4. Yakınsak Gerçel Sayı Dizileri

4.1 Dizi

Ta en başından, dizinin tanımından başlayalım. X herhangi bir küme olsun. X'ten sırayla elemanlar seçelim:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

İşte dizi böyle bir şeydir. Buna X-***dizisi*** denir. Örneğin,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

bir $\mathbb{Q}$-dizisidir, ve aynı zamanda bir $\mathbb{R}$-dizisidir elbette.

$$\pi,\ \pi^2,\ \pi^3,\ \pi^4,\ \pi^5, \ldots$$

ise bir $\mathbb{R}$-dizisidir. (Her ne kadar π diye bir sayının varlığını tanımlamamışsak da, böyle bir gerçel sayının varlığı okurun kulağına kadar gelmiştir... Dileyen π yerine herhangi bir başka gerçel sayı da alabilir.)

Bu bölümde sadece gerçel sayı dizilerini konu edeceğimizden $\mathbb{R}$-dizisi yerine kısaca ***dizi*** diyeceğiz.

Daha matematiksel olalım. Matematiksel olarak bir dizi (yani bir $\mathbb{R}$-dizisi), doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir x fonksiyonudur. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise, x'in n'de aldığı $x(n)$ değeri yerine x_n yazılır. Ayrıca, x fonksiyonu değerleriyle belirlendiğinden, x yerine $(x_n)_n$ yazılır:

$$x = (x_n)_n.$$

Örneğin yukardaki $1/2$, $2/3$, $3/4$, $4/5$, $5/6, \ldots$ dizisi, eğer tahmin edildiği gibi devam ediyorsa,

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)_n$$

olarak yazılır. x_n'ye x dizisinin ***n'inci terimi*** adı verilir. n'ye de x_n'nin ***göstergeci*** ya da ***endisi*** denir. (Bu son tanımın şu tuhaflığı var: $x_n = x_m$ ise x_n'nin göstergeci n midir yoksa m midir? Dolayısıyla bu bir tanım olamaz, bu tanım lafın gelişi ve muallakta kalınmadığından emin olunduğunda kullanılır.)

Bazı dizilerin tanımında yapay bir tanım sorunu olabilir. Örneğin,

$$x_n = \frac{1}{n(n-2)}$$

dizisi $n = 0$ ve 2 göstergeçleri için sorun yaşar. Bu durumda dizinin 3 ve daha büyük göstergeçler için tanımlandığı varsayılabiliriz, ya da bu dizi yerine,

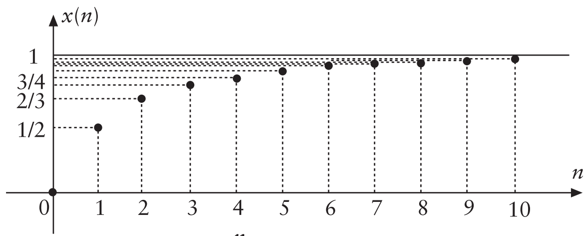
$$x_n = \frac{1}{(n+3)(n+1)}$$

dizisini alabiliriz. Nitekim,

$$\left(\frac{1}{n(n-2)}\right)_{n\geq 3} = \left(\frac{1}{(n+3)(n+1)}\right)_{n\geq 0}.$$

Bu yöntemle sonlu sayıda göstergeçte tanımsız olan dizilerin her göstergeçte tanımlı olduklarını varsayabiliriz.

Bir dizi aslında bir fonksiyon olduğundan, dizinin grafiğini de çizebiliriz. Aşağıda bir örnek verdik.



$x_n = \frac{n}{n+1}$ dizisinin grafiği

Her terimi sabit bir a sayısı olan diziye sabit a dizisi adı verilir. Bu diziyi $s(a)$ olarak göstereceğiz. Demek ki $s(a)$ dizisi,

$$a, a, a, a, a, a, \ldots$$

diye başlar ve aynen böyle devam eder. Sabit 0 dizisi ve sabit 1 dizisi önemli sabit dizilerdendir. Kimi zaman bir dizi hemen değil ama ***zamanla sabitleşebilir***, örneğin,

$$b, c, b, a, a, a, a, a, a, \ldots$$

dizisi zamanla -dördüncü adımda- sabitleşen bir dizidir.

Dizilerden oluşan kümeyi $\mathscr{D}$ ile gösterelim. $\mathscr{D}$ kümesi üstüne toplama, çıkarma ve çarpma gibi standart işlemleri şöyle -en doğal biçimde, fonksiyonların toplamını, farkını, çarpımını tanımladığımız gibi- tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}(x_n)_n + (y_n)_n &= (x_n + y_n)_n,\\ (x_n)_n - (y_n)_n &= (x_n - y_n)_n,\\ (x_n)_n(y_n)_n &= (x_n y_n)_n.\end{aligned}$$

Bunlara sırasıyla ***terim terim*** toplama, çıkarma ve çarpma denir, çünkü dizileri toplamak, çıkarmak ve çarpmak için aynı işlemi dizilerin terimleriyle yapıyoruz. Eğer her n için $y_n \neq 0$ ise bir diziyi $(y_n)_n$ dizisine "terim terim" bölebiliriz:

$$(x_n)_n/(y_n)_n = (x_n/y_n)_n.$$

$s(0)$ sabit dizisi toplamanın, $s(1)$ sabit dizisi de çarpmanın etkisiz elemanlarıdır elbette. $s(0)$ ve $s(1)$ yerine $0_{\mathscr{D}}$ ve $1_{\mathscr{D}}$ de yazılabilir.

Eğer $x = (x_n)_n \in \mathscr{D}$ ise

$$-x = 0_{\mathscr{D}} - x = (-x_n)_n$$

tanımını yapabiliriz.

Alıştırmalar

4.1. Bir dizi tümevarımla tanımlanabilir. Örneğin eğer x_0 sayısı verilmişse

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2$$

formülü bir dizi tanımlar. Eğer $x_0 = 0$ alırsak,

$$0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

dizisini elde ederiz. $x_0 = 1/2$ alarak bu dizinin ilk birkaç terimini bulun. Dizinin terimlerinin giderek ya 0'a ya da 1'e yakın olduklarını gözlemleyin.

4.2. $x_0 = 2$ ve $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ olsun. Üstünde karekök düğmesi olan bir hesap makinası kullanarak $(x_n)_n$ dizisinin ilk 20 terimini hesaplayın. Ne gözlemliyorsunuz? Şimdi aynı şeyi $x_0 = 0,5$ için yapın. x_0 için farklı değerlerle aynı işlemi yaptığınız zaman ne gözlemliyorsunuz?

4.3. Excel gibi bir yazılım kullanarak yukardaki dizinin ilk yüz terimini çeşitli x_0 değerleri için bulmaya çalışın. Özellikle $x_0 = 1,61803$ ve $x_0 = 1,61805$ için dizinin davranışını gözlemleyin.

4.4. $x_{n+1} = -x_n^2 + 3x_n + 1$ olsun. $x_0 = 1$ için diziyi bulun. Excel gibi bir yazılım kullanarak aynı soruyu $x_0 = 0,5$ için yanıtlamaya çalışın. Dizinin terimlerinin 0,198, 0,1555, 3,247 gibi sayıların civarında dolanıp durduklarını gözlemleyin.

4.5. $x_{n+1} = 6 - 1/x_n$ olsun. x_0'ı elbette 0'a eşit alamayız, yoksa x_1 tanımlanmaz. Ama $1/6$'ya da eşit alamayız, yoksa x_2 tanımlanmaz. $x_0 = 6/35$ olabilir mi? Bundan böyle $x_0 = 1$ olsun. Her $n \geq 1$ için x_n'nin tanımlandığını ve $x_n \geq 5$ eşitsizliğini kanıtlayın; ayrıca $x_n \leq 6$ eşitsizliğini kanıtlayın. Excel gibi bir yazılımla dizinin ilk birkaç terimini hesaplayın. Ne gözlemliyorsunuz? $x = 6 - 1/x$ denkleminin çözümüyle dizinin aldığı değerleri karşılaştırın. Gene $x_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{25} |x_n - x_{n-1}|$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

4.6. Bazen bir diziyi tümevarımla tanımlamak için ilk iki terimi bilmek gerekebilir. Örneğin meşhur ***Fibonacci dizisi*** $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ ve $x_0 = x_1 = 1$ eşitlikleriyle tanımlanır. $y_n = x_{n+1}/x_n$ olsun. $y_{n+1} = 1/y_n + 1$ ve $y_0 = 1$ eşitliklerini gözlemleyin. $(y_n)_n$ dizisinin ilk birkaç terimini (örneğin excel'le) hesaplayın ve bu terimlerle $y^2 - y - 1 = 0$ denkleminin pozitif kökü arasındaki ilişkiyi gözlemleyin. Her n için $1 \leq y_{n+1} \leq 2$ eşitsizliklerini kanıtlayın. $|y_{n+1} - y_n|$ sayıları arasında bir önceki alıştırmadaki gibi bir eşitsizlik bulun.

4.7. $s \geq 0$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları verilmiş olsun. Her $n \geq 0$ için $x_{n+1} = \sqrt{s + x_n}$ tanımını yapalım. Her x_n'nin bu formülle gerçekten tanımlandığını kanıtlayın.

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_n^2 - x_n \geq s$$

önermesini kanıtlayın. Bunu kullanarak

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

önermesini kanıtlayın.

$$\alpha = \max\left\{x_0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4s}}{2}\right\}$$

olsun. $\alpha^2 - \alpha - s \geq 0$ eşitsizliğini gözlemleyerek, her n için $x_n \leq \alpha$ eşitsizliğini kanıtlayın. (Bkz. Örnek 7.14.)

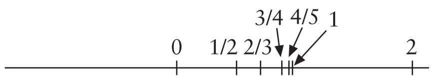
4.8. $a_0 > 0$ bir kesirli sayı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = a^{a_n}$ tanımını yaparak, çeşitli $a \in (0, 2)$ kesirli sayıları için $(a_n)_n$ dizisinin büyük n'ler için davranışını bulun. (Bir hesap makinası ya da excel kullanın.)

4.2 Yakınsak Diziler

Kesirli sayı dizileri bir sayıya giderek daha çok yaklaşabilirler. Örneğin girişte verdiğimiz

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

örneğindeki dizi giderek daha çok 1'e yaklaşır, yaklaşmaktan da öte (çünkü dizi 2'ye de yaklaşır) 1'in burnunun dibine girer.



Öte yandan $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$ kesirli sayı dizisi giderek daha fazla 0'ın burnunun dibine girer, 0'a yaslanır nerdeyse. Buna matematikte ***yakınsamak*** denir.

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$(*) \qquad n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) "a'ya ***yakınsar***" ya da "a, $(x_n)_n$ dizisinin ***limiti***dir" denir.

Bir sayıya yakınsayan dizilere ***yakınsak*** denir. Yakınsak olmayan dizilere de ***ıraksak*** denir.

Örneklere geçmeden önce bu önemli tanım üzerine biraz kafa yoralım. Bu tanımı özümsemek çok önemlidir.

Okur, tanımın, sezgileriyle algıladığı "yakınsama"nın anlamını matematiksel olarak verdiğine ikna olmalıdır, dolayısıyla aşağıda yazılanları laf ebeliği olarak nitelemeyip dikkatle okumalıdır.

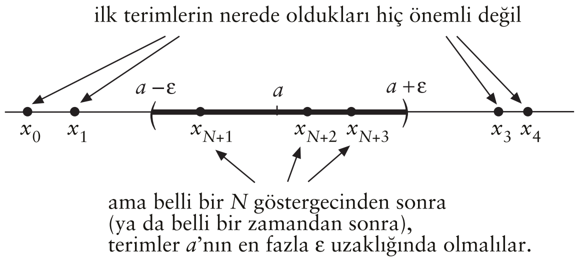
Tanımın Tartışması. $|x_n - a| < \epsilon$ eşitsizliğiyle, $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ önermesi birbirine denktir, nitekim Önsav 1.1.vi'ya göre,

$$|x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x_n - a < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

denklikleri geçerlidir. Demek ki tanıma göre, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir N doğal sayısı olmalı ki, N'den büyük her n göstergeci için,

$$x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

olsun. Yani $(x_n)_n$ dizisi belli bir göstergeçten sonra $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ aralığına düşmeli. Dolayısıyla bir dizinin limiti olmasında ilk birkaç terimin, örneğin ilk 1 milyar terimin ne olduğu hiç ama hiç önemli değildir, önemli olan dizinin son kısmının, yani



"kuyruğu"nun genel davranışıdır. Sonuç olarak, dizinin ilk terimleri yakınsamayı etkilemez. Örneğin,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

dizisi 1'e yakınsıyorsa -ki yakınsıyor, daha sonra kanıtlayacağız bunu- o zaman,

$$9,\ 199,\ 3543,\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

dizisi de 1'e yakınsar. Nitekim verilmiş bir $\epsilon > 0$ için birinci dizide N yeterliyse, aynı ϵ için ikinci dizide $N + 3$ yeterlidir. Bunun gibi

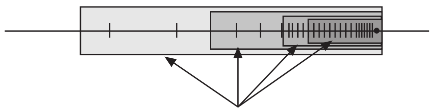
$$\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \ldots$$

dizisi de 1'e yakınsar. Kanıtını ilerde vereceğimiz şu daha genel sonuç geçerlidir (bkz. sayfa 78).

Teorem 4.1. *Yakınsak bir dizinin sonlu sayıda terimini değiştirirsek ya da yakınsak bir diziye sonlu sayıda terim eklersek ya da yakınsak bir diziden sonlu sayıda terim çıkarırsak gene yakınsak bir dizi elde ederiz ve bu işlemlerle dizinin limiti değişmez; bir başka deyişle, iki dizinin kuyrukları aynıysa, yani belli A ve B doğal sayıları ve her $n > A$ için,*

$$x_n = y_{n+B}$$

ise, o zaman, $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizilerinden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır ve bu durumda her iki dizi de aynı sayıya yakınsarlar.



Eğer belli bir $\epsilon_0 > 0$ için (*) önermesini doğrulayan bir N sayısı bulmuşsak, bu ϵ_0'dan büyük ϵ'lar için de (*) önermesi aynı N ile doğrudur. Örneğin,

$$\epsilon_0 = 0{,}001$$

için $N = 10.000$ yetiyorsa, ϵ_0'dan daha büyük olan

$$\epsilon = 0{,}003$$

için de $N = 10.000$ yeter. Dolayısıyla önermeyi asıl küçük ϵ'lar için doğrulamak gerekir. Yani buradaki ϵ çok küçük (ama gene de pozitif) bir sayı olarak algılanmalıdır.

Tanımdaki N sayısı, ϵ'a göre değişir: ϵ küçüldükçe N'yi daha büyük almak zorunda kalabiliriz. ϵ ne kadar küçükse, x_n terimlerinin $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ aralığına düşmesi zorlaşır ve gecikebilir. Örneğin, $\epsilon_0 = 0{,}001$ için $N = 10.000$ yetiyorsa, $\epsilon_1 = 0{,}00001$ için artık $N = 10.000$ yetmeyebilir, N'yi daha büyük, örneğin 100.000 almak gerekebilir. Kısaca söylemek gerekirse, N, ϵ'a göre değişir.

N'nin ϵ'a bağımlı olduğunu görsel olarak göstermek için, kimileyin N yerine N_ϵ yazılır.

Elbette, eğer bir ϵ için, (*) önermesini sağlayan bir N_ϵ doğal sayısı bulunmuşsa, bu N_ϵ sayısından büyük N'ler de (*) önermesini sağlarlar.

Dikkat: Bir dizinin a'ya yakınsaması için, amaç, verilmiş her $\epsilon > 0$ için (*) önermesini sağlayan en küçük N doğal sayısını bulmak değildir. Böyle bir en küçük N doğal sayısı vardır elbette ama çoğunlukla bulması ya da ifade etmesi çok zordur (ve gereksizdir). Amaç, sadece (*) önermesini sağlayan bir N'nin olduğunu bulmaktır. Bu önemli. Bir dizinin bir sayıya yakınsadığını kanıtlamak aslında bu yüzden zordur. ϵ verildiğinde, (*) önermesini doğrulayan tek bir N doğal sayısı olsaydı (rüyada mesela!), eminim kanıtlar çok daha kolay olurdu. Ama maalesef N'yi seçmekte bayağı bir özgürlüğümüz var. İşte bu özgürlüktür çoğu zaman yaratıcılık gerektiren, analizi zorlaştıran ve heyecanlı kılan.

Önemli bir nokta daha: Tanımda $n > N$ yerine $n \geq N$ ve $|x_n - a| < \epsilon$ yerine $|x_n - a| \leq \epsilon$ veya $|x_n - a| < \epsilon/2$ de yazabilirdik, kavram değişmezdi. Bu, belki küçük bir ayrıntıdır, ama okurun neden böyle olduğunu anlamasında çok yarar vardır. Gerekirse saatlerini versin bu ince noktaya, değer çünkü.

Birçok yakınsama örneği vereceğiz birazdan. Ama şimdi bir yakınsama kanıtına nasıl başlanacağını görelim.

Diyelim $(x_n)_n$ sayı dizisinin a'ya yakınsadığını göstermek istiyorsunuz. Demek ki her $\epsilon > 0$ için bir şey kanıtlamanız gerekiyor. O zaman hemen rastgele bir $\epsilon > 0$ sayısı seçin. Yani kanıtınız,

$$\epsilon > 0, \textit{ herhangi bir pozitif sayı olsun}$$

sözleriyle başlamalıdır. Kanıtın bu birinci tümcesi yanlış olamaz. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacaksınız. N'yi kafadan atarak hemen bulmaya çalışmayın, genellikle başaramazsınız.

$$|x_n - a| < \epsilon$$

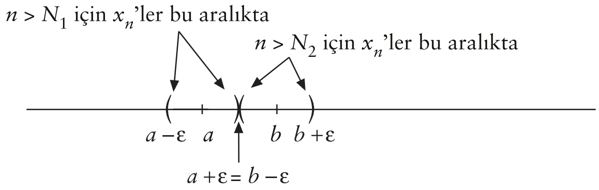
eşitsizliğinin doğru olması için n'nin en az kaç olması gerektiğini bulmak için $|x_n - a|$ ifadesiyle oynamalısınız. Örneklerle her şey daha açık olacak.

4.3 Limitin Biricikliği

İlk sonucumuz, bir dizinin limiti - eğer varsa - biricik olduğunu söyleyecek; yani bir dizi iki farklı sayıya yakınsayamaz.

Önsav 4.2. *Bir dizi en fazla bir sayıya yakınsayabilir. Yani bir dizinin en fazla bir limiti olabilir.*

Kanıt: Hem a hem de b sayılarına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. $a = b$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için, eğer $a \neq b$ ise, $(x_n)_n$ dizisinin hem a'ya hem de b'ye aynı zamanda çok çok yakın olamayacağını kullanacağız elbette. Aşağıdaki şekil kanıtımızı resmediyor.



Ve can alıcı soru: $n > \max\{N_1, N_2\}$ için x_n nerede?

Yukardaki resimden izleyelim. $a \neq b$ eşitsizliğini varsayalım. $\epsilon = |a-b|/2$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ doğal sayısı için,

$$|x_n - b| < \epsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi n hem N_1'den hem de N_2'den büyük herhangi bir doğal sayısı olsun. Şu hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &= |a - x_n| + |b - x_n| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |a-b|, \end{aligned}$$

yani $|a-b| < |a-b|$. Bu da bariz bir çelişkidir, bir sayı kendinden küçük olamaz! □

Bu önsav sayesinde, eğer bir $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa, dizinin yakınsadığı sayıyı

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

olarak gösterme hakkını kazanırız. Bu sayıya $(x_n)_n$ dizisinin ***limiti*** adı verilir. Eğer bir $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ ya da } x_n \longrightarrow a$$

yazılır. İnce ama gerekli bir ayrıntı: Buradaki ∞ simgesinin tek başına anlamı yoktur. Burada anlamı olan ve bir anlam verilen,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ifadesinin tümüdür ve bu, "n sonsuza giderken $(x_n)_n$ dizisinin limiti vardır ve bu limit a'dır" ya da "n sonsuza giderken $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsar/gider" diye okunur.

4.4 Örnekler

İlerde örneklerimizi çoğaltacağız. Şimdilik en kolay örnekten başlayalım.

Önsav 4.3. *Sabit a dizisi a'ya yakınsar. Daha genel olarak, zamanla sabitleşen bir dizi zamanla sabitleştiği sayıya yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$ dizisi zamanla sabitleşen bir dizi olsun. Yani belli bir göstergeçten sonra, diyelim M göstergecinden sonra dizi hep a olsun: Eğer $n > M$ ise $x_n = a$. Bu dizinin a'ya yakınsadığını göstereceğiz. Rastgele bir $\epsilon > 0$ sayısı seçelim. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacağız. Ama N'yi M almak yeterli. Nitekim, eğer $n > M$ olursa,

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$$

olur. □

Önsav 4.4. $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Kanıt: Herhangi bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı alalım. Öyle bir N doğal sayısı bulmak istiyoruz ki, her $n \geq N$ için $|1/n - 0| < \epsilon$ olsun, yani $1/n < \epsilon$ olsun, yani $1/\epsilon < n$ olsun, yani, $[1/\epsilon] + 1 \leq n$ olsun. Burada $[x]$, x'in tamkısmıdır (bkz. Teorem 2.8'den önceki paragraf). Eğer

$$N = [1/\epsilon] + 1$$

alırsak istediğimiz olur. Ne olur ne olmaz diye kontrol edelim. $n > N$ olsun. O zaman,

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[1/\epsilon] + 1} \leq \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon.$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Alıştırmalar

4.9. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

4.10. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ile $\lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ önermelerinin eşdeğerliğini kanıtlayın.

4.11. Her n için $x_n \geq 0$ olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n$ limiti varsa,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{1/2}$$

eşitliğini kanıtlayın.

Yakınsaklığın verdiğimiz tanımına bakılırsa, bir dizinin yakınsak olduğunu bilmek ve hatta kanıtlamak için dizinin limitini bilmek gerekiyor. İlerde dizinin limitini bilmeden de dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamanın yöntemlerini bulacağız.

Örneklerimize birkaç satır ara vererek araya önemli bir kavram ve sonuç sokuşturalım:

Arşimet Cisimleri. R sıralı bir cisim olsun. Her $0 < \epsilon \in R$ için, $N\epsilon > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir N doğal sayısı varsa[1] R'ye ***Arşimet cismi*** adı verilir.

Teorem 4.5. $\mathbb{R}$ *bir Arşimet cismidir.*

Kanıt: Kanıt, Önsav 4.4'ün kanıtında gizlidir. Ayrıca Teorem 2.7 olarak da kanıtlanmıştır. □

Örnekler

4.12. Önsav 4.3'ün kanıtının nerdeyse aynısı,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

eşitliğini de kanıtlar: Bir $\epsilon > 0$ için, aynen kanıttaki N'yi seçelim:

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

olur. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty} 1/2n = 0$ eşitliği de kanıtlanır. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty} 1/n! = 0$ olur.

4.13. Biraz daha karmaşık bir limit alıştırması olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0$$

eşitliğini gösterelim. Eşitliğin doğruluğunu kanıtlamadan önce, eşitliğin neden olması gerektiğini anlayalım.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5}$$

ifadesinin payı $n-3$'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, sondaki -3'ün esamesi bile okunmaz. Bir trilyonerin servetinden 3 lira eksilse ne çıkar ki!.. Bu yüzden $n-3$ yerine n yazabiliriz. Paydaya bakalım şimdi. Payda, n^2+n-5'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, n^2, n'den o kadar büyüktür ki, $n-5$ onun yanında çok küçük kalır. Dolayısıyla, n çok büyük olduğunda n^2+n-5 yerine n^2 alabiliriz. Böylece paya n, paydaya n^2 yazarsak,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

elde ederiz. Bir excel tablosu yaparak bu iki ifadenin büyük n'ler için birbirine ne kadar yakın olduklarını görebilirsiniz.

Yukarda yaptığımız tam bir matematiksel kanıt değil, şimdilik. Ama daha sonra (Bölüm 6'da) bu akıl yürütmeyi matematiksel bir kanıt haline dönüştüreceğiz.

---

[1]Her n doğal sayısı ve her $r \in R$ için $nr \in R$ elemanı n üzerine tümevarımla şöyle tanımlanır: $0r = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(n+1)r = nr + r$.

Limitin 0 olduğunu şöyle de tahmin edebilirdik. İfadenin her terimini n^2'ye bölelim.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1+1/n-5/n^2}$$

elde ederiz. n çok büyük olduğunda, $1/n$, $3/n^2$ ve $5/n^2$ terimleri o kadar küçük sayılardır ki (bunu biraz önce kanıtlamıştık), bu sayılar yerine 0 yazarsak fazla hata yapmış olmayız! Böylece,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1+1/n-5/n^2} \approx \frac{0-0}{1+0-0} = 0$$

elde ederiz.

Bu da şimdilik pek matematiksel değil. (İlerde olacak ama.) Eşitliğini tanıma başvurarak kanıtlayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0.$$

Her zamanki gibi pozitif bir $\epsilon > 0$ sayısı seçerek başlıyoruz. Öyle bir N bulacağız ki, her $n > N$ için,

$$\left| \frac{n-3}{n^2+n-5} - 0 \right| \le \epsilon$$

olacak. Yani yukardaki eşitsizliğin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Soldaki ifadeyle oynayacağız. Soldaki ifadeyi büyüteceğiz ama bunu yaparken n'yi büyüterek yeni ifadeyi dilediğimiz kadar küçültebileceğimize emin olacağız. Hesaplara başlıyoruz. Önce n'yi 3'ten büyük alırsak hem pay hem de payda pozitif olur ve mutlak değer işaretinden kurtuluruz:

$$\left| \frac{n-3}{n^2+n-5} - 0 \right| = \frac{n-3}{n^2+n-5}.$$

Eğer paydaki $n-3$ yerine n yazarsak daha büyük bir ifade buluruz elbet:

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2+n-5}.$$

Şimdi sağdaki ifadenin ϵ'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Sağdaki ifadeyi büyütmeye devam ediyoruz, ama çok az büyüteceğiz.

Eğer n'yi 5'ten büyük alırsak, paydada da bulunan $n-5$ pozitif olur ve o $n-5$'i silersek payda küçüleceğinden ifade büyür:

$$\frac{n}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2}.$$

En sağdaki ifade $1/n$'ye eşit. Demek ki n'yi, $1/n$ sayısı ϵ'dan küçük olacak biçimde seçmek yeterli. Bunun da Arşimet Özelliği sayesinde mümkün olduğunu biliyoruz. Şimdi bir satırlık kanıtımızı yazabiliriz:

$\epsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $N > 5$ sayısı $1 < N\epsilon$ eşitsizliğini sağlasın. Şimdi, her $n > N$ için,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Kanıtımız tamamlanmıştır. □

4.14. $r \in \mathbb{R}$ ve $q \in \mathbb{Q}^{>0}$ iki sabit sayı olsun. $\lim_{n\to\infty} r/n^q = 0$ eşitliğini gösterelim. $\epsilon > 0$ olsun. Yeterince büyük n'ler için $|r/n^q - 0| < \epsilon$ eşitsizliğinin, yani $n > (|r|/\epsilon)^{1/q}$ eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermek istiyoruz. N'yi $(|r|/\epsilon)^{1/q}$ sayısından büyük herhangi bir doğal sayı alırsak, bu N'den büyük her n doğal sayısı için $|r/n^q - 0| < \epsilon$ olur. □

4.15. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki dizi olsun. Şu varsayımları yapalım:*
a. *Yeterince büyük n göstergeçleri için $a_n \leq b_n$*
b. *$(b_n)_n$ dizisi 1'e yakınsar.*
c. *Her $a < 1$ için öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için $a \leq a_n$.*
Bu durumda $(a_n)_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını kanıtlayın.
Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun.
(a) varsayımına göre, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N$ için $a_n \leq b_n$ olur.
(b) varsayımına göre öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için $b_n < 1 + \epsilon/2$ olur.
(c) varsayımına göre öyle bir N_3 vardır ki, her $n > N_3$ için $1 - \epsilon/2 \leq a_n$ olur.
Şimdi $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ olsun. Her $n > N$ için

$$1 - \frac{\epsilon}{2} < a_n \leq b_n < 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

ve dolayısıyla $1 - a_n < \epsilon$ olur. □

4.16. *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $|x - a| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in A$ olduğunu varsayalım. O zaman x'e yakınsayan bir A-dizisinin varlığını kanıtlayın.*
Kanıt: Her $n > 0$ için, $|x - a_n| < \frac{1}{n+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir $a_n \in A$ seçelim. $(a_n)_n$ dizisinin x'e yakınsadığının kanıtını okura bırakıyoruz.

4.17. *$A, B \subseteq \mathbb{R}$ olsun. B'nin her elemanının bir A-dizisinin limiti olduğunu varsayalım. Yakınsak her B-dizisinin limitinin bir A-dizisinin limiti olduğunu kanıtlayın.*
Kanıt: $(b_n)_n$ yakınsak bir B-dizisi olsun. Her $n > 0$ için b_n'ye yakınsayan bir A-dizisi vardır. Demek ki

$$|b_n - a_n| \leq \frac{1}{n}$$

eşitliğini sağlayan bir $a_n \in A$ vardır. $(a_n)_n$ dizisinin $\lim_{n\to\infty} b_n$ sayısına yakınsadığını kanıtlamayı okura bırakıyoruz. □

Alıştırmalar

4.18. Aşağıdaki eşitlikleri limitin tanımına başvurarak kanıtlayın.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2(n+1)^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{2(n+1)^2} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+5}{3(2n+1)^2} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{-15n^2-4n+5}{2(3n-5)^2} = -\frac{5}{6}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3+4\cdot 5^n}{2-3\cdot 5^{n+1}} = -\frac{4}{15}.$$

4.19. $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ aynı noktaya yakınsayan iki dizi olsun. Şu varsayımları yapalım: her n için $a_n \in A$ ve b_n, A'nın bir üstsınırı. $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$ eşitliğini kanıtlayın.

Iraksak iki dizi örneği verelim.

Örnekler

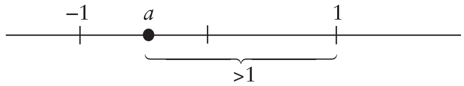
4.20. $x_n = (-1)^n$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi şöyle başlar:

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

ve böyle devam eder. Bu dizinin limiti yoktur, çünkü a ne olursa olsun, ϵ sayısını 1'e eşit alırsak, her n için,

$$\text{ya } |x_{2n} - a| \geq \epsilon \text{ ya da } |x_{2n+1} - a| \geq \epsilon$$

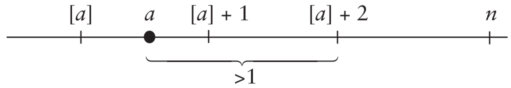
olur (bkz. aşağıdaki şekil); demek ki dizinin limiti a olamaz.



4.21. Yakınsamayan bir başka dizi örneği:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

diye başlayan ve $y_n = n$ kuralıyla tanımlanan dizidir, çünkü a ne olursa olsun, $\epsilon = 1$ ise, her $n > [a] + 2$ için, $|y_n - a| \geq \epsilon$ olur (bkz. aşağıdaki şekil) ve dizi herhangi bir sayıya yakınsayamaz.



Yakınsaklığın tanımı üzerinde biraz daha duralım çünkü yakınsaklığın ve benzer kavramların tanımını anlayıp özümsemek matematik eğitiminin aşağı yukarı üçte birini teşkil eder.

Limitin tanımını şöyle değiştirebiliriz:

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $m > 0$ doğal sayısı için,

$$(**) \qquad n > N \Rightarrow |x_n - a| < \frac{1}{m}$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) "a'ya ***yakınsar***" ya da "a, $(x_n)_n$ ***dizisinin limitidir***" denir.

Bu tanımla eskisinden farklı bir kavram elde edilmez. Birinci tanımla $(x_n)_n$ dizisinin limiti a ise, $\epsilon = 1/m$ alarak, bu ikinci tanımla da $(x_n)_n$ dizisinin limitinin a olduğunu görürüz. Şimdi, $(x_n)_n$ dizisinin limitinin bu ikinci tanıma göre a olduğunu varsayalım. $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. m doğal sayısı, $m\epsilon > 1$ eşitsizliğini sağlasın (Arşimet Özelliği, Teorem 2.7) ve N'yi (**) önermesi m için doğru olacak şekilde seçelim. O zaman, her $n > N$ için,

$$4|x_n - a| < \frac{1}{m} < \epsilon$$

olur. Daha genel bir sonuç aşağıdaki Alıştırma 4.25'te bulunabilir.

Örnek 4.22. *Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlıysa ve $a = \sup A$ ise, terimleri A'da olan ve a'ya yakınsayan bir dizi vardır. Dilersek bu diziyi artan (yani bizim terminolojimizle azalmayan) seçebiliriz.*

Kanıt: Her $m > 0$ doğal sayısı için, $a - 1/m < a$ olduğundan, $a - 1/m$ sayısı A'nın üstsınırı değildir. Demek ki A'da $a - 1/m < a_m \leq a$ eşitsizliklerini sağlayan bir a_m noktası vardır. Demek ki $|a_m - a| = a - a_m < 1/m$ ve her $n > m$ için $|a_n - a| < 1/n < 1/m$ olur. Yukardaki yakınsaklık tanımındaki (**) formülünde $N = m$ almak yeterli.

Şimdi de dizinin artan (yani azalmayan) olarak seçilebileceğini gösterelim. Eğer $a \in A$ ise sabit a dizisi işimizi görür. Bundan böyle $a \notin A$ varsayımını yapalım. a_1'i yukardaki paragrafta olduğu gibi seçtikten sonra $a_{m+1} \in A$ terimini m üzerine tümevarımla,

$$a - \min\{1/m, a - a_m\} < a_{m+1}$$

eşitsizliği doğru olacak biçimde seçelim. O zaman,

$$a_m = a - (a - a_m) \le a - \min\{1/m, a - a_m\} < a_{m+1}$$

olur. □

Son olarak Teorem 4.1'i kanıtlayalım.

Teorem 4.1'in Kanıtı: $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ kuyrukları aynı olan iki dizi olsun. Bu iki diziden ilk birkaç terimi atarak her ikisini de aynı $(z_n)_n$ dizisine dönüştürebiliriz. Demek ki $(x_n)_n$ dizisinden ilk birkaç terimi attığımızda elde edilen $(z_n)_n$ dizisinin yakınsaklığının ve yakınsaksa limitinin değişmediğini göstermemiz gerekiyor. Belli bir A doğal sayısı için $z_n = x_{n+A}$ olsun. a, $(x_n)_n$ dizisinin limiti olsun. Bir $\epsilon > 0$ sayısı alalım. N sayısı, her $n > N$ için, $|x_n - a| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilmiş olsun. O zaman, $n > N$ için, $n+A > N$ olduğundan,

$$|z_n - a| = |x_{n+A} - a| < \epsilon$$

olur. Benzer yöntemle, yakınsak bir $(z_n)_n$ dizisinin başına terimler ekleyerek elde edilen $(x_n)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve limitin değişmediğini kanıtlayabiliriz. □

Verilen tanıma göre, bir dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamak için dizinin limitini bilmek gerekir. İlerde dizinin limitini bilmeden de dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamanın yöntemlerini bulacağız.

Alıştırmalar

4.23. $A \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir küme olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in A$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

4.24. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in \mathbb{Z}$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

4.25. $(e_n)_n$, 0'a yakınsayan bir dizi olsun. $(x_n)_n$ bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $m > 0$ doğal sayısı için,

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < e_m$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsadığını kanıtlayın.

4.26. $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve $a \in \mathbb{R}$ ise $(ax_n)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} ax_n = a \lim_{n\to\infty} x_n$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.27. $(x_n)_n$, 0'a yakınsayan bir diziyse ve her n göstergeci için $|y_n| \le |x_n|$ ise, $(y_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

4.28. Eğer $(x_n)_n$ yakınsak bir diziyse, $(|x_n|)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right|$$

eşitliğini kanıtlayın. Bunun tersi doğru mudur?

4.29. Eğer $x = (x_n)_n$, 0'a yakınsayan bir diziyse, $(|x_n|)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını gösterin.

4.30. $(x_n)_n$, yakınsak bir dizi olsun ve her n göstergeci için $a \le x_n$ olsun. $a \le \lim_{n\to\infty} x_n$ eşitsizliğini kanıtlayın. Her n için $a < x_n$ eşitsizliğine rağmen $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ eşitliğinin olabileceğini gösterin.

4.31. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$, aynı sayıya yakınsayan iki dizi olsun. $z_{2n} = x_n$ ve $z_{2n+1} = y_n$ olsun. $(z_n)_n$ dizisinin de aynı sayıya yakınsadığını kanıtlayın.

4.32. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$, iki farklı sayıya yakınsayan iki dizi olsun. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ kesişiminin sonlu olduğunu kanıtlayın.

4.33. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ eşdeğerliğini kanıtlayın.

4.34. $(x_n)_n$ yakınsak bir dizi ve

$$y_n = \begin{cases} x_{n-1} & \text{eğer } n \text{ tekse} \\ x_{n+1} & \text{eğer } n \text{ çiftse} \end{cases}$$

olsun. $(y_n)_n$ dizisinin de yakınsak bir dizi olduğunu ve her iki dizinin de limitinin aynı olduğunu kanıtlayın.

4.35. $(x_n)_n$ yakınsak bir dizi olsun. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, artan bir fonksiyon olsun. $y_n = x_{f(n)}$ olsun. $(y_n)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve her iki dizinin de limitinin aynı olduğunu kanıtlayın. (Bir sonraki alıştırma bundan daha da genel bir sonucu kanıtlamanızı istiyor.)

4.36. $(x_n)_n$ yakınsak bir dizi olsun. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, her $n \in \mathbb{N}$ için, $f^{-1}(n)$ kümesinin sonlu olduğu bir fonksiyon olsun. $y_n = x_{f(n)}$ olsun. $(y_n)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve her iki dizinin de limitinin aynı olduğunu kanıtlayın.

4.37. Artan ve üstten sınırlı bir dizinin en küçük üstsınırına yakınsadığını kanıtlayın. Yani $(x_n)_n$ dizisi, sabit bir b için her n için $x_n \le x_{n+1} \le b$ eşitsizliklerini sağlıyorsa ve

$$s = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ise, $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ eşitliğini kanıtlayın.

4.38. $(I_n)_n$ küçülen, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n \supseteq I_{n+1}$ içindeliğini sağlayan kapalı aralıklar dizisi olsun. $\bigcap_n I_n$ kesişiminin boşküme olamayacağını gösterin.

4.39. Alıştırma 4.38'nın $\mathbb{Q}$ için yanlış olduğunu kanıtlayın. (Tanım gereği, $\mathbb{Q}$'nün bir aralığının uç noktaları da $\mathbb{Q}$'de olmalıdır.)

4.40. Alıştırma 4.38'nın $(a, b]$ türünden yarı kapalı aralıklar için yanlış olduğunu kanıtlayın.

4.41. Eğer $x_n \ge 0$ ise ve $\lim_{n\to\infty} x_n$ varsa, o zaman,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{1/2}$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.42. a_0, $b_0 > 0$ ve $a > 0$ olsun.

$$a_{n+1} = \frac{a}{1 + a_n} \text{ ve } b_{n+1} = \frac{a}{b_n}$$

olsun. $(a_n)_n$ dizisinin $x^2 + x - a = 0$ denkleminin pozitif köküne, $(b_n)_n$ dizisinin de negatif köküne yakınsadığını kanıtlayın.

Kısa Tarih Notu. MÖ 5'inci yüzyılda Elea'lı filozof Zenon (M.Ö. 490-430) bir mesafeyi sonsuz defa 2'ye bölerek limit kavramını - adını vermeden - ilk kez dile getirmiştir diyebiliriz. Demokrit (MÖ 460-370) şeylerin sonsuza kadar bölünemeyeceğini düşünerek atom kavramını ortaya atmıştır. Arşimet (MÖ 287-212) dizilerle ve limit kavramıyla bir parabolün içerdiği alanı hesaplamış ve π sayısının o ve ilerki çağlarda rekor sayılabilecek yaklaşık değerlerini bulmuştur. Bugünkü limit kavramını Bolzano (1816'da) ve Cauchy (1821'de) birbirinden bağımsız olarak bulmuşlardır. Aynı kavramı Bolzano'nun da bulduğu çok daha sonradan anlaşılmıştır.