $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2$ eşitliğini kanıtlayın.
b. Bundan $x_n \geq \sqrt{a}$ eşitsizliğini çıkarın.
c. $x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$ eşitliğini kanıtlayın.
d. Bundan $(x_n)_n$ dizisinin azalan olduğunu gösterin.
e. $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ eşitliğini gösterin.

[2]Limit $\ln 2$'dir. Ancak logaritma gelecek ciltte tanımlanacak.

7.24. a_0 ve b_0 iki pozitif sayı olsun. $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ ve $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ tanımını yapalım. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizilerinin monoton olduklarını ve aynı limite yakınsadıklarını kanıtlayın.

7.25. a_0 ve b_0 iki pozitif sayı olsun. $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ ve $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n$ olsun. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizilerinin monoton olduklarını ve $\sqrt{a_0b_0}$ sayısına yakınsadıklarını kanıtlayın.

7.26. $s \geq 0$, $x_0 \geq 0$ ve $x_{n+1} = \frac{s}{1+x_n}$ olsun. Dizinin limiti varsa bu limitin ancak $x^2+x-s=0$ denkleminin pozitif kökü olabileceğini, yani

$$\frac{1+\sqrt{1+4s}}{2}$$

olabileceğini gösterin.

$$x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow x_n \geq x_{n-1}$$

önermesini kanıtlayın. Dizinin monoton olduğunu kanıtlayın. Eğer dizi azalansa dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın. Eğer dizi artansa, her n için

$$a_n \leq \frac{s}{1+a_0}$$

eşitsizliğini kanıtlayın. Dizinin her durumda yakınsak olduğunu kanıtlayın.

7.27. $s \geq 0$, $x_0 \geq 0$ ve $x_{n+1} = s/x_n + 1$ olsun. Yukardakine benzer analizi bu dizi için yapın.

7.28. $a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}_{n \text{ tane}}$ olsun.

i. $(a_n)_n$ dizisinin artan olduğunu kanıtlayın.
ii. $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ eşitliğini kanıtlayın.
iii. Yukardaki eşitlikten, limitin eğer varsa (***altın oran*** olarak bilinen)

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.
iv. Altın oranın 2'den küçük olduğunu kanıtlayın.
v. Her n için $a_n < 2$ eşitsizliğini kanıtlayın.
vi. Bütün bunlardan, $\lim_{n\to\infty} a_n = \phi$ eşitliğini kanıtlayın.

7.29. $b_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$ olsun.

i. $(b_n)_n$ dizisinin artan olduğunu kanıtlayın.
ii. $b_n = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{2^2}+\sqrt{\frac{3}{2^3}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2^n}}}}}$ eşitliğini kanıtlayın.
iii. a_n bir önceki alıştırmadaki gibi olsun. (b) kısmından hareketle $b_n < \sqrt{2}a_n$ eşitliğini kanıtlayın.
iv. $(b_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

7.30. Terimleri $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ tane}}$ olan dizi yakınsak mıdır ve öyleyse hangi sayıya yakınsar?

7.2 Sonsuza Iraksayan Diziler I

Bir önceki bölümde, Örnek 6.10'te sürekli artan

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

dizisinin (örneğin 2 tarafından) üstten sınırlı olduğunu, dolayısıyla yakınsak olduğunu gösterdik. Bu bölümde, gene sürekli artan ve ***harmonik dizi*** adı verilen

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

dizisini ele alacağız. Bu dizi de bir önceki dizi gibi sınırlı mı ve dolayısıyla yakınsak mıdır? Bu altbölümde bu soruyu ele alacağız.

Dizinin ilk terimlerine bakıp bir tahminde bulunmaya çalışalım.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1} &= 1\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2} &= 1{,}5\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} &= 1{,}8333...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &= 2{,}08333...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{5} &= 2{,}28333...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{6} &= 2{,}45\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7} &= 2{,}592857143...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8} &= 2{,}717857143...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9} &= 2{,}828968254...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10} &= 2{,}928968254...
\end{aligned}$$

İlk on terimde sadece 2'yi geçtik, henüz 3'e varamadık. Bu toplamlar bir zaman sonra -örneğin- 100'ü geçer mi? Geçerse ne zaman geçer?

Bilgisayara hesaplattık bu toplamları. Eğer

$$H_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

tanımını yaparsak, bulduğumuz sonuçları daha rahat yazabiliriz:

$$
\begin{array}{lll@{\qquad}lll}
H_1 & = & 1 & H_{11} & = & 3{,}019877... \\
H_2 & = & 1{,}5 & H_{12} & = & 3{,}103211... \\
H_3 & = & 1{,}833333... & H_{13} & = & 3{,}180134... \\
H_4 & = & 2{,}083333... & H_{14} & = & 3{,}251562... \\
H_5 & = & 2{,}283334... & H_{15} & = & 3{,}318229... \\
H_6 & = & 2{,}45 & H_{16} & = & 3{,}380729... \\
H_7 & = & 2{,}592857... & H_{17} & = & 3{,}439553... \\
H_8 & = & 2{,}717857... & H_{18} & = & 3{,}495108... \\
H_9 & = & 2{,}828969... & H_{19} & = & 3{,}54774... \\
H_{10} & = & 2{,}928968... & H_{20} & = & 3{,}59774...
\end{array}
$$

İlk 20 toplamda henüz 4'e varamadık, yanına bile yaklaşamadık. Bilgisayarda daha da ileri gittik. 4'ü ancak 31'inci toplamda aşabildik:

$$H_{30} = 3{,}994987...$$
$$H_{31} = 4{,}027246...$$

Ya 5'i aştık mı? Aştık. Ama oldukça geç aştık, ancak 83'üncü toplamda aşabildik:

$$H_{82} = 4{,}990021...$$
$$H_{83} = 5{,}002069...$$

6'yı da aştık. 227'nci toplamda...

$$H_{226} = 5{,}999962...$$
$$H_{227} = 6{,}004367...$$

7'yi aşmak için çok bekledik. 7'yi ancak 616'ncı terimde aşabildik:

$$H_{615} = 6{,}999652...$$
$$H_{616} = 7{,}001276...$$

8'i aşıp aşmayacağımız merak konusu... Onu da aştık:

$$H_{1673} = 7{,}99989...$$
$$H_{1674} = 8{,}00048...$$

Ya 9? 9'u aşabilir miyiz? Aştık, daha doğrusu bilgisayar aştı:

$$H_{4549} = 8{,}999995...$$
$$H_{4550} = 9{,}000215...$$

10'u, 11'i, 12'yi de aştık:

$$\begin{aligned} H_{12366} &= 9{,}999969... \\ H_{12367} &= 10{,}00005... \\ H_{33616} &= 10{,}99998... \\ H_{33618} &= 11, \ldots \\ H_{91328} &= 12{,}00001... \end{aligned}$$

Her sayıyı bir zaman sonra aşacak mıyız?

Örneğin 100'ü aşacak mıyız?

Evet aşacağız! $1{,}5 \times 10^{43}$'üncü toplamdan sonra...

Baklayı ağzımızdan çıkaralım: Yukardaki dizi sonsuza gider. Yani her sayıyı bir zaman sonra aşarız. Kanıtlayalım bunu.

Şu tablodaki eşitsizliklere bakalım:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}. \end{gathered}$$

Bu hesaplardan sonra dizinin neden her sayıyı aştığı anlaşılıyor:

$$H_{2^n} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ tane}} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Dolayısıyla dizi bir sayıya yakınsamaz çünkü sürekli artarak her sayıyı bir zaman sonra geçer. Bu tür diziler için özel bir terim kullanılır: Dizinin ***sonsuza gittiği*** ya da ***sonsuza ıraksadığı*** söylenir. Hatta kimi zaman, sanki sonsuz diye bir sayı varmışçasına dizi ***sonsuza yakınsar*** denir.

Matematiksel tanımı verelim:

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Hangi A sayısı verilirse verilsin, eğer her $n > N$ için,

$$x_n > A$$

eşitsizliğini sağlayan bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin ***sonsuza gittiği*** ya da ***ıraksadığı*** söylenir ve bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

olarak yazılır.

Dikkat: Burada "sonsuz" diye bir kavramı tanımlamadık, sadece bir "dizinin sonsuza gitmesi"nin ne demek olduğunu söyledik, yani "dizi sonsuza gidiyor" kavramını tanımladık. Tanımımıza göre, sonsuza gitmek demek, **her** sayıyı belli bir aşamadan sonra **hep** geçmek demektir.

"$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$" yazıldığında aslında bir eşitlikten söz edilmemektedir, çünkü ∞ diye özel bir matematiksel nesne tanımlanmamıştır. Ama lafın gelişi ve alışkanlıklardan dolayı "$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ eşitliği"nden bahsedeceğiz. Demek ki yukarıda,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty$$

eşitliğini kanıtladık.

Örnekler

7.31. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... dizisi de sonsuza gider elbet.

7.32. Ancak,

$$0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 1,\ 6,\ 1,\ldots$$

dizisi sonsuza gitmez, çünkü her iki terimin arasına konmuş olan 1'ler dizinin sonsuza gitmesini engellerler.

7.33. Terimleri $\sqrt{n}$ olan dizi sonsuza gider çünkü bu dizi artandır ve içinde $\sqrt{n^2} = n$ sayılarını barındırır, dolayısıyla her doğal sayıyı bir zaman sonra aşar.

7.34. Terimleri

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}$$

olan dizi sonsuza ıraksar çünkü,

$$\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}=\sqrt{i+1}-\sqrt{i}$$

eşitliği geçerlidir ve dolayısıyla

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}=\sum_{i=0}^{n}\left(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}\right)=\sqrt{n+1}$$

olur. Bir önceki örneğe göre $\sqrt{n+1}$ sayısı her sayıyı aştığından dizimiz sonsuza ıraksar.

7.35. (Cauchy, 1821) *Eğer* $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \infty$ *ise* $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \infty$ *olur.*

Kanıt: $0 < A \in \mathbb{R}$ olsun. M göstergeci,

$$n > M \Rightarrow x_n > 2A$$

olacak biçimde seçilmiş olsun. O zaman $B = x_1 + \cdots + x_M - 2MA$ tanımıyla

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} &= \frac{x_1+\cdots+x_M}{n}+\frac{x_{M+1}+\cdots+x_n}{n}\\ &> \frac{x_1+\cdots+x_M}{n}+\frac{2(n-M)A}{n}\\ &= 2A+\frac{x_1+\cdots+x_M-2MA}{n}=2A+\frac{B}{n}\end{aligned}$$

buluruz. Negatif de olabilecek olan B sayısı M'ye bağımlı ama n'den bağımsız. Sağ taraftaki n'yi istediğimiz kadar büyük alabileceğimizden, n'yi yeterince büyük, diyelim belli bir P'den büyük seçersek

$$\frac{B}{n} < -A$$

olur. Şimdi $N = \max\{M, P\}$ olsun. Her $n > N$ için,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} > 2A + \frac{B}{n} > 2A - A = A$$

olur. □

7.36. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ise ve* $(u_n)_n$ *pozitif dizisi için*

$$\lim_{n\to\infty} (u_0 + \cdots + u_n) = \infty$$

ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_0 x_0 + \cdots + u_n x_n}{u_0 + \cdots + u_n} = x$$

olur.

Not: $u_i = 1$ alırsak bir önceki örneği elde ederiz.

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. Her $i > N$ için $|x - x_i| < \epsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı bir N seçelim. $n > N$ olsun.

$$\frac{\sum_{i=0}^n u_i x_i}{\sum_{i=0}^n u_i} - x = \frac{\sum_{i=0}^n u_i(x_i - x)}{\sum_{i=0}^n u_i} = \frac{\sum_{i=0}^N u_i(x_i - x)}{\sum_{i=0}^n u_i} + \frac{\sum_{i=N+1}^n u_i(x_i - x)}{\sum_{i=0}^n u_i}$$

olduğundan, üçgen eşitsizliğinden,

$$A = \left|\sum_{i=0}^N u_i(x_i - x)\right|$$

tanımıyla,

$$\left|\frac{\sum_{i=0}^n u_i x_i}{\sum_{i=0}^n u_i} - x\right| \le \frac{A}{\sum_{i=0}^n u_i} + \frac{\sum_{i=N+1}^n u_i|x_i - x|}{\sum_{i=0}^n u_i} < \frac{A}{\sum_{i=0}^n u_i} + \epsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. n'yi sonsuza götürdüğümüzde sağ taraf ϵ'a yakınsadığından ve ϵ rastgele seçildiğinden, Sandviç Teoremi'nden istediğimizi elde ederiz. □

7.37. *$(y_n)_n$ kesin artarak sonsuza ıraksayan bir dizi olsun. Eğer* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = z$ *ise* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = z$ *olur*[3].

Kanıt: $u_n = y_n - y_{n-1} > 0$ ve $u_0 = y_0$ olsun. O zaman $y_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ olur. Ve $v_n = x_n - x_{n-1}$ ve $v_0 = x_0$ olsun. O zaman $x_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ olur. Demek ki, $(u_n)_n$ pozitif artan bir diziyse ve $\lim_{n\to\infty}(u_0 + \cdots + u_n) = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} v_n/u_n = z$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} = z$$

eşitliğini kanıtlamamız lazım.

Şimdi $z_n = v_n/u_n$ tanımını yapalım. Bu tanımla, $(u_n)_n$ pozitif artan bir diziyse ve $\lim_{n\to\infty}(u_0 + \cdots + u_n) = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_0 z_0 + u_1 z_1 + \cdots + u_n z_n}{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} = z$$

eşitliğini kanıtlamamız lazım, ki bunu da bir önceki örnekte kanıtlamıştık. □

Uygulama olarak bir $0 < k \in \mathbb{N}$ alalım.

$$x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

ve

$$y_n = n^{k+1}$$

olsun. Yukarda kanıtlanana göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

olur (bkz. Alıştırma 5.26).

Bir dizinin sonsuza gitmesi için, artan olması gerekmez, örneğin,

$$1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, \ldots$$

(terimleri ikişer ikişer gruplarsanız dizinin nasıl devam ettiğini anlarsınız) dizisi artan değildir ama sonsuza gider. Öte yandan aşağıdaki sonuç doğrudur:

[3] Analizde pek sık kullanılan L'Hospital kuralını bilene bu önerme ilginç gelecektir.

Teorem 7.5. *Artan bir dizi ya yakınsaktır ya da sonsuza gider.*

Kanıt: Dizi sınırlıysa, o zaman limitinin olduğunu biliyoruz. Eğer sınırsızsa, o zaman belli bir N göstergecinden sonra verilmiş herhangi bir A sayısını aşar. Ama dizi artan olduğundan, o göstergeçten sonra A sayısını sürekli aşar. □

Benzer biçimde "eksi sonsuza gitme"yi de tanımlayabiliriz.

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Hangi A sayısı verilirse verilsin, eğer her $n > N$ için,

$$x_n < A$$

eşitsizliğini sağlayan bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin eksi sonsuza (ya da $-\infty$'a) gittiği söylenir ve bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

olarak yazılır.

Teorem 7.6. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty$.

Kanıt: Kolaydır ve okura bırakılmıştır. □

Altbölümün başında ele aldığımız

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

dizisi çok önemlidir, çünkü bu dizi sonsuza gider ama sonlu bir sayıya gitmesine - tabiri caizdir! - ramak kalmıştır, yani sonsuza çok yavaş gider. Örneğin eğer $s > 1$ ise,

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s}$$

dizisi yakınsaktır, limiti sonlu bir sayıdır, s, 1'e ne kadar yakın olursa olsun, $s = 1{,}0001$ olsa bile, yeter ki 1'den büyük olsun...

Bunu ilerde, gerçel sayılarda üs almayı tanımladığımızda kanıtlayacağız. Ama okur, şimdilik, s'yi kesirli bir sayı alarak kanıtlamaya çalışabilir. Güzel ve yararlı bir alıştırmadır.

Alıştırmalar

7.38. Şu eşitlikleri kanıtlayın:

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{3+n} = -\infty.$$

7.39. Sonsuza ıraksayan iki dizinin toplamının da sonsuza gittiğini kanıtlayın.

7.40. Sonsuza ıraksayan iki dizinin çarpımının da sonsuza gittiğini kanıtlayın.

7.41. Terimleri

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

olan dizi hangi terimden sonra azalmaya başlar? (Bkz. Örnek 5.2 ve 16.9)

7.42. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise ve $r > 0$ ise, $\lim_{n\to\infty} rx_n = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

7.43. A, onluk tabanda yazıldığında içinde 0 rakamının belirdiği pozitif doğal sayılar kümesi olsun. $\sum_{n\in A} 1/n = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

7.44. $p(X) = a_kX^k + \cdots + a_1X + a_0$ bir polinom olsun. $a_k > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

7.45. $p(X) = a_kX^k + \cdots + a_1X + a_0$ bir polinom olsun. $a_k > 0$ olsun.

$$q(X) = b_\ell X^\ell + \cdots + b_1X + b_0$$

da bir polinom olsun ve $b_\ell > 0$ olsun. Ayrıca $k > \ell$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)} = \infty$$

eşitliğini kanıtlayın.

7.46. α, bir 01-dizisiyse, $f_\alpha(n)$, α'nın ilk n terimindeki 1 sayısı olsun. $(f_\alpha(n)/n)_n$ dizisinin ıraksadığı bir α dizisi yaratın. Verilmiş bir $p \in [0,1]$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_\alpha(n)}{n} = p$$

eşitliğini sağlayan bir α dizisinin varlığını kanıtlayın.

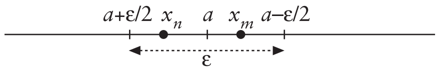
7.3 Cauchy Dizileri

Yakınsak dizinin tanımına bakılırsa, bir dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamak için önce dizinin limitini bilmek lazım gibi bir hisse kapılabilir insan. Bu bölümde, bir dizinin yakınsak olduğunu dizinin limitini bilmeden de kanıtlayabileceğimizi göreceğiz. Aslında Bölüm 7'de de yapmıştık bunu. Artan ve üstten sınırlı bir dizinin limiti olduğunu limiti bilmeden kanıtlamıştık, örneğin

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$

limitinin kaç olduğunu bilmeden limitin varlığını kanıtlamıştık.

Yakınsak bir dizi limitine çok çok çok yaklaştığından, dizinin terimleri birbirlerine çok çok çok yakınlaşırlar. Nitekim eğer $\epsilon > 0$ verilmişse, a sayısına yakınsayan bir dizinin terimleri belli bir aşamadan sonra a'ya $\epsilon/2$'den daha yakın olurlar;



dolayısıyla o aşamadan sonra, dizinin terimleri birbirlerine, yukardaki şekilde de görüleceği üzere, ϵ'dan daha yakın olurlar. Bu tür dizilere Cauchy dizileri denir. (Koşi diye okunur.) Matematiksel tanım şöyle:

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

eşitsizliğinin her n, $m > N$ için sağlandığı bir N göstergeci varsa, $(x_n)_n$ dizisine ***Cauchy dizisi*** denir.

Tanım, Cauchy dizilerinin terimlerinin belli bir zaman sonra birbirlerine çok yakın olduklarını, daha doğrusu, Cauchy dizilerinin terimlerini birbirlerine istediğimiz kadar yaklaştırabileceğimizi söylüyor, yeter ki göstergeçleri yeterince büyük seçelim.

Cauchy olmak da, yakınsamak gibi, dizinin kuyruğunu ilgilendiren bir özelliktir. Bir dizinin başından istediğimiz kadar terim atalım ya da başına istediğimiz kadar terim ekleyelim, dizinin koşiliği bozulmaz.

Bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu kanıtlamak için önce rastgele bir $\epsilon > 0$ sayısı seçilir. Ardından,

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n ve m'nin ne kadar büyük olması gerektiği araştırılır. Bunun için de $|x_n - x_m|$ terimiyle dikkatli bir biçimde -terimi fazla büyütmemeye çalışılarak- oynanır.

Örnekler

7.47. $(x_n)_n$ dizisinin Cauchy olduğunu kanıtlamak için, $|x_{k+1} - x_k|$ ifadesini (ardışık terimlerin farkını) küçük yapmak yetmez, çünkü $|x_{k+1} - x_k|$ ifadesi çok küçük olsa da $|x_n - x_m|$ çok küçük olmayabilir.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

buna bir örnektir;

$$|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{k+1}$$

olur, dolayısıyla çok küçülür ama m kaç olursa olsun, n'yi çok büyük alarak $|x_n - x_m|$ sayısını dilediğimiz kadar büyütebiliriz, örneğin 1'den büyük yapabiliriz. (Bkz. Bölüm 7.2.)

7.48. Öte yandan eğer her k için

$$|x_k - x_{k+1}| < \frac{1}{2^k}$$

ise o zaman $(x_n)_n$ dizisi Cauchy olur. Nitekim $n > m$ olsun.

$$x_m - x_n = (x_m - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_{m+2}) + \cdots + (x_{n-1} - x_n)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_{m+2}| + \cdots + |x_{n-1} - x_n|\\ &\leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\\ &= \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}}\right)\\ &= \frac{1}{2^m}\frac{1 - 1/2^{n-m}}{1/2} = \frac{1}{2^{m-1}}(1 - 1/2^{n-m}) < \frac{1}{2^{m-1}}\end{aligned}$$

olur. Demek ki verilmiş bir ϵ için N'yi $N > 1/\epsilon$ olacak biçimde seçersek, her $n > m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^N} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

olur.

7.49. Her $n > 0$ için $a_n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ olsun, yani a_n bir rakam olsun. a_0 da herhangi bir doğal sayı olsun.

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

tanımını yapalım. Daha ekonomik bir yazılımla:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}.$$

$(x_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu kanıtlayalım. $\epsilon > 0$ herhangi bir pozitif gerçel sayı olsun.

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

eşitsizliğinin yeterince büyük n ve m göstergeçleri için doğru olduğunu kanıtlayacağız. Sanki bu dediğimiz doğruymuş gibi davranıp, bu eşitsizliğin doğru olması için n ve m'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulalım. $n \geq m$ varsayımını yapabiliriz çünkü

$$|x_n - x_m| = |x_m - x_n|.$$

Şimdi $|x_n - x_m|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i} - \sum_{i=1}^{m} a_i 10^{-i}\right| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i}\right|\\ &= \sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i} \leq \sum_{i=m+1}^{n} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \cdot \sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i}\\ &= 9 \cdot 10^{-m-1} \sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i+m+1} = 9 \cdot 10^{-m-1} \sum_{j=0}^{n-m-1} 10^{-j}\\ &= 9 \cdot 10^{-m-1} \sum_{j=0}^{n-m-1} \frac{1}{10^j} = 9 \cdot 10^{-m-1} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-m}}}{1 - \frac{1}{10}}\\ &= 9 \cdot 10^{-m-1} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-m}}}{\frac{9}{10}} = 10^{-m}\left(1 - \frac{1}{10^{n-m}}\right) \leq 10^{-m}.\end{aligned}$$

Üçüncü satırda son eşitlikte $j = i - m - 1$ değişikliğini yaptık. Dördüncü satırda Önsav 3.14'te kanıtlanan eşitliği $a = 1/10$ için kullandık.

Yukardaki hesaptaki eşitsizliklerin her biri son derece ekonomiktir: İkinci satırdaki eşitsizlik zorunlu bir eşitsizliktir, çünkü a_i'lerin her biri bal gibi de 9 olabilirler. Son satırdaki eşitsizlik de zorunlu, çünkü m sabit kalıp n çok büyüdüğünde (sonsuza gittiğinde), $1 - 1/10^{n-m}$ sayısı 1'e kadar dayanır.
Bu hesaptan, 10^{-m}'yi ϵ'dan küçük yapmamız gerektiğini anlıyoruz.

$$0 < 10^{-1} < 1$$

olduğundan, Teorem 6.1'e göre,

$$\lim_{m\to\infty} 10^{-m} = 0$$

olur. Dolayısıyla öyle bir N vardır ki, her $m > N$ için, $10^{-m} < \epsilon$ olur. □

Alıştırma 7.50. $0 \le c < 1$ *olsun.* $(a_n)_n$ *dizisinin terimleri* $n \ge 1$ *için* $|a_{n+1} - a_n| < c^n$ *eşitsizliğini sağlasın. O zaman* $(a_n)_n$ *dizisi bir Cauchy dizisidir.* **İpucu:** Örnek 48.

Görüldüğü gibi bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu kanıtlamak her zaman kolay olmayabilir. Ama çoğu zaman bir dizinin limiti bilinemeyeceğinden, bilinebilse de bulmak kolay olmayabileceğinden, Cauchy dizisi kavramı çok yararlıdır.

İlk paragrafta her yakınsak dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu söyledik ve bunun edebi bir kanıtını verdik. Bunu matematiksel olarak kanıtlayalım:

Teorem 7.7. *Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.*

Kanıt: $(x_n)_n$ yakınsak bir dizi olsun. $\epsilon > 0$, herhangi bir pozitif gerçel sayı olsun. Dizinin limitine a diyelim. Demek ki, öyle bir N doğal sayısı vardır ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \epsilon/2$$

olur. Dolayısıyla, $n, m > N$ için,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \le |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Kanıt tamamlanmıştır. □

Sonuç 7.8. $(a_n)_n$ *bir dizi olsun.*

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

olsun. Eğer $(s_n)_n$ *dizisi yakınsaksa* $(a_n)_n$ *dizisi* 0*'a yakınsar.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun. $(s_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan, bir Cauchy dizisidir, dolayısıyla, her $n, m > N$ için,

$$|s_m - s_n| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N vardır. Böyle bir N'yi sabitleyelim. Eğer $n > N+1$ ise, yukardaki m yerine $n-1$ alarak,

$$|s_n - s_{n-1}| < \epsilon$$

buluruz. Ama $s_n - s_{n-1} = a_n$ olduğundan, bu da $|a_n| < \epsilon$ demek olur ve böylece aradığımız sonuç kanıtlanır.

İkinci Daha Basit Kanıt: $a_n = s_n - s_{n-1}$ olduğundan ve $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$ olduğundan, sonuç hemen çıkar. □

Sonuç 7.9. *Eğer $(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa, terimleri*

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

olarak tanımlanan $(s_n)_n$ dizisi yakınsak değildir. □

Yukardaki sonuçların tersi doğru değildir, yani bir $(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsayabilir ama terimleri,

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

olarak tanımlanan $(s_n)_n$ dizisi yakınsamayabilir. Örneğin, $n \geq 1$ için,

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

alırsak $(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsar ama terimleri

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

olan dizi bildiğimiz gibi sonsuza gider (Bölüm 7.2), yakınsamaz.

Bir Cauchy dizisinin terimleri birbirlerine çok yakın olduğundan, bir Cauchy dizisinin sınırlı olması şaşırtıcı olmamalı. Nitekim öyledir, Cauchy dizileri sınırlıdır. Bunu şimdi kanıtlayacağız.

Birkaç sayfa sonra, Teorem 8.5'te her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayacağız, bundan da her Cauchy dizisinin sınırlı olduğu çıkar, ama bu bir kanıt sayılmaz çünkü zaten her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlamak için aşağıdaki bu olguya gereksineceğiz.

Teorem 7.10. *Her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. Tanımdaki ϵ'u, örneğin, 1 seçelim. Demek ki, öyle bir N göstergeci vardır ki, her $n, m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < 1$$

olur. Demek ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - x_{N+1}| < 1$$

olur; bir başka deyişle,

$$x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1$$

olur. Şimdi

$$b = \max\{x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_N,\, x_{N+1} + 1\}$$

ve

$$a = \min\{x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_N,\, x_{N+1} - 1\}$$

olsun. O zaman, her n için, $a \leq x_n \leq b$ olur. □

Alıştırmalar

7.51. Eğer $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse $(|x_n|)_n$ dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.52. Eğer $(x_n^2)_n$ bir Cauchy dizisiyse $(|x_n|)_n$ dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.53. Monoton ve sınırlı bir dizinin Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.54. İki Cauchy dizisinin toplamının, farkının ya da çarpımının da Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.55. Eğer $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse ve $p(X)$ bir polinomsa, $(p(x_n))_n$ dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.56. $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\{n \in \mathbb{N} : x_n < a\}$ ve $\{n \in \mathbb{N} : x_n > a\}$ kümeleri sonsuzsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsadığını kanıtlayın.

7.57. Eğer $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse ve 0'a yakınsamıyorsa, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$ eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı ve bir $\delta > 0$ olduğunu kanıtlayın.

7.58. Eğer $(x_n)_n$ Cauchy dizisi 0'a yakınsamıyorsa ve her terimi 0'dan değişikse, her n için, $|x_n| > \delta_1$ eşitsizliğinin doğru olduğu pozitif bir δ_1 sayısının varlığını kanıtlayın.

7.59. Eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ birer Cauchy dizisiyse, her n için $y_n \neq 0$ ise ve $(y_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa, $(x_n/y_n)_n$ dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.60. Diziler kümesi üzerine şu ilişkiyi tanımlayalım:

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow (x_n - y_n)_n \text{ Cauchy dizisidir.}$$

Bu ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayın.

7.61. Diziler kümesi üzerine şu ilişkiyi tanımlayalım:

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Bu ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayın.

7.62. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Sabit bir $r \in (0, 1)$ ve her n için, $|x_{n+1}| \leq r|x_n|$ olsun. $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)_n$ dizisinin Cauchy olduğunu kanıtlayın.