5. Yakınsak Dizilerle Sıralama ve İşlemler

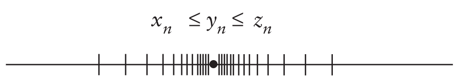
5.1 Yakınsak Diziler ve Sıralama

Bu bölümde, gerçel sayıların sıralamasıyla dizilerin limitleri arasındaki ilişkiyi kısaca irdeleyeceğiz. Bu ilişkinin özü aşağıdaki teoremde gizlidir.

Teorem 5.1 (Sandviç Teoremi)**.** *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun.*

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

eşitsizlikleri belli bir göstergeçten sonra doğruysa ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı sayıya yakınsıyorlarsa, $(y_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve diğer dizilerle aynı sayıya yakınsar.



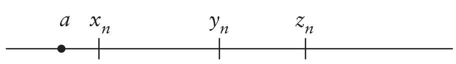
Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri a'ya yakınsasınlar. $(y_n)_n$ dizisinin de a'ya yakınsadığını kanıtlayacağız, yani $\epsilon > 0$, herhangi bir pozitif sayıysa,

$$|y_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğinin her $n > N$ için doğru olduğu bir N sayısı bulacağız. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$|y_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız.



Bunun için $|y_n - a|$ ifadesiyle oynayacağız. Teoremin önermesindeki eşitsizlikler M'den büyük göstergeçler için doğru olsun. Hesaplarda kolaylık olması için $n > M$ alalım. Bu kısıtlama yetmez ama bu sayede, hiç olmazsa,

$$\begin{aligned} |y_n - a| &= |a - x_n + x_n - y_n| \le |a - x_n| + |x_n - y_n| \\ &= |a - x_n| + (y_n - x_n) \le |a - x_n| + (z_n - x_n) \\ &\le |a - x_n| + |z_n - a| + |a - x_n| = 2|a - x_n| + |z_n - a| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Demek ki en sondaki

$$2|a - x_n| + |z_n - a|$$

ifadesini ϵ'dan küçük yapmak yeterli. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için

$$|x_n - a| = |a - x_n| < \epsilon/3$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için

$$|a - z_n| < \epsilon/3$$

olur. $N = \max\{M, N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise,

$$|y_n - a| = 2|a - x_n| + |z_n - a| < 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

elde ederiz ve kanıt böylece tamamlanır. □

Sandviç Teoremi'nin İkinci Kanıtı: Bir $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. a, $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizilerinin limiti olsun. O zaman büyük n'ler için, hem $a - \epsilon < x_n$ hem de $z_n < a + \epsilon$ olur. (Neden?) Demek ki belki biraz daha büyük n'ler için

$$a - \epsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \epsilon$$

olur. Bu büyük n'ler için $a - \epsilon < y_n < a + \epsilon$, yani $|y_n - a| < \epsilon$ olur. □

Örnekler

5.1. $\lim_{n\to\infty} n!/n^n = 0$ *eşitliğini kanıtlayın.*
Kanıt: Örnek 3.30'a göre,

$$\frac{2^n n!}{n^n} < 3.$$

Demek ki $n \ge 4$ için,

$$0 \le \frac{n!}{n^n} < \frac{3}{2^n} \le \frac{3}{n^2}.$$

(Neden?) En sağdaki terim 0'a yakınsadığından, Sandviç Teoremi'ne göre istenen limit 0 olmak zorundadır. Meraklı okur bu örneği tek başına, Örnek 3.30'u kullanmadan yapmaya çalışmalıdır.

5.2. *Aşağıdaki eşitliği kanıtlayın:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = 0.$$

Kanıt: Gene Sandviç Teoremi'ni kullanacağız. Ama Örnek 3.3 de yardım edecek. Önce

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

eşisizliğini gözlemleyelim. Sonra da Örnek 3.3'te yeterince büyük n sayıları için elde edilen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \le \frac{1}{n}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

eşitsizliğini görelim. Demek ki,

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \le \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Birinci ve sonuncu diziler 0'a gittiğinden, ortadaki terim de 0'a gider. □

Alıştırmalar

5.3. Terimleri

$$\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}}{n}$$

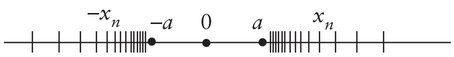
olan dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

5.4. Terimleri

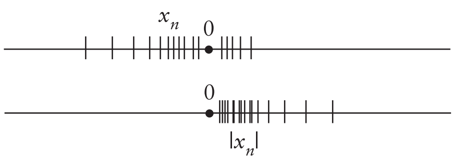
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

olan dizinin 1 ile 2 arasında değer aldığını ve arttığını kanıtlayın.

Önsav 5.2. i. *$(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, $(-x_n)_n$ dizisinin $-a$'ya yakınsaması gerek ve yeter koşuldur.*



ii. *$(x_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsaması için, $(|x_n|)_n$ dizisinin 0'a yakınsaması gerek ve yeter koşuldur.*



iii. *$(x_n)_n$, 0'a yakınsayan bir diziyse ve yeterince büyük n göstergeçleri için (yani belli bir M göstergecinden sonra) $|y_n| \le |x_n|$ ise, $(y_n)_n$ dizisi de 0'a yakınsar.*

iv. *$(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, $(|x_n|)_n$ dizisi $|a|$'ya yakınsar.*

Kanıt: i. Önermenin sadece bir yönünü kanıtlamak yeterli elbette. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın ve $\epsilon > 0$ olsun. N, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlatan göstergeç olsun. O zaman her $n > N$ için,

$$|-x_n - (-a)| = |-x_n + a| = |x_n - a| < \epsilon$$

olur ve kanıtımız tamamlanır.

ii. $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$ olduğundan, yukardakinden ($a = 0$ alın) ve Sandviç Teoremi'nden, $(|x_n|)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa, $(x_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığı anlaşılır. Şimdi $(x_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını varsayalım. $\epsilon > 0$ olsun. N, her $n > N$ için,

$$|x_n| = |x_n - 0| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlatan göstergeç olsun. O zaman her $n > N$ için,

$$\big||x_n| - 0\big| = \big||x_n|\big| = |x_n| < \epsilon$$

olur ve kanıtımız tamamlanır.

iii. Yeterince büyük n'ler için $0 \leq |y_n| \leq |x_n|$ olduğundan ve sabit 0 dizisi 0'a yakınsadığından, Sandviç Teoremi'nden $(y_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığı çıkar.

iv. $\epsilon > 0$ olsun. Yeterince büyük n göstergeçleri için,

$$\big||x_n| - |a|\big| < \epsilon$$

eşitsizliğini göstermeliyiz. Önsav 1.1.ix'a göre,

$$\big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a|$$

olduğundan ve sağdaki $|x_n - a|$ terimi yeterince büyük n göstergeçleri için ϵ'dan küçük olduğundan, kanıtımız tamamlanmıştır. □

Öte yandan (iv)'ün tersi yanlıştır. Örneğin, $x_n = (-1)^n$ ise $(|x_n|)_n$ dizisi 1'e yakınsar ama $(x_n)_n$ dizisi hiçbir sayıya yakınsamaz.

Şimdi de yakınsak bir dizinin terimlerinin sınırsız bir biçimde artıp azalamayacağını kanıtlayalım.

Teorem 5.3. *Yakınsak bir dizi sınırlıdır, yani eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa, o zaman öyle bir B vardır ki, her n için $|x_n| < B$ olur.*

Kanıt: Kanıtın anafikri çok basit: Eğer bir dizi a'ya yakınsıyorsa, bu dizinin terimleri a'dan sürekli uzaklaşamazlar...

Bir a sayısına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. Yakınsamanın tanımında ϵ'u 1'e eşit alalım. 1, 0'dan büyük bir sayı olduğundan buna hakkımız var. O zaman dizinin terimleri belli bir N göstergecinden sonra $(a-1,\, a+1)$ aralığına düşer, yani her $n > N$ için, $x_n \in (a-1,\, a+1)$ olur.

Geriye sonlu sayıda $x_0,\, x_1, \ldots, x_N$ terimi kalır. Bunlar da sınırlı bir aralığa sığarlar elbette. Daha biçimsel olalım ve

$$A = \min\,\{x_0,\, x_1, \ldots, x_N,\, a\} - 1,$$
$$B = \max\,\{x_0,\, x_1, \ldots, x_N,\, a\} + 1$$

tanımlarını yapalım. O zaman her x_n terimi (A, B) aralığına düşer. Demek ki dizi sınırlıdır. □

Demek ki sınırlı olmayan bir dizi ıraksak olmak zorundadır. Örneğin,

$$0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4, \ldots$$

doğal sayı dizisi ıraksaktır. Öte yandan, her sınırlı dizi yakınsak değildir. Örneğin,

$$1,\, -1,\, 1,\, -1,\, 1,\, -1, \ldots$$

diye devam eden dizi sınırlıdır ama yakınsak değildir.

Alıştırmalar

5.5. Sınırlı diziler kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın.

5.6. $(x_n)_n$, hiçbir terimi 0 olmayan bir dizi olsun. $(1/x_n)_n$ dizisi illa sınırlı olmak zorunda mıdır?

5.7. $(x_n)_n$, hiçbir terimi 0 olmayan bir dizi olsun. $(1/x_n)_n$ dizisinin sınırlı olması için,

her n için, $0 < \delta < |x_n|$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

5.8. $(x_n)_n$ dizisi sınırlıysa ve $(y_n)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa, $(x_n y_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

5.9. $(x_n)_n$ dizisi sınırlıysa ve $(y_n)_n$ dizisi yakınsaksa, $(x_n y_n)_n$ dizisi de yakınsak olmak zorunda mıdır?

5.2 Yakınsak Dizilerle İşlemler

Bu bölümde yakınsak dizilerle toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri arasındaki ilişkiyi göreceğiz.

Teorem 5.4. *İki yakınsak dizinin toplamı, farkı, çarpımı, (mümkün olduğunda) kesirli bir kuvveti ve birbirine bölümü de yakınsaktır ve dizilerin limiti tahmin edilen sayıdır. Daha net bir ifadeyle, $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki yakınsak diziyse ve $q \in \mathbb{Q}$ ise $(x_n + y_n)_n$, $(x_n - y_n)_n$, $(x_n y_n)_n$ dizileri de yakınsaktır ve*

i. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$,
ii. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} yn$,
iii. $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n)$,
eşitlikleri geçerlidir. (iii)*'ün sonucu olarak her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $(rx_n)_n$ *dizisi de yakınsaktır ve*
iv. $\lim_{n\to\infty} rx_n = r\,(\lim_{n\to\infty} x_n)$ *olur.*
v. *Ayrıca eğer* $(y_n)_n$ *dizisinin her terimi* 0*'dan farklıysa ve* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *ise, o zaman* $(x_n/y_n)_n$ *dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$$

olur.
vi. *Ayrıca* x_n^q *ve* $(\lim_{n\to\infty} x_n)^q$ *sayıları tanımlı olduğunda* $(x_n^q)_n$ *dizisi yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^q = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^q$$

olur.

Kanıt: Bu teoremin kanıtı biraz uzun sürecek, sayfa 93'de bitecek. Pek teoremin zorluğundan kaynaklanmayacak bu uzunluk, biz de özellikle uzun uzun anlatarak, engelleri işaret ederek, zorluklara parmak basarak, ayrıntılara girerek kanıtlayacağız. Teoremi kanıtlarken kanıtlayacağımız önsavlar da kendi başlarına önemli olacaklar.

Teorem 5.4.i'in Kanıtı: Önce,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğini kanıtlayalım. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki yakınsak dizi olsun. Bu dizilerin sırasıyla a ve b sayılarına yakınsadıklarını varsayalım.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$$

eşitliğini kanıtlayacağız.

Kanıtımız her zamanki gibi başlayacak: $\epsilon > 0$, herhangi bir sayı olsun.

$$(x_n + y_n)_n$$

dizisinin $a + b$ sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, öyle bir N sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon$$

olsun. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukardaki eşitsizliğe bir biçimde

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını sokuşturmalıyız, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim.

Tekrar:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için n'nin ne kadar büyük seçilmesi gerektiğini bulacağız. Her zaman olduğu gibi sol taraftaki ifadeyle oynayacağız. O ifadeden birazcık daha büyük bir ifade bulacağız. Bulduğumuz bu büyük ifadeyi,
1. Varsayımlarımızı kullanacağımız biçimde ve
2. n'yi yeterince büyük seçerek dilediğimiz kadar küçülteceğimizden emin olacağımız biçimde değiştireceğiz.

Başlayalım: Üçgen eşitsizliğinden

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

elde ederiz. Şimdi, $|(x_n + y_n) - (a + b)|$ ifadesi yerine,

$$|x_n - a| + |y_n - b|$$

ifadesini ϵ'dan küçük yapmaya çalışabiliriz. Eğer,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

ifadelerinin her biri $\epsilon/2$'den küçük olursa, toplamları ϵ'dan küçük olur. Bunu yapmasını biliyoruz, çünkü x_n'nin limiti a ve y_n'nin limiti b...

x_n'nin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 doğal sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \epsilon/2$$

olur. Biz her iki eşitsizliğin birden doğru olmasını istediğimizden, n'yi hem N_1'den hem de N_2'den büyük almalıyız. Dolayısıyla, eğer $N = \max\{N_1, N_2\}$ ise, $n > N$ olduğunda, n, hem N_1'den hem de N_2'den büyük olur ve yukardaki iki eşitsizliğin ikisi birden doğru olur.

Teorem 5.4.ii'nin Kanıtı: Önsav 5.2.i'den ve yukardakinden çıkar. Ama yukardaki kanıt yöntemini toplama yerine çıkarma işlemine de uygulayabiliriz: $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, a ve b yukardaki gibi olsunlar. $\epsilon > 0$, herhangi bir sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|(x_n - y_n) - (a - b)| &= |(x_n - a) + (b - y_n)| \leq |x_n - a| + |b - y_n| \\ &= |x_n - a| + |y_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

olur. İkinci eşitliğin de kanıtı tamamlanmıştır.

Teorem 5.4.iii'ün Kanıtı: Üçüncü eşitliğin kanıtı ne yazık ki yukardakiler kadar doğrudan çıkmıyor. Biz gene de tüm iyimserliğimizi takınıp yukardaki gibi doğrudan bir kanıta girişelim.

$(x_n)_n$, $(y_n)_n$, a ve b yukardaki gibi olsunlar. $(x_n y_n)_n$ dizisinin ab sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı seçildiğinde, öyle bir N sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|x_n y_n - ab| < \epsilon$$

olsun. Bir başka deyişle, $|x_n y_n - ab| < \epsilon$ eşitsizliğinin geçerli olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmaya çalışacağız. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek, $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukardaki

$$|x_n y_n - ab| < \epsilon$$

eşitsizliğine bir biçimde $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını sokuşturabilmeliyiz, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim. Her zamanki gibi sol taraftaki $|x_n y_n - ab|$ ifadesiyle oynamalıyız. Bu ifadeyi hafifçe büyüterek, işin içine $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ ifadelerini sokmalıyız. Bunu yapmak için matematikte sık sık kullanılan bir hile vardır. İşte o hile

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\ &\leq |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\ &= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|.\end{aligned}$$

Şimdi en sağdaki $|x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|$ toplamını ϵ'dan küçük yapmalıyız. Ama bu mümkün müdür? Her iki

$$|x_n||y_n - b| \text{ ve } |x_n - a||b|$$

terimini de $\epsilon/2$'den küçük yapabilirsek, o zaman bunların toplamları da

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

sayısından küçük olur ve kanıtımızı başarıyla tamamlamış oluruz.

Önce görece kolay olan $|x_n - a||b|$ terimini (n'yi yeterince büyük yaparak) $\epsilon/2$'den küçük yapalım. Bunun için, $|x_n - a|$ terimini $\epsilon/2|b|$'den küçük yapmak yeterli. Ama dikkat, eğer $|b| = 0$ ise, $|b|$'ye bölemeyiz... Hiç önemli değil! Bu sorunun çözümü gayet basit:

$$|x_n - a||b| < |x_n - a|(1 + |b|)$$

olduğundan, $|x_n - a|$ terimini

$$\frac{\epsilon}{2(1 + |b|)}$$

sayısından küçük yapmak yeterli! Bunu yapabilir miyiz? Evet! Bu sayı 0'dan büyük olduğundan, öyle bir N_1 sayısı vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2(1 + |b|)}$$

eşitsizliği doğrudur.

Şimdi, $|x_n||y_n - b|$ terimini de $\epsilon/2$'den küçük yapmaya çalışmalıyız.

$$|y_n - b|$$

terimini istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Ama bu yetmez. Çünkü bu terimin yanına yapışmış bir de $|x_n|$ terimi var. Eğer $|x_n|$ çok büyürse, o zaman bu terimi, küçüldüğünü bildiğimiz $|y_n - b|$ terimiyle çarptığımızda, çarpımın çok küçüleceğinden pek emin olamayız. Örneğin, $|y_n - b|$ terimi $1/n$ gibi küçülebilir ama $|x_n|$ terimi n gibi artabilir. O zaman da çarpımları olan $|x_n||y_n - b|$ terimi n büyükken 1 civarında dolanır durur ve hiçbir zaman $\epsilon/2$ kadar küçülemez. (ϵ'un küçük bir sayı olduğunu bir kez daha anımsayın.)

Neyse ki böyle bir sorunla karşılaşmayız, çünkü yakınsak bir dizi olduğundan, $(x_n)_n$ dizisi sınırlıdır (Teorem 5.3) ve her $|x_n|$ belli bir $B > 0$ sayısından küçüktür. Demek ki,

$$|x_n||y_n - b| < B|y_n - b|$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi en sağdaki $B|y_n - b|$ ifadesini $\epsilon/2$'dan küçük yapmak yeterlidir. $B|y_n - b|$ ifadesini $\epsilon/2$'den küçük yapmak için ise, $|y_n - b|$ ifadesini

$$\frac{\epsilon}{2B}$$

sayısından küçük yapmak yeterlidir. (Bunu başarabiliriz dostum!)

Ne de olsa bu sayı pozitiftir ve $|y_n - b|$ sayısı yeterince büyük n'ler için bu sayının altına iner: Öyle bir N_2 sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2B}$$

eşitsizliği doğrudur. Demek ki,

$$|x_n||y_n - b| < B|y_n - b| < B\frac{\epsilon}{2B} = \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \le |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab|\\ &= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b| < B|y_n - b| + |x_n - a||b|\\ &< B|y_n - b| + |x_n - a|(1 + |b|)\\ &< B\frac{\epsilon}{2B} + \frac{\epsilon}{2(1+|b|)}(1 + |b|) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

olur. (iii)'ün kanıtı bitmiştir.

Teorem 5.4.iv'ün Kanıtı: Bir önceki maddede $y_n = r$ almak yeterli.

Teorem 5.4.v'in Kanıtı: Eğer aşağıdaki teoremi kanıtlayabilirsek, o zaman (iii)'ten (v) çıkar.

Teorem 5.4'ün kanıtına devam etmeden önce şu sonuca ihtiyacımız var:

Teorem 5.5. *Eğer $(x_n)_n$ yakınsak dizisinin her terimi 0'dan farklıysa ve dizi 0'a yakınsamıyorsa, o zaman $(1/x_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

olur. Ayrıca eğer $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa $(1/x_n)_n$ dizisi ıraksaktır.

Teorem 5.5'i kanıtlamadan önce de iki önsava ihtiyacımız var. Her iki önsavın da kendi başına önemi vardır.

Önsav 5.6. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b'ye yakınsasınlar. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$ olur.*

Kanıt: $z_n = x_n - y_n$ tanımını yaparak, kanıtlanmış olan Teorem 5.4.ii'ye göre,

"Eğer $(z_n)_n$ *dizisi c'ye yakınsıyorsa ve belli bir göstergeçten sonra hep $z_n \geq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $c \geq 0$ olur*"

önermesini kanıtlamanın yeterli olduğunu görürüz. Tam tersine, c'nin negatif olduğunu varsayalım. Demek ki $c = -|c|$. Şimdi, $n > N_0$ için, $z_n \geq 0$ olsun. Varsayıma göre böyle bir N_0 vardır. Ayrıca $n > N_1$ için,

$$|z_n - c| \leq \frac{|c|}{2}$$

olsun. $(z_n)_n$ dizisi c'ye yakınsadığından böyle bir N_1 vardır; bunu görmek için, yakınsamanın tanımında $\epsilon = |c|/2 > 0$ almak yeterli. Demek ki,

$$-\frac{|c|}{2} \leq z_n - c \leq \frac{|c|}{2}.$$

Dolayısıyla $z_n \leq c + |c|/2$. Şimdi n, hem N_0'dan hem de N_1'den büyük bir göstergeç olsun. O zaman,

$$z_n \leq c + \frac{|c|}{2} = -|c| + \frac{|c|}{2} = -\frac{|c|}{2} < 0,$$

çelişki. □

Önsav 5.7. i. *Eğer $(x_n)_n$ yakınsak dizisi 0'a yakınsamıyorsa, öyle bir N doğal sayısı ve $\delta > 0$ vardır ki, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$ olur. Demek ki böyle bir dizinin ancak sonlu sayıda terimi 0'a eşit olabilir.*
ii. *Eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ama 0'a yakınsamıyorsa ve her terimi 0'dan farklıysa, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her n için, $|x_n| > \delta$ olur.*

Kanıt: Önsav 5.2.ii'ye göre, $(x_n)_n$ yerine $(|x_n|)_n$ dizisini alıp $x_n \geq 0$ eşitsizliğini varsayabiliriz. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın.

Önsav 5.6'ya göre $a \geq 0$ olmalı. Demek ki $a > 0$. Eğer $\epsilon = \frac{a}{2}$ alırsak, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \frac{a}{2}$$

eşitsizliğini, yani

$$-\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir N'nin olduğunu görürüz. Demek ki, $n > N$ için,

$$a - \frac{a}{2} < x_n$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi

$$\delta = \frac{a}{2}$$

alırsak, birinci kısmı kanıtlamış oluruz. İkinci kısma geçelim. Yukardaki δ yerine,

$$\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_1|}{2}, \ldots, \frac{|x_N|}{2}, \frac{a}{2}\right\}$$

alalım. Varsayımdan dolayı $\delta > 0$ olur. Ve a, N ve δ'nın tanımlarından dolayı, her n için, $|x_n| > \delta$ olur. □

Teorem 5.5'in Kanıtı: $a \neq 0$ sayısı $(x_n)_n$ dizisinin limiti olsun. $1/a$ sayısının $(1/x_n)_n$ dizisinin limiti olduğunu göstereceğiz. Her zaman olduğu gibi herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı almakla işe başlayalım. Öyle bir N bulmak istiyoruz ki, her $n > N$ için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$$

olsun. $|1/x_n - 1/a|$ ifadesiyle oynayarak, bu ifadenin ϵ'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Oynamaya başlayalım:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|}.$$

Sağdaki ifadenin payını dilediğimiz kadar küçük yapabiliriz, çünkü $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyor, burada bir sorun yok. Paydadaki a da sabit bir sayı, bu da sorun yaratmaz. Ama x_n sorun yaratabilir, çünkü eğer x_n çok küçülürse, o zaman ifade çok büyüyebilir ve ifadenin ϵ'dan küçük olduğunu kanıtlayamayız. Teoremin doğru olması için $|x_n|$'ler belli bir pozitif sayıdan küçük olmamalı. Bu doğrudur ve $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olmamasından kaynaklanır ve bu yukardaki önsavda kanıtlanmıştır: Önsav 5.7'ye göre, öyle bir $\delta > 0$ var ki, her n için, $|x_n| > \delta$ olur. Şimdi yukardaki hesabı bir adım daha devam ettirebiliriz:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta}.$$

En sağdaki ifadenin ϵ'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulalım. Bu ifadenin ϵ'dan küçük olması için, $|a - x_n|$, $\epsilon|a|\delta$'dan küçük olmalı ve $\epsilon|a|\delta > 0$ olduğundan bunu yapabiliriz: N, her $n > N$ için,

$$|a - x_n| < \epsilon|a|\delta$$

eşitsizliğini sağlayan bir sayı olsun. Şimdi N'den büyük her n için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta} < \frac{\epsilon|a|\delta}{|a|\delta} = \epsilon$$

olur. □

Teorem 5.4.v'in kanıtı da böylece tamamlanmış oldu.

Teorem 5.4.vi'nın Kanıtı: (v)'inci kısımdan dolayı teoremi $q > 0$ için kanıtlamak yeterli. Eğer $q \in \mathbb{N}$ ise sonucumuz (iii)'üncü kısımdan tümevarımla kolaylıkla çıkar.

Önce sorunun $(x_n^q)_n$ dizisinin yakınsaklığını kanıtlamak olduğunu gösterelim. Nitekim eğer bu dizi yakınsaksa, pozitif a ve b doğal sayıları için $q = a/b$ yazarsak,

$$\left(\lim_{x\to\infty} x_n^q\right)^b = \lim_{x\to\infty} x_n^a = \left(\lim_{x\to\infty} x_n\right)^a$$

eşitliğinden istediğimiz kanıtlanır.

$x = \lim_{x\to\infty} x_n$ olsun. Önce $x = 0$ varsayımını yapalım. $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N bulalım ki, her $n > N$ için $|x_n| < \epsilon^{1/q}$ olsun; bu durumda $|x_n^q| = |x_n|^q < \epsilon$ olur. Dolayısıyla $(x_n^q)_n$ dizisi de 0'a yakınsar.

Şimdi de dizinin 0'a yakınsamadığını varsayalım. $u, v \in \mathbb{N}$ ve $v \neq 0$ için $q = u/v$ olsun. Önce $u = 1$ alalım. O zaman, $1/v \leq 1$ olduğundan, Sonuç 3.20'ye göre,

$$(x^{-1}x_n)^{1/v} - 1 \leq \frac{x^{-1}x_n - 1}{v}$$

olur. Ama $(x^{-1}x_n)_n$ dizisi 1'e yakınsadığından, yukardaki eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi istediğimiz kadar küçük yapabiliriz. Demek ki $((x^{-1}x_n)^{1/v})_n$, yani $(x^{-1/v}x_n^{1/v})_n$ dizisi de 1'e yakınsar, yani $(x_n^{1/v})_n$ dizisi $x^{1/v}$ sayısına yakınsar. Buradan da $(x_n^{u/v})_n$ dizisinin $x^{u/v}$ sayısına yakınsadığı çıkar. □

Teorem 5.4'ü, "limit alma işlemi toplamaya, çıkarmaya, çarpmaya, bölmeye ve kesirli üs almaya saygı duyuyor" ya da "limit alma işlemi toplamaya, çıkarmaya, çarpmaya ve bölmeye dağılıyor" ya da ya da "limit alma işlemi toplamayla, çıkarmayla, çarpmayla, bölmeyle be üs almayla uyumlu" gibi ifadelerle ifade edebiliriz.

Örnekler

5.10. $a_n = (-1)^n$ ve $b_n = (-1)^{n-1}(1 + 1/n)$ olsun. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri ıraksaktır ama $(a_n + b_n)_n$, $(a_nb_n)_n$ ve $(a_n/b_n)_n$ dizileri yakınsaktır.

5.11. İki basit örnek:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8}{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{8}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{8}{3}\times 0 = 0.$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(5 - \frac{8}{3n} + \frac{7}{n^2}\right) = 5.$$

5.12. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$ limitini bulun.

Çözüm: Limiti alınacak ifadenin "eşleniği" denen şeyle çarpıp bölelim:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n} - n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Alıştırmalar

5.13. a_0 ve a_1 verilmiş olsun ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = ua_n + va_{n-1}$ olsun. Eğer $(a_n)_n$ dizisinin limiti varsa ve 0'dan farklıysa, u ve v sayıları hakkında ne söyleyebilirsiniz?

5.14. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right)$ limitini bulun.

Şimdi bir polinomu bir dizide değerlendirip, bu değerlerin limitine bakalım. Şimdi, limit alma işlemiyle bir diziyi bir polinomda değerlendirme işlemlerinin yer değiştirebildiklerini göreceğiz, bir başka deyişle bir dizinin limitini alıp değerlendirmekle, diziyi değerlendirip limitini almak aynı sonucu verir:

Teorem 5.8 (Polinomlarla Yakınsaklık)**.** *$(a_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. $p(X)$ de herhangi bir polinom olsun. O zaman, $(p(a_n))_n$ dizisi $p(a)$ sayısına yakınsar.*

Eğer $q(X)$ herhangi bir başka polinomsa, $q(a) \neq 0$ ise ve her n için $q(a_n) \neq 0$ ise, o zaman

$$\left(\frac{p(a_n)}{q(a_n)}\right)_n$$

dizisi $p(a)/q(a)$ sayısına yakınsar.

Kanıt: Bu da Teorem 5.4'ün doğrudan bir sonucudur. □

Aşağıdaki alıştırmaların birçoğu çok kolay değildir ve çözümü de her zaman doğal gelmeyebilir. (Yani tek başınıza yapamazsanız moraliniz bozulmasın!) Ancak limit kavramının iyice oturması için her birini ayrı ayrı denemekte ve sonra çözüme bakmakta yarar var.

Örnekler

5.15. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+5}{4n^2-5n+1}.$$

Çözüm: Payı ve paydayı n^2 sayısına bölerek ve yukarda kanıtlanan teoremi $a_n = 1/n$ dizisine uygulayarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+5}{4n^2-5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-4/n+5/n^2}{4-5/n+1/n^2} = \frac{3}{4}$$

buluruz. □

5.16. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}\right).$$

Çözüm: Limiti alınacak ifadenin paydalarını eşitleyip elde ettiğimize bakalım:

$$\frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} = \frac{n(n+2)(n^2+1)-n^3(n+1)}{(n+1)(n^2+1)} = \frac{n^3+n^2+2n}{(n+1)(n^2+1)}.$$

Tarafları n^3'e bölersek limitin 1 olduğunu görürüz.

5.17. *$0 < q < p$ iki kesirli sayı olsun.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p - n^q}{(n+1)^p - (n+1)^q} = 1$$

eşitliğini kanıtlayın.

Kanıt: Basit bir hesap:

$$\begin{aligned}\frac{n^p - n^q}{(n+1)^p - (n+1)^q} &= \frac{n^{p-q} - 1}{(n+1)^p/n^q - (1+1/n)^q}\\ &= \frac{n^{p-q} - 1}{(n+1)^{p-q}(n+1)^q/n^q - (1+1/n)^q}\\ &= \frac{1 - 1/n^{p-q}}{(1+1/n)^{p-q}(1+1/n)^q - (1+1/n)^q/n^{p-q}} = 1.\end{aligned}$$

Bu konuda Örnek 3.2'e de bakabilirsiniz. Dizi 1'e "alttan yakınsar".

5.18. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right).$$

Çözüm: Paydadaki $n^2 + i$ sayıları yerine önce $n^2 + 1$, sonra da $n^2 + n$ koyalım, bakalım bir şeyler çıkacak mı. Önce $n^2 + 1$ koyalım:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demek ki Sandviç Teoremi'ne göre,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} n \le \frac{1}{2}.$$

Şimdi de $n^2 + n$ koyalım:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+n} = \frac{1}{n^2+n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2+n} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Gene Sandviç Teoremi'ne göre,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} n \ge \frac{1}{2}.$$

Böylece limitin $1/2$ olduğu çıkar. □

5.19. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{n^3}.$$

Çözüm: Oldukça kolay ama belki biraz uzunca bir hesap:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{n^3} &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2n^3} \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i)\\ &= \frac{1}{2n^3} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \right) = \frac{1}{2n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)\end{aligned}$$

ve gerisi Teorem 5.8'den kolaylıkla çıkar. (Sonuç 1/6 çıkar.) □

5.20. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ *ise*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}}{n} = \ell$$

eşitliğini kanıtlayın.

Kanıt: $b_n = a_n - \ell$ tanımını yaparak, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_0 + \cdots + b_{n-1}}{n} = 0$$

eşitliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Eğer $M < n$ ise,

$$\frac{b_0 + \cdots + b_{n-1}}{n} = \frac{b_0 + \cdots + b_{M-1}}{n} + \frac{b_M + \cdots + b_{n-1}}{n}$$

eşitliğinden

$$\left|\frac{b_0 + \cdots + b_{n-1}}{n}\right| \le \frac{|b_0 + \cdots + b_{M-1}|}{n} + \frac{|b_M| + \cdots + |b_{n-1}|}{n}$$

eşitsizliği çıkar. Şimdi $\epsilon > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğundan M'yi,

$$i \ge M \Rightarrow |b_i| < \epsilon/2$$

önermesi doğru olacak biçimde seçebiliriz. Demek ki $n > M$ için,

$$\frac{|b_M| + \cdots + |b_{n-1}|}{n} < \frac{(n-M)\epsilon/2}{n} \le \frac{\epsilon}{2}$$

olur. M'yi böylece seçtikten sonra, P sayısını

$$\frac{|b_0 + \cdots + b_{M-1}|}{P} < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde seçelim. $N = \max\{M, P\}$ olsun. O zaman her $n > N$ için,

$$\left|\frac{b_0 + \cdots + b_{n-1}}{n}\right| \le \frac{|b_0 + \cdots + b_{M-1}|}{n} + \frac{|b_M| + \cdots + |b_{n-1}|}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olur ve bu da istediğimizi kanıtlar. □

5.21. $\lim_{n\to\infty}(1 + n + n^2)^{1/n} = 1$ *eşitliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Elbette $(1 + n + n^2)^{1/n} \ge 1$. Demek ki bir $r_n \ge 0$ sayısı için

$$(1 + n + n^2)^{1/n} = 1 + r_n$$

yazabiliriz. $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ eşitliğini göstermemiz lazım. $n \ge 3$ olsun. Her iki tarafın da n'inci kuvvetini alarak ve binom teoremini kullanarak,

$$1 + n + n^2 = (1 + r_n)^n = 1 + nr_n + \frac{n(n-1)}{2!}r_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}r_n^3 + \cdots + r_n^n$$

ve dolayısıyla

$$1 + n + n^2 \ge 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}r_n^3$$

elde ederiz. Buradan da

$$0 < r_n^3 < \frac{6(n + n^2)}{n(n-1)(n-2)}$$

bulunur. Bundan ve bu bölümde yapılanlardan $\lim_{n\to\infty} r_n^3 = 0$ çıkar. Teorem 5.4.vi'dan dolayı $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ bulunur ve bu da istediğimizi kanıtlar.

5.22. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}.$$

Çözüm: Bir zekâ pırıltısı gerekiyor:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)(k+1)k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k^2+3k+2)k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k^2+3k+2)-1}{(k^2+3k+2)k!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+2)!}\right)\\ &= \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

ve sonuç $1/1! + 1/2! = 3/2$ çıkar. □

5.23. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot 5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right).$$

Çözüm: Limiti bulunması gereken ifade,

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{2}{i(i+1)}\right).$$

Parantezlerin herbirini hesaplamaktan başka çare yok sanki:

$$1-\frac{2}{i(i+1)} = \frac{(i+2)(i-1)}{i(i+1)}.$$

Bu parantezleri $i = 2$'den $i = n+1$'e kadar çarpınca birçok sadeleştirmeler olur ve geriye

$$\frac{1}{3}\times\frac{n+2}{n}$$

kalır. Bunun limiti de $1/3$ olur. □

Alıştırmalar

5.24. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+7}{3n-5}\right)^3,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{n+1},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{n^{2/3}+1},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{n^{1/3}+1}.$$

5.25. Aşağıdaki limitleri kanıtlayın:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\frac{1}{2}.$$

(İpucu: Eşlenikleriyle çarpıp bölün.)

5.26. $k\in\mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Binom açılımı.)

5.27. Sandviç Teoremi'ni kullanarak

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}$$

limitini bulun. (Bkz. Örnek 5.18.)

5.28. Genel terimi

$$x_n = \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}$$

olan dizi 2'ye yakınsar. Hesap makinanızı ya da Excel'i kullanarak buna ikna olun. Bu aşamada bunu kanıtlamanız imkânsız olabilir ama denemenin kimseye bir zararı olmaz, hatta böylece gelecek sayfalarda yapacaklarımızın değerini anlamış olursunuz. Bkz. Örnek 14.39.

5.29. Aşağıdaki limiti bulun (bkz. Örnek 5.22):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}.$$

5.30. Aşağıdaki limiti bulun (bkz. Örnek 5.19):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j^2}{n^4}.$$

5.31. Eğer $(x_n)_n$ yakınsak ama 0'a yakınsamayan bir diziyse, belli bir zaman sonra, dizinin ya hep pozitif ya da hep negatif olacağını kanıtlayın.

5.32. $(x_n)_n$, yakınsak bir diziyse ve belli bir göstergeçten sonra $a \le x_n$ ise, $\lim_{n\to\infty} x_n \ge a$ eşitsizliğini kanıtlayın.

5.33. Eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ama 0'a yakınsamıyorsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}} = 1$$

eşitliğini kanıtlayın.

5.34. Sınırlı diziler kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın. Terimleri 0'dan farklı olan sınırlı diziler kümesinin bölme altında kapalı olmadığını kanıtlayın. $(x_n)_n$ sınırlı ve terimleri 0'dan farklı bir diziyse, ne zaman $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlıdır?

5.35. Eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki diziyse ve $\lim(x_n - y_n) = \ell$, yani $x_n - y_n \longrightarrow \ell$ oluyorsa, bunu

$$x_n \longrightarrow y_n + \ell$$

olarak gösterelim. Eğer $\lim x_n/y_n = \ell$ ise bunu

$$x_n \sim \ell y_n$$

olarak gösterelim. Bu tanımların geçerli olması için $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizilerinin illa yakınsak olmaları gerekmediğine dikkatinizi çekelim.

a. $x_n = 1/n$ ve $y_n = (-1)^n/n$ olsun. $x_n \longrightarrow y_n$ olduğunu (yani tanımdaki $\ell = 0$) ama hiçbir ℓ için $x_n \sim \ell y_n$ olmadığını gösterin.

b. $x_n = 2n$ ve $y_n = n$ olsun. $x_n \sim 2y_n$ olduğunu ama hiçbir ℓ için $x_n \longrightarrow y_n + \ell$ olmadığını kanıtlayın.

c. $a \in \mathbb{R}$ olsun. $x_n = 1/n$ ve $y_n = a/n$ olsun. Yukardaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

d. $x_n = 1/n$ ve $y_n = 1/n^2$ olsun. Yukardaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?
e. $x_n = 1/n^2$ ve $y_n = 1/n$ olsun. Yukardaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?
f. Eğer bir ℓ için $x_n \longrightarrow y_n + \ell$ için oluyorsa bunu $x_n \equiv y_n$ olarak gösterelim. Bu ilişki diziler üzerine bir denklik ilişkisi midir?
g. Eğer bir ℓ için $x_n \sim \ell y_n$ için oluyorsa bunu $x_n \simeq y_n$ olarak gösterelim. Bu ilişki diziler üzerine bir denklik ilişkisi midir?

5.36. Eğer yeterince büyük n ve n'den bağımsız bir K için $|x_n| < Ky_n$ oluyorsa,

$$x_n = O(y_n)$$

yazılır. Eğer $\lim x_n/y_n = 0$ ise

$$x_n = o(y_n)$$

yazılır. Bunlara "büyük O" ve "küçük o" adı verilir.
a. $x_n = 3n$, $y_n = n$ olsun. Yukardaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?
b. $x_n = n$, $y_n = n^2$ olsun. Yukardaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?
c. $x_n = n^2$, $y_n = n$ olsun. Yukardaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

5.37.

$$x_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{3n - 1}$$

olsun.
a. $x_n \longrightarrow n/3 + 7/9$ ilişkisini kanıtlayın (bkz. Alıştırma 5.35).
b. $x_n \sim n/3$ olduğunu gösterin (bkz. Alıştırma 5.35).
c. $x_n = O(n)$ olduğunu gösterin (bkz. Alıştırma 5.36).
d. $x_n = o(n^2)$ olduğunu gösterin (bkz. Alıştırma 5.36).

6. Yakınsak Dizi Örnekleri I

En önemli dizilerden biri olan geometrik dizilerden başlayalım. $(r^n)_n$ biçiminde yazılan bir diziye ***geometrik dizi*** denir:

$$1,\ r,\ r^2,\ r^3, \ldots, r^n, \ldots$$

Geometrik dizilerin yakınsaklığına karar vermek oldukça kolaydır:

Teorem 6.1. *r bir gerçel sayıysa $(r^n)_n$ dizisi ancak $r \in (-1, 1]$ iken yakınsak olabilir.*
$r = 1$ ise limit 1'dir.
$r \in (-1, 1)$ ise limit 0'dır.
$r \notin [-1, 1]$ ise dizi sınırsızdır, dolayısıyla ıraksar.

Kanıt: Önce $-1 < r < 1$ olsun; $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ eşitliğini göreceğiz. Eğer $r = 0$ ise kanıtlayacak fazla bir şey kalmıyor, bundan böyle r'nin 0 olmadığını varsayalım. $\epsilon > 0$ olsun. $s = -1 + 1/|r|$ olsun. Tabii ki $s > 0$ ve

$$|r| = \frac{1}{1+s}.$$

N doğal sayısı,

$$\frac{1}{s} < N\epsilon$$

eşitsizliğini sağlasın (Arşimet Özelliği). Şimdi, her $n > N$ için, Önsav 3.15'e göre,

$$|r^n - 0| = |r|^n = \left(\frac{1}{1+s}\right)^n = \frac{1}{(1+s)^n} \leq \frac{1}{1+ns} < \frac{1}{ns} < \frac{1}{Ns} < \epsilon.$$

$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ eşitliği kanıtlanmıştır.

Şimdi r'nin 1'den büyük olduğunu varsayalım. $s = r - 1 > 0$ olsun. O zaman Önsav 3.15'e göre

$$r^n = (1+s)^n \geq 1 + ns$$

ve Arşimet özelliğinden dolayı $(r^n)_n$ dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla yakınsak olamaz (bkz. Teorem 5.3).

Eğer $r < -1$ ise, $n = 2m$ çift olduğunda, $r^n = r^{2m} = (r^2)^m$ sayıları bir önceki paragrafa göre üstten sınırlı değildirler. Dolayısıyla $(r^n)_n$ dizisi sınırlı değildir ve yakınsak olamaz. □

Şimdi de geometrik dizinin terimlerini toplayarak elde ettiğimiz,

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, \\ s_1 &= 1 + r, \\ s_2 &= 1 + r + r^2, \\ s_3 &= 1 + r + r^2 + r^3, \\ &\dots \\ s_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n, \\ &\dots \end{aligned}$$

dizisine bakalım. Bu dizinin limiti analizde temel niteliktedir.

Teorem 6.2. *r bir gerçel sayı ve*

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$$

olsun. $(s_n)_n$ dizisi ancak ve ancak $r \in (-1, 1)$ iken yakınsak olabilir ve bu durumda limit

$$\frac{1}{1-r}$$

olur.

Kanıt: Önsav 3.14'te, eğer $r \neq 1$ ise,

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

eşitliğini kanıtlamıştık. Dolayısıyla eğer $r \in (-1, 1)$ ise sonuç Teorem 6.1 ve 5.4'ten çıkar:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Eğer $r \geq 1$ ise,

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n \geq n + 1$$

olduğundan, dizi sınırlı değildir ve ıraksar (bkz. Teorem 5.3).

Eğer $r < -1$ ise, n çift sayısı için,

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 + |r|^{n+1}}{1 + |r|} > \frac{|r|^{n+1}}{2|r|} = \frac{|r|^n}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla dizi sınırsızdır (Önsav 3.15) ve limiti olamaz.

Eğer $r = -1$ ise, $(s_n)_n$ dizisi $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ diye devam eder ve hiçbir sayıya yakınsayamaz. □

Aşağıda vereceğimiz örnekler önemlidir. Her birini önce kendiniz kanıtlamayı denemelisiniz. Okuduğunuzda size çok kolay gelebilecek kanıtları bulamamanız moralinizi bozmasın. Gerçekten de birçoğu uzun süren çalışmalardan süzülmüş zekâ ürünleridir.

Örnekler

6.1. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $\lim_{n\to\infty} r^n/n! = 0$.
Kanıt: Önsav 5.2.ii'ye göre, r yerine $|r|$ alarak $r \geq 0$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = r^n/n! \geq 0$ olsun. $\epsilon > 0$, herhangi bir gerçel sayı olsun. L, r'den büyük herhangi bir doğal sayı olsun. Her k doğal sayısı için,

$$x_{L+k} \leq x_L \left(\frac{r}{L+1}\right)^k$$

eşitsizliğini k üzerine tümevarımla kanıtlayalım. $k = 0$ ise eşitlik sözkonusu. Şimdi eşitsizliği k için varsayıp $k+1$ için kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} x_{L+k+1} &= \frac{r^{L+k+1}}{(L+k+1)!} = \frac{r^{L+k}}{(L+k)!}\frac{r}{L+k+1} = x_{L+k}\frac{r}{L+k+1} \\ &\leq x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k \frac{r}{L+k+1} \leq x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k \frac{r}{L+1} = x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Eşitsizliği kanıtladık. Ama $0 < r/(L+1) < 1$ ve Teorem 6.1'e göre yukardaki eşitsizliğin en sağındaki terimin k sonsuza giderken limiti 0'dır. Demek ki öyle bir K vardır ki, her $k > K$ için,

$$\left(\frac{r}{L+1}\right)^k < \frac{\epsilon}{x_L}$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi $N = K + L$ olsun. Her $n > N$ için,

$$k = n - L > K$$

tanımıyla,

$$x_n = x_{L+k} \leq x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k < x_L\frac{\epsilon}{x_L} = \epsilon$$

elde ederiz. İstediğimizi kanıtladık ama pek kolay olmadı. Limit bulmak her zaman kolay değildir, hatta bazen çok çok zor olabilir.
Okur, haklı olarak yukardaki kanıtı nasıl düşündüğümüzü sorabilir. Kanıtı nasıl yaptığımızı açıklamaya çalışalım.
x_{n+1} ile x_n arasında çok basit bir ilişki var:

$$x_{n+1} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r}{n+1}\frac{r^n}{n!} = \frac{r}{n+1}x_n.$$

Bunu bir adım daha götürürsek,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}x_{n+1} = \frac{r}{n+2}\frac{r}{n+1}x_n$$

elde ederiz. Ama buradan da,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}\frac{r}{n+1}x_n < \left(\frac{r}{n+1}\right)^2 x_n$$

elde ederiz. Bu aşamada,

$$x_{n+k} \leq \left(\frac{r}{n+1}\right)^k x_n$$

eşitsizliğini tahmin edip kanıtlamak zor değil. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek,

$$\frac{r}{n+1}$$

sayısı 1'den küçük olur ve Teorem 6.1'e göre eşitsizliğin sağ tarafı k büyüdükçe küçülür. Bizim istediğimiz de buydu zaten. Gerisi, okurun ustalaşması gerektiği teknik ayrıntı.

Benzer Bir Kanıt Daha: $x_{n+1}/x_n = r/(n+1) < r/n$. Ama $\lim_{n\to\infty} r/n = 0$ olduğundan, öyle bir N vardır ki, $n > N$ için $r/n < 1/2$ olur. Demek ki her $n > N$ için,

$$0 \leq \frac{x_n}{x_{N+1}} = \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\frac{x_{N+3}}{x_{N+2}}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N-1}$$

olur. Sonuç şimdi Sandviç Teoremi'nden çıkar.

Bir Uyarı: $(n^n/n!)_n$ dizisi bir zaman sonra her sayıyı aşar, yani limiti yoktur. Bkz. Alıştırma 10.12 ya da Örnek 5.1.

6.2. *Her* $r \in (-1, 1)$ *için,*

$$\lim_{n\to\infty}\left(r + \frac{1}{n}\right)^n = 0.$$

Eğer $|r| > 1$ *ise dizi ıraksar.*

Kanıt: Önce $r \in (-1, 1)$ varsayımını yapalım. Önsav 5.2.ii ve

$$\left|r + \frac{1}{n}\right| \leq |r| + \frac{1}{n}$$

eşitsizliğinden dolayı, genelliği bozmadan, $r \in [0, 1)$ varsayımını yapabiliriz. $s \in (r, 1)$ olsun. N doğal sayısı, $1/N < s - r$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman, her $n \geq N$ için,

$$r + \frac{1}{n} \leq r + \frac{1}{N} < r + (s - r) = s$$

ve

$$0 \leq \left(r + \frac{1}{n}\right)^n < s^n$$

olur. Sağ taraf, Teorem 6.1'e göre 0'a yakınsadığından Sandviç Teoremi istediğimizi verir.

Eğer $|r| > 1$ ise,

$$\left|\left(r + \frac{1}{n}\right)^n\right| > |r|^n$$

olur ve Teorem 6.1'e göre dizimiz sınırsızdır, dolayısıyla ıraksaktır.

$|r| = 1$ **Durumu:** Dizinin $r = -1$ için ıraksadığını Örnek 10.7'de, $r = 1$ için (adına e denilen bir sayıya) yakınsadığını Teorem 10.1'de göreceğiz.

6.3. *Eğer* $a > 0$ *ise* $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ *olur.*

Kanıt: $a = 1$ ise sorun yok. Gerekirse a yerine $1/a$ alırsak, $a > 1$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = a^{1/n} - 1$ olsun. O zaman

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \cdots > nx_n$$

ve $0 < x_n < a/n$. Buradan da $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ çıkar.

6.4. *Eğer* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *ise ve* $a > 0$ *ise* $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$ *olur.*
Kanıt: $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Bir önceki örneğe göre, bir m doğal sayısı için $a^{1/m}$ ve $a^{-1/m}$ sayıları $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ aralığında olurlar. Ayrıca yeterince büyük n sayıları, diyelim N'den büyük n sayıları için $-1/m < x_n < 1/m$ olur. Buradan a^{x_n} sayısının $a^{-1/m}$ ile $a^{1/m}$ arasında olduğu, yani $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ aralığında olduğu çıkar ve bu da istediğimizi kanıtlar. □

6.5. $|r| < 1$ *ise* $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ *olur.*
Kanıt: $r \neq 0$ varsayımını yapabiliriz. $1/|r| = 1+s$ olsun. $s > 0$ olur elbette. $n > 2$ için,

$$(1+s)^n = 1 + ns + \frac{n(n-1)}{2}s^2 + \cdots$$

eşitliğinden

$$\frac{(1+s)^n}{s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{n}{s} + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}$$

ve buradan da,

$$|nr^n| = \frac{n}{(1+s)^n} < \frac{2}{(n-1)s^2} < \frac{4}{ns^2}$$

çıkar. (Son eşitsizlik $n > 2$ koşulundan çıkar.) Şimdi ϵ verilmiş olsun.

$$N = \max\left\{2, \frac{4}{\epsilon s^2}\right\}$$

olsun. Eğer $n > N$ ise, yukardaki hesaptan, $|nr^n| < \epsilon$ çıkar. □

Eğer $r = 100/101$ ise, $(nr^n)_n$ dizisi 100'üncü terime kadar artar, nerdeyse 37 olur ve daha sonra azalarak 0'a yakınsamaya başlar, yani bu dizi 0'a yakınsar ama sonlara doğru yakınsar! Bu dediklerimizin doğruluğu örneğin excel ile kontrol edilebilir. □

6.6. $|r| < 1$ *ve* $q \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ *ise* $\lim_{n\to\infty} n^q r^n = 0$ *olur.*
Kanıt: $q = 0$ ise sorun yok. Bundan böyle $q > 0$ olsun. $s = r^{1/q}$ olsun. O zaman, $\lim_{n\to\infty} n^q s^{qn} = 0$ eşitliğini göstermek durumundayız ki bu da Teorem 5.4.vi'ya göre, $\lim_{n\to\infty} ns^n = 0$ eşitliğini göstermek demektir. Bunu da yukarda, bir önceki örnekte göstermiştik. □

6.7. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.
Kanıt: $x_n = n^{1/n} - 1$ olsun. O zaman, $n > 2$ için,

$$n = (1+x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}x_n^2$$

olur. Demek ki

$$x_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

ve

$$x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. □

6.8. Terimleri, $n \geq 2$ için,

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)} = \frac{1}{1\cdot(n-1)} + \frac{1}{2\cdot(n-2)} + \cdots + \frac{1}{i(n-i)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot 1}$$

olan diziyi ele alalım.

$$\frac{1}{i\,(n-i)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i}\right)$$

eşitliğinden dolayı,

$$x_n = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

olur. Örnek 3.3'ye göre

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} < \sqrt{n}.$$

Demek ki, her $n \geq 2$ için

$$0 < x_n < \frac{2}{n}\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

sağlanır. Buradan da $\lim x_n = 0$ elde edilir[1]. □

6.9. *$x \in \mathbb{R}$ olsun ve*

$$x_n = \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n^2}$$

olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = x/2$ *eşitliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Her $r \in \mathbb{R}$ için $[r] \leq r < [r] + 1$ olduğundan, $r - 1 < [r] \leq r$ olur. Buradan

$$(x-1) + (2x-1) + \cdots + (nx-1) < [x] + [2x] + \cdots + [nx] \leq x + 2x + \cdots + nx$$

ve dolayısıyla

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n < [x] + [2x] + \cdots + [nx] \leq \frac{n(n+1)}{2}x$$

olur. Her tarafı n^2'ye bölersek, Sandviç Teoremi'nden istediğimiz çıkar. □

6.10. **[Lineer cebir bilenlere.]** $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ *ve*

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n$ *limiti var mıdır ve varsa kaçtır?* (Not: Lineer cebir kullanmayan bir çözüm için sayfa 146'deki Alıştırma 12'ye bakın.)

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

ve

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

olsun. O zaman

$$x_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = Ax_n$$

olur. Buradan da her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A^n x_0 = x_n$$

çıkar.

A^n matrisini hesaplayalım. Bunu yapmak için önce A matrisini çapraz matris haline sokalım. (Eğer bu mümkün değilse Jordan kanonik biçime sokmak gerekir.) Bunu yapmak için de matrisin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulalım:

$$\det(A - x\,\mathrm{Id}_2) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1/2 & 1/2 - x \end{pmatrix} = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = (x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

[1] Birinci basımda bu sonucun Görkem Özkaya tarafından bulunmuş çok güzel ama oldukça uzun bir kanıtı vardı. İlham Aliyev yukardaki kısa kanıtı sundu.

olduğundan, özdeğerler 1 ve $-1/2$'dir. (İki değişik özdeğer olduğundan, A matrisi bir başka tabanda çapraz matris olarak yazılır.) Eğer bu özdeğerlere sırasıyla λ_1 ve λ_2 dersek, bunlara tekabül eden $v_i \neq 0$ özvektörleri bulalım. $i = 1, 2$ için

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

denklemini çözersek,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ve } v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektörlerinin $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -1/2$ özdeğerlerine tekabül eden özvektörlerden olduklarını buluruz.

Şimdi P, e_1 ve e_2 kanonik tabanları v_1 ve v_2 vektörlerine götüren dönüşümün matrisi olsun:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

P'nin tersini bulmak zor değil:

$$P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Şimdi

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

olmalı. İki üç dakikadan fazla sürmemesi gereken hesaplar yapılınca bir hata yapmadığımız ve eşitliğin gerçekten doğru olduğu kolaylıkla görülür. Buradan,

$$\begin{aligned} A^n &= \left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}P^{-1}\right)^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}^n P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1-(-1/2)^{n-1} & 2-(-1/2)^{n-1} \\ -1+(-1/2)^n & -2-(-1/2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= x_n = A^n x_0 \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} & 2-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \\ -1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2-\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \\ -1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

olur. Demek ki $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/3$.

Not: Yukardaki a_n ifadesi bilindikten sonra aynı eşitlik tümevarımla kanıtlanabilir! Ama sadece bilindikten sonra... Tümevarımla kanıt yöntemi çok güçlü olmasına karşın, bu yöntemi kullanabilmek için kanıtlanacak formülün ya da teoremin önceden bilinmesi gerekir! □

Alıştırmalar

6.11. $(x_n)_n$, bir dizi olsun. Sabit bir $r \in (0, 1)$ sayısı ve her n göstergeci için
$$|x_{n+1}| \leq r|x_n|$$
olsun.
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$
eşitliğini kanıtlayın.

6.12. Genel terimi
$$\frac{n+4}{3n^2+2}$$
olan dizinin bir zaman sonra azalan olduğunu ve limitinin 0 olduğunu kanıtlayın.

6.13. Terimleri pozitif ve azalan olan ama limitin 0 olmadığı bir dizi bulun.

6.14. Terimleri
$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n^2 - i)}$$
olan dizi yakınsak mıdır?

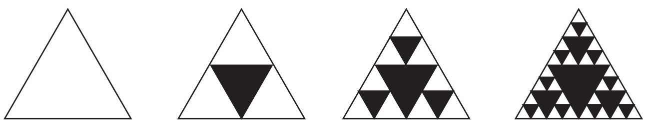
6.15. Terimleri
$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{i(n^2 - i)}$$
olan dizi yakınsak mıdır?

6.16.
$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n^2} = 1$$
eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: $n^{1/n} \geq n^{1/n^2}$.)

6.17. [**Lineer cebir bilenlere.**] $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ve
$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$$
olsun (Fibonacci dizisi). Örnek 6.10'daki gibi yola çıkarak f_{1000}'i bulun.

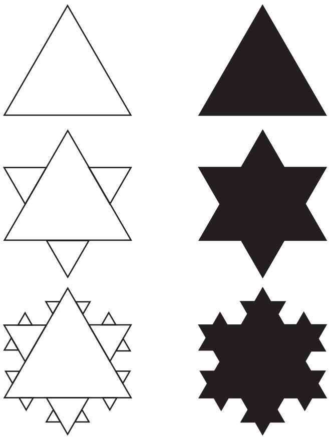
6.18. a_0, $a_1 > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için
$$a_{n+2} = (a_n a_{n+1})^{1/2}$$
olsun.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = (a_0 a_1^2)^{1/3}$$
eşitliğini kanıtlayın. İpucu: $a_n = a_0^{u_n} a_1^{v_n}$ olsun. u_n'ler arasında bir ilişki bularak ve Örnek 6.10'u kullanarak $\lim_{n\to\infty} u_n$ limitini bulun. Aynı şeyi v_n için yapın.

6.19. [**Sierpinski Üçgeni**] Aşağıdaki birinci üçgenin alanı 1'dir.

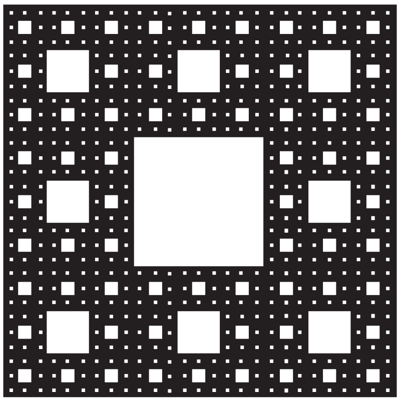


Şekildeki gibi, her seferinde üçgenden siyah üçgenler çıkarılıyor ve bu böyle sonsuza kadar devam ediyor. n'inci üçgende kalan beyaz alanı hesaplayın. Bu alanların n sonsuza giderken limitini bulun.

6.20. [**Koch Kartanesi**] Aşağıdaki şekildeki gibi, bir eşkenar üçgenin kenarlarına, üçgenin üçte biri kadar olan üç üçgeni taşıyoruz ve benzer işlemi elde edilen şekilde tekrar ediyoruz. Başlangıç üçgeninin kenarı 1 br ise, süreci sonsuza dek devam ettirdiğimizde, elde edilen şeklin dış çevresi ne olur? Peki ya üçgenin alanı 1 br ise oluşan şeklin alanı ne olur?



6.21. [**Sierpinski Halısı**] Aşağıdaki şekil yukardakiler gibi bir kareden o karenin dokuzda biri kareler çıkartılarak ve süreç sürekli sonsuza dek tekrarlanarak elde ediliyor. Sonsuzda elde edilen şeklin (siyah kısmın) alanını hesaplayın.



6.22. [**Kaos**] k sabit bir sayı, $x_1 = 0{,}8$ ve $x_{n+1} = kx_n(1 - x_n^2)$ olsun. $k = 2{,}2$ ve $k = 2{,}4$ için ilk dizinin 50 değerini örneğin Excel'de hesaplayın. İki dizi arasındaki farkı görüyor musunuz? Aynı şeyi başka k değerleri için yapıp ne olup bittiğini anlamaya çalışın.