3. Kesirli Üsler ve Kökler

Bundan böyle $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ sayı kümeleri üzerine tanımlanmış toplama ve çarpma gibi basit aritmetiksel işlemleri ve bu işlemlerle ilgili basit olguları -kanıtlamamış olsak da- bildiğimizi varsayacağız. Örneğin asal sayılardan hiç sözetmedik ama her doğal sayının tek bir biçimde asalların çarpımı olarak yazıldığını bildiğimizi varsayacağız. Öte yandan üs almanın tanımını ve özellikleri aşağıda vereceğiz.

3.1 Kesirli Üs Alma ve Kök Bulma

Eğer x bir gerçel sayı ve n bir doğal sayıysa, x'in n'inci üssü adı verilen x^n gerçel sayısını n üzerine tümevarımla tanımlayacağız. Önce $n = 0$ şıkkından başlayalım[1]:

$$x^0 = 1.$$

Eğer x^n tanımlanmışsa, x^{n+1} sayısını $x^n x$ olarak tanımlayalım:

$$x^{n+1} = x^n x.$$

Tanımın hemen ardından tahmin edilen ve liseden beri bilinen eşitlikleri kanıtlayalım:

Teorem 3.1. *Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her n, $m \in \mathbb{N}$ için,*
0. $1^n = 1$, $x^1 = x$ *ve* $n > 0$ *için* $0^n = 0$.
i. $x^{m+n} = x^m x^n$.
ii. $(xy)^n = x^n y^n$.
iii. $(x^m)^n = x^{mn}$.
iv. $0 < n$ *ve* $0 < x < y$ *ise* $x^n < y^n$.

Kanıt: Önermelerin her biri n üzerine tümevarımla kanıtlanır. Diğerlerini okura alıştırma olarak bırakarak örnek olarak (i)'i kanıtlayalım:

$n = 0$ için: $x^{m+0} = x^m = x^m 1 = x^m x^0$.

[1]Bazıları, genellikle analizciler, 0^0 ifadesini tanımsız kabul eder. Cebirde ve aritmetikte $0^0 = 1$ tanımını yapmak işimize gelir. En azından ders notlarının başlarında $0^0 = 1$ tanımını yapalım. İlerde limit konusuna geldiğimizde 0^0 ifadesini tanımsız kabul etme hakkını saklı tutalım.

Şimdi, $x^{m+n} = x^m x^n$ eşitliğini varsayıp, $x^{m+(n+1)} = x^m x^{n+1}$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$x^{m+(n+1)} = x^{(m+n)+1} = x^{m+n}x = (x^m x^n)x = x^m(x^n x) = x^m x^{n+1}.$$

Teorem 3.1'in kanıtı tamamlanmıştır. □

Her değişmeli halkada geçerli olan $(x+y)^n$ ifadesinin binom açılımını okurun bildiğini varsayıyoruz. Zaten bunu [N2]'de de görmüştük.

Eğer $x \neq 0$ ve $n < 0$ ise, x^n terimini şöyle tanımlarız: $x^n = 1/x^{-n}$. Son maddesindeki "ufak" bir oynamayla Teorem 3.1 tamsayılar için de geçerlidir:

Teorem 3.2. *Her $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve her $n, m \in \mathbb{Z}$ için,*
0. $x^{-n} = 1/x^n$.
i. $x^{m+n} = x^m x^n$.
ii. $(xy)^n = x^n y^n$.
iii. $(x^m)^n = x^{mn}$.
iv. *$n < 0$ ve $0 < x < y$ ise $x^n > y^n$.*

Kanıt: Tanımdan ve Teorem 3.1'den çıkar. Okura bırakıyoruz. □

Sonuç 3.3. *$n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, x, $y > 0$ ve $x^n = y^n$ ise o zaman $x = y$ olur.*

Kanıt: Teorem 3.1.vi ve Teorem 3.2.vi'dan çıkar. □

Buraya kadar yaptıklarımız oldukça kolaydı. Daha zor konu ve sonuçlara doğru yelken açalım. Pozitif gerçel sayıların köklerini bulalım, yani $a > 0$ bir gerçel sayıysa ve $n \neq 0$ bir tamsayıysa, $X^n = a$ denklemini gerçel sayılarda çözebileceğimizi görelim. Bu çözümün pozitif gerçel sayılarda biricik olduğunu kanıtlayabilirsek, $a^{1/n}$ gerçel sayısını bu biricik pozitif çözüm olarak tanımlayabiliriz.

Teorem 3.4. *$a > 0$ bir gerçel sayıysa ve $n \neq 0$ bir tamsayıysa, $X^n = a$ denkleminin pozitif gerçel sayılarda bir ve bir tek çözümü vardır.*

Kanıt: Sonuç 3.3, çözümün (eğer varsa) biricikliğini söylüyor. Çözümün varlığını kanıtlayalım. Eğer $a = 0$ ya da 1 ise her şey bariz. Bundan böyle $a > 0$ ve $a \neq 1$ varsayımlarını yapalım.

Çözümün varlığını pozitif n tamsayıları için kanıtlamak yeterli. Nitekim, eğer $n > 0$ için $x > 0$ gerçel sayısı $X^n = a$ denkleminin bir çözümüyse, o zaman $1/x$ pozitif gerçel sayısı $X^{-n} = a$ denkleminin bir çözümüdür.

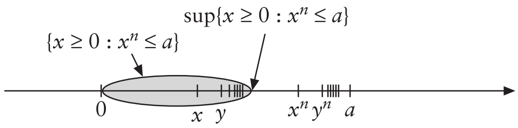
$n = 1$ için $x = a$ bir çözüm olduğundan, n'yi 1'den de büyük alabiliriz. Bundan böyle $n > 1$ olsun.

Teoremi, 1'den büyük a gerçel sayıları için kanıtlamak da yeterlidir. Nitekim, eğer $0 < b < 1$ ise, $1/b > 1$ olur ve $x > 0$ gerçel sayısı $X^n = 1/b$ denkleminin bir çözümüyse, o zaman $1/x$ pozitif gerçel sayısı $X^n = b$ denkleminin bir çözümüdür.

$n > 1$ bir tamsayı ve $a > 1$ bir gerçel sayı olsun. $X^n = a$ denklemi çözmek için,

$$x \geq 0 \text{ ve } x^n \leq a$$

eşitsizliklerini sağlayan gerçel sayılar kümesinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlayıp, kümenin (SUP) aksiyomuna göre var olduğunu bildiğimiz en küçük üstsınırını alacağız. Kanıtlayacağımız üzere, bu en küçük üstsınır $X^n = a$ denkleminin çözümü olacak.

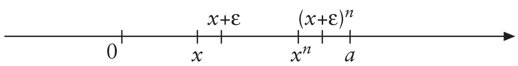


Planımızı uygulayalım. $n > 1$ bir tamsayı ve $a > 1$ bir gerçel sayı olsun.

$$A = \{x \geq 0 : x^n \leq a\}$$

olsun. $0, 1 \in A$ olduğundan A boşküme değildir. Ayrıca A, a tarafından üstten sınırlıdır, çünkü $1 < a$. Demek ki (SUP) aksiyomuna göre, A'nın bir en küçük üstsınırı vardır. Bu en küçük üstsınıra s adını verelim. Elbette $s \geq 1$. Şimdi $s^n = a$ eşitliği iki adımda (aşağıdaki Sav 1 ve 2) kanıtlayalım. Önce bir önsav.

Önsav 3.5. *$n > 1$ bir doğal sayı olsun. a ve x iki pozitif gerçel sayı olsun. Eğer $x^n < a$ ise, $(x + \epsilon)^n < a$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı vardır.*



Kanıt: $(x + \epsilon)^n$ terimiyle oynayarak, bu terimin a'dan küçükeşit olması için ϵ'un ne kadar küçük (ama pozitif) olması gerektiğini göreceğiz. ϵ sayısını, eğer varsa, her zaman 1'den küçük, hatta $1/2$'den küçükeşit seçebiliriz, çünkü eğer bir $\epsilon > 1/2$ için $(x + \epsilon)^n < a$ eşitsizliği doğruysa, o zaman $\epsilon = 1/2$ için de aynı eşitsizlik doğrudur. Hesaplara başlayalım:

$$\begin{aligned}
(x + \epsilon)^n &= \binom{n}{1} x^{n-1}\epsilon + \cdots + \binom{n}{i} x^{n-i}\epsilon^i + \cdots + \epsilon^n \\
&< x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\epsilon + \cdots + \binom{n}{i} x^{n-i}\epsilon + \cdots + \epsilon \\
&= x^n + \epsilon\left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{i} x^{n-i} + \cdots + 1\right) = x^n + \epsilon B.
\end{aligned}$$

Burada, B sayısı,

$$B = \binom{n}{1} x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{i} x^{n-i} + \cdots + 1$$

olarak alınmıştır. Demek ki $(x+\epsilon)^n < a$ eşitsizliğinin sağlanması için $x^n+\epsilon B \leq a$ eşitsizliğinin sağlanması yeterlidir. Dolayısıyla ϵ'un ne kadar küçük olması gerektiği de bellidir:

$$\epsilon = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{a-x^n}{B}\right\}.$$

ϵ'u böyle seçerek istediğimiz $(x+\epsilon)^n \leq a$ eşitsizliğini kanıtlarız. Önsavımız kanıtlanmıştır. $\square$

Şimdi Teorem 3.4'ün kanıtına devam edebiliriz. s'yi anımsayın: $s = \sup(A)$.

Sav 1. $s^n \geq a$.
Sav 1'in Kanıtı: Tam tersine, $s^n < a$ eşitsizliğini varsayalım. Önsav 3.5'e göre yeterince küçük bir $\epsilon > 0$ sayısı için, $(s+\epsilon)^n < a$ eşitsizliği sağlanır. Ama o zaman da s'den büyük olan $s+\epsilon$ sayısı A'da olur ve bu da s'nin en küçük üstsınır olmasıyla çelişir. Sav 1 kanıtlanmıştır. $\square$

Bu savdan, $s \neq 1$ çıkar. Demek ki $s > 1$. Bu, birazdan önem kazanacak.

Sav 2. $s^n \leq a$.
Sav 2'nin Kanıtı: Tam tersine, $s^n > a$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman $(1/s)^n < 1/a$ olur. Önsav 3.5'e göre, belli bir $\epsilon > 0$ için,

$$\left(\frac{1}{s}+\epsilon\right)^n < \frac{1}{a}$$

olur. Buradan

$$a < \left(\frac{s}{1+s\epsilon}\right)^n$$

olur. Ama

$$\frac{s}{1+s\epsilon} < s = \sup A$$

olduğundan, bir $x \in A$ için

$$\frac{s}{1+s\epsilon} < x < s$$

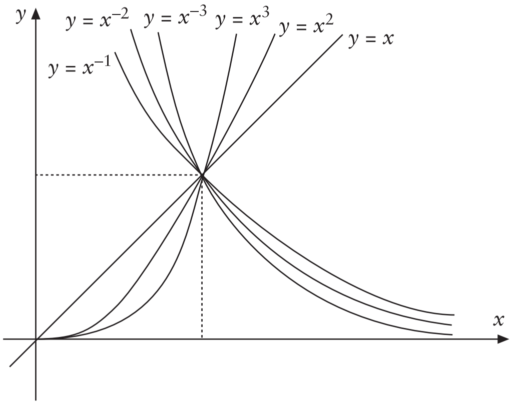
olur. Böylece,

$$a < \left(\frac{s}{1+s\epsilon}\right)^n < x^n \leq a$$

elde ederiz, ki bu bir çelişkidir. $\square$

Sav 1 ve 2'den $s^n = a$ eşitliği çıkar.
Teorem 3.4 tamamen kanıtlanmıştır. $\square$

Sonuç 3.6. *Eğer $n \neq 0$ bir tamsayıysa, $f(x) = x^n$ kuralıyla tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ kümesinin bir eşleşmesidir. Eğer $n > 0$ ise f sürekli artar. Eğer $n < 0$ ise f sürekli azalır.*



Kanıt: f'nin eşleşme olduğunu Teorem 3.4 söylüyor. f'nin artan ya da azalan olması Teorem 3.1.iv ve Teorem 3.2.iv'ten belli. $\square$

$a > 0$ gerçel sayısı ve $n \neq 0$ tamsayısı için, $X^n = a$ denkleminin biricik pozitif çözümü $a^{1/n}$ olarak yazılır. Demek ki, $a > 0$ için,

$$(a^{1/n})^n = a \text{ ve } a^{1/n} > 0.$$

Bir başka deyişle,

$$x = a^{1/n} \Leftrightarrow x^n = a \text{ ve } x > 0.$$

Kimileyin $a^{1/n}$ yerine $\sqrt[n]{a}$ yazılır. Ayrıca $\sqrt[2]{a}$ yerine $\sqrt{a}$ ya da $\sqrt{a}$ yazılır.

Son olarak, $q \in \mathbb{Q}$ ve $a \in \mathbb{R}^{>0}$ için a^q sayısını tanımlayalım. $m, n \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $q = m/n$ olarak yazıp,

$$a^q = (a^m)^{1/n}$$

tanım denemesini yapalım. Yani, a^q sayısı için,

$$x = a^q \Leftrightarrow x^n = a^m \text{ ve } x > 0$$

tanımını önerelim.

Bunun gerçekten bir tanım olması için, örneğin,

$$a^{15/6} = a^{25/10} = a^{30/12},$$

yani

$$(a^{15})^{1/6} = (a^{25})^{1/10} = (a^{30})^{1/12}$$

olmalı; daha genel olarak, m, m', n, $n' \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için, $m/n = m'/n'$ olduğunda

$$(a^m)^{1/n} = (a^{m'})^{1/n'}$$

olmalı, yoksa a^q sayısının tanımı q'ye göre değil, $q = m/n$ eşitliğini sağlayan m ve n tamsayılarına göre değişebilir. Bir sonraki önsav, $(a^m)^{1/n}$ sayısının m ve n'ye göre değil, m/n'ye göre değiştiğini gösterecek.

Önsav 3.7. *m, m', n, n' tamsayıları için $m/n = m'/n'$ ise her $a > 0$ için $(a^m)^{1/n} = (a^{m'})^{1/n'}$ olur.*

Kanıt: Varsayıma göre $mn' = m'n$. Şimdi $x = (a^m)^{1/n}$ ve $y = (a^{m'})^{1/n'}$ olsun. Demek ki $x^n = a^m$ ve $y^{n'} = a^{m'}$. Dolayısıyla,

$$y^{n'm} = (y^{n'})^m = a^{m'm} = a^{mm'} = (x^n)^{m'} = x^{nm'} = x^{n'm}.$$

Sonuç 3.3'ten $y = x$ çıkar. □

Böylece artık $x > 0$ için $x^{n/m} = (x^n)^{1/m}$ tanımını yapabiliriz.

Gözden kaçabilecek bir şey daha kontrol edilmeli, $n \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{R}^{>0}$ için, a^n'nin eski tanımıyla, yukarda tanımlanan $a^{n/1}$ sayısı birbirine eşit olmalı, yani n'yi tamsayı olarak da görsek, $n/1$ olarak kesirli sayı olarak da görsek, a^n'nin her iki tanımı da aynı sonucu vermeli. Nitekim öyle: $a^{n/1}$ sayısının yukardaki tanımına göre,

$$x = a^{n/1} \Leftrightarrow x^1 = a^n \text{ ve } x > 0$$

olmalı ve bu da "$x = a^{n/1} \Leftrightarrow x = a^n$" demektir, yani $a^{n/1} = a^n$.

Teorem 3.8. *Her $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ ve $p, q \in \mathbb{Q}$ için,*
0. $1^p = 1$, $x^0 = 1$, $x^1 = x$,
i. $x^{p+q} = x^p x^q$ *ve* $x^{-p} = 1/x^p$.
ii. $(xy)^p = x^p y^p$.
iii. $(x^p)^q = x^{pq}$.
iv. $0 < p$ *ve* $x < y$ *ise* $x^p < y^p$.
v. $0 > p$ *ve* $x < y$ *ise* $x^p > y^p$.
vi. $p < q$ *ve* $1 < x$ *ise* $x^p < x^q$.
vii. $p < q$ *ve* $x < 1$ *ise* $x^q < x^p$.

Kanıt: Her şey tanımdan ve Teorem 3.1, Teorem 3.2 ve Sonuç 3.3'ten oldukça kolay bir biçimde çıkar. □

Alıştırma 3.1. $n \neq 0$ ve m tamsayıları ve $a > 0$ için, $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$ eşitliğini kanıtlayın.

Eğer $a < 0$ ise, $X^2 = a$ denkleminin gerçel sayılarda çözümü yoktur çünkü gerçel sayılarda kareler negatif olamazlar (bkz. Bölüm 2, U maddesi). Aynı nedenden eğer $a < 0$ ve n bir çift tamsayıysa, $X^n = a$ denkleminin de gerçel sayılarda çözümü olamaz. Öte yandan, şimdi kanıtlayacağımız üzere, eğer n bir tek doğal sayıysa, a hangi gerçel sayı olursa olsun, $X^n = a$ denkleminin gerçel sayılarda bir ve bir tek çözümü vardır.

Teorem 3.9. i. *Eğer n bir tek doğal sayıysa, her $a \in \mathbb{R}$ için $X^n = a$ denkleminin gerçel sayılarda bir ve bir tek çözümü vardır. Bir başka deyişle $f(x) = x^n$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}$'nin (artan) bir eşleşmesidir.*

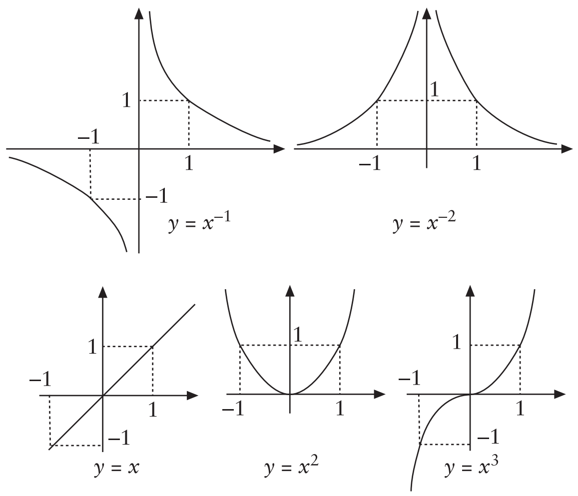
ii. *Eğer $a \neq 0$ ise aynı şey n tek tamsayıları için de geçerlidir. Yani $f(x) = x^n$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinin bir eşleşmesidir.*
iii. *Eğer $a \geq 0$ ise ve n bir çift tamsayıysa $X^n = a$ denkleminin gerçel sayılarda iki çözümü vardır. Eğer x bir çözümse, $-x$ diğer çözümdür.*

Kanıt: i. Eğer $a \geq 0$ ise, bu aynen Teorem 3.4. $a \leq 0$ durumu,

$$x^n = a \Leftrightarrow (-x)^n = -a$$

eşdeğerliğinden ve yukardakinden çıkar. Artanlığı ve teoremin (ii, iii) kısımlarını okura bırakıyoruz. □

Bu $f(x) = x^n$ fonksiyonlarının el yordamıyla çizilen grafiği meraklısı için aşağıda ayrı ayrı gösterilmiştir. (Matematikçiler grafikleri her zaman el yordamıyla çizerler...)



Teorem 3.9.ii'ye göre, eğer $n > 0$ tek bir tamsayıysa, sadece $a > 0$ için değil, her $a \in \mathbb{R}$ için $a^{1/n}$ sayısını $X^n = a$ denkleminin biricik çözümü olarak tanımlayabiliriz. Ama o zaman tehlikelere maruz kalırız, örneğin:

$$-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6} = 1^{1/6} = 1.$$

Bu yüzden negatif tamsayıların kökü alınmaz, alınırsa da hesaplarda dikkatli olunur.

Kesirli olmayan gerçel sayılara ***irrasyonel*** ya da ***kesirli olmayan gerçel sayılar*** adı verilir. Örneğin $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. Daha genel bir olgu doğrudur.

Önsav 3.10. *$k > 0$ bir tamsayı ve $a \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer a bir doğal sayının k'inci gücü değilse $a^{1/k}$ kesirli bir sayı olamaz.*

Kanıt: Tam tersine, $a^{1/k}$ sayısının kesirli olduğunu varsayalım ve n, $m > 0$ tamsayıları için,

$$a^{1/k} = n/m$$

yazalım. Gerekirse sadeleştirerek, n ve m tamsayılarının birbirine asal olduklarını varsayabiliriz. Yukardaki eşitliğin her iki tarafının da k'inci gücünü alarak,

$$a = n^k/m^k,$$

yani

$$am^k = n^k$$

elde ederiz. Bu eşitlikten, m'yi bölen her asalın n'yi de bölmek zorunda olduğu çıkar. n ve m birbirine asal olduklarından, $m = 1$ çıkar. □

Teorem 3.11. *İrrasyonel sayılar $\mathbb{R}$'de yoğundurlar, yani herhangi iki değişik gerçel sayı arasında irrasyonel bir sayı vardır.*

Kanıt: $a < b$ iki gerçel sayı olsun. Teorem 2.13'e göre, $a\sqrt{2} < q < b\sqrt{2}$ eşitsizliklerini sağlayan bir q kesirli sayısı vardır. Şimdi $q/\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayıdır (yoksa $\sqrt{2}$ rasyonel, yani kesirli olurdu) ve a ve b arasındadır. □

Örnekler

3.2. $0 < q < p$ iki kesirli sayı olsun. Her $n > 1$ doğal sayısı için

$$\frac{n^p - n^q}{(n+1)^p - (n+1)^q} < 1$$

eşitsizliğini kanıtlayın.
Kanıt: $n^p - n^q < (n+1)^p - (n+1)^q$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Bu eşitsizlik

$$n^q(n^{p-q} - 1) < (n+1)^q((n+1)^{p-q} - 1)$$

ve

$$n^{p-q} - 1 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^q ((n+1)^{p-q} - 1)$$

eşitsizliklerine denktir. Bu son eşitliği kanıtlayalım:

$$n^{p-q} - 1 < (n+1)^{p-q} - 1 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^q ((n+1)^{p-q} - 1).$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

3.3. *Yeterince büyük n doğal sayıları için $\sum_{i=1}^n 1/i \le \sqrt{n}$ eşitsizliğini kanıtlayın.*
Kanıt: Aklımıza ilk gelen yöntem tümevarım olmalı. Eşitsizlik $n = 1$ için doğru ama $n = 2$ için yanlış. Hatta $n = 3, 4, 5, 6$ için de yanlış. Ama $n = 7$ için doğru. $n = 7$'den başlayarak tümevarımla kanıtlamaya çalışalım. $n \ge 7$ olsun ve eşitsizliğin n için doğru olduğunu varsayıp $n + 1$ için kanıtlayalım.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} \le \sqrt{n} + \frac{1}{n+1}$$

olduğundan,

$$\sqrt{n}+\frac{1}{n+1}\le\sqrt{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Bu eşitsizlikle

$$\frac{1}{n+1}\le\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

eşitsizliği ve

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\le n+1$$

eşitsizliği eşdeğer. Ama

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

olduğundan, bu son eşitsizliği kanıtlamak için

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\le n+1$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Öte yandan,

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\le\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}=2\sqrt{n+1}$$

eşitsizliğinden dolayı, bu en son eşitsizliği kanıtlamak için

$$2\sqrt{n+1}\le n+1$$

yani

$$2\le\sqrt{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli, ki $n\ge 3$ doğal sayıları için bunu elbette biliyoruz. □

3.2 Bazı Basit Sonuçlar

İlerde karşılaşacağımız bazı basit sonuçları bu altbölümde toparlıyoruz. Okur, ruh haline göre, ya bu sonuçları kanıtlarına bakmadan tek başına kanıtlamaya çalışmalıdır ya da tam tersine, şimdilik atlayıp gerektiğinde geri dönmelidir. Matematiğe yeni başlayanlara (ruh hallerinden bağımsız olarak) birinci seçeneği öneririz.

Önsav 3.12. *Her k doğal sayısı için $10^k>k$ olur.*

Kanıt: k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $k=0$ için,

$$k=0<1=10^0=10^k.$$

Bir de $k=1$ için kanıtlayalım:

$$k=1<10=10^1=10^k.$$

Şimdi $k\ge 1$ olsun ve $10^k>k$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Elbette $10^k\ge k+1$ olur. Hesap vakti geldi:

$$10^{k+1}=10\times 10^k>10^k\ge k+1.$$

(Son eşitsizlik, kanıtın başında teoremi neden $k=0$ ve $k=1$ için kanıtladığımızı göstermektedir.) □

Sonuç 3.13. *Her $\epsilon > 0$ gerçel sayısı için öyle bir N doğal sayısı vardır ki, her $n > N$ doğal sayısı için, $10^{-n} < \epsilon$ olur.*

Kanıt: N, $1/\epsilon$'dan büyük bir doğal sayı olsun (Arşimet Özelliği). O zaman,

$$10^N > N > 1/\epsilon$$

yani

$$10^{-N} < \epsilon$$

olur. Dolayısıyla her $n > N$ için,

$$10^{-n} < 10^{-N} < \epsilon$$

olur. □

Önsav 3.14. *Her k doğal sayısı ve her $r \neq 1$ gerçel sayısı için,*

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}.$$

Kanıt: $S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^k$ olsun. Bu sayıyı r ile çarpalım:

$$rS = r(1 + r + r^2 + \cdots + r^k) = r + r^2 + \cdots + r^{k+1}.$$

Şimdi S'yi ve rS'nin bu ifadelerini altalta yazalım:

$$\begin{aligned} S &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^k \\ rS &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{k+1}, \end{aligned}$$

ve birbirinden çıkaralım. $r, r^2, \ldots, r^k$ ifadeleri sadeleşir ve geriye sadece 1 ve r^{k+1} kalır:

$$S - rS = 1 - r^{k+1},$$

yani

$$(1 - r)S = 1 - r^{k+1}$$

bulunur. Buradan da S bulunur. □

Alıştırmalar

3.4. Önsav 3.14'ü k üzerine tümevarımla kanıtlayın.
3.5. $2^n \geq n^2$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?
3.6. $3^n \geq n^2$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?
3.7. $2^n \geq n^3$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?
3.8. $3^n \geq n^3$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?

3.3 Bernoulli-vari Eşitsizlikler

Sonuçlarımızı üç bölüme ayıracağız.

Birinci Bölüm. Bu altbölümde, ilerde sık sık başvuracağımız meşhur (Jacob) Bernoulli eşitsizliğini ve bu eşitsizliğin türevlerini kanıtlayacağız.

Önsav 3.15 (Bernoulli)**.** *Eğer $s \geq 0$ ise, her n doğal sayısı için, $(1+s)^n \geq 1+ns$ olur.*

Kanıt: Binom açılımından doğrudan çıkar:

$$(1+s)^n = 1 + ns + \binom{n}{2}s^2 + \cdots + s^n \geq 1 + ns.$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

Bundan daha genel bir sonuç doğru:

Önsav 3.16 (Bernoulli)**.** *Eğer $s > -1$ ise, her n doğal sayısı için*

$$(1+s)^n \geq 1 + ns$$

olur.

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise, kanıtlayacağımız eşitsizlik, $1 \geq 1$ eşitsizliğine dönüşüyor ki bunun doğru olduğu belli.

Şimdi eşitsizliğin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım. $1 + s > 0$ olduğundan,

$$(1+s)^{n+1} = (1+s)^n(1+s) \geq (1+ns)(1+s) = 1+(n+1)s+ns^2 \geq 1+(n+1)s.$$

Savımız kanıtlanmıştır. □

Önsav 3.17. *Eğer $r < 1$ ise, her n doğal sayısı için, $(1-r)^n \geq 1-nr$ olur.*

Kanıt: Önsav 3.16'da $s = -r$ almak yeterli. □

Birazdan yukardaki sonucu doğal sayılardan kesirli sayılara genelleştireceğiz (Sonuç 3.22).

Önsav 3.18. *Her $p \geq 1$ kesirli sayısı ve $x \geq 0$ gerçel sayısı için*

$$1 + px \leq (1+x)^p$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: $a \geq b > 0$ doğal sayıları için $p = a/b$ olsun. Demek ki

$$1 + \frac{ax}{b} \leq (1+x)^{a/b}$$

yani

$$\left(1 + \frac{ax}{b}\right)^b \leq (1+x)^a$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Her iki tarafı da açarsak, kanıtlamak istediğimizin,

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} \frac{a^i x^i}{b^i} \leq \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i$$

eşitsizliği olduğunu görürüz. Sağ tarafta her biri pozitif olan daha çok terim olduğundan, her $i = 0, 1, \ldots, b$ için,

$$\binom{b}{i} \frac{a^i}{b^i} \leq \binom{a}{i}$$

eşitliğini kanıtlamak yeterli. Bu eşitsizlik $i = 0$ için doğru. Şimdi eşitsizliğin i için doğru olduğunu varsayıp (tümevarım varsayımı), eşitsizliği $i+1$ için kanıtlayalım. Tümevarım varsayımını kullanarak,

$$\begin{aligned} \binom{b}{i+1} \frac{a^{i+1}}{b^{i+1}} &= \binom{b}{i} \frac{b-i}{i+1} \frac{a^i}{b^i} \frac{a}{b} = \binom{b}{i} \frac{a^i}{b^i} \frac{b-i}{i+1} \frac{a}{b} \leq \binom{a}{b} \frac{b-i}{i+1} \frac{a}{b} \\ &= \binom{a}{i+1} \frac{i+1}{a-i} \frac{b-i}{i+1} \frac{a}{b} = \binom{a}{i+1} \frac{b-i}{a-i} \frac{a}{b} \leq \binom{a}{i+1} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (En sondaki eşitsizlikte $a \geq b$ varsayımını kullandık.) Önsav kanıtlanmıştır. □

İkinci Bölüm[2]**.** Bu bölümde yukarda kanıtladığımız 3.15-3.18 numaralı sonuçları çok daha şık bir biçimde bir defa daha kanıtlayacağız ama ayrıca kitabın en sonundaki ekte (sayfa 356'te) $x \in \mathbb{R}$ iken a^x sayısını tanımlamamızda çok yararlı olacak olan Sonuç 3.20'yi kanıtlayacağız. (Daha önce a^x sayısını sadece $x \in \mathbb{Q}$ iken tanımlamıştık.) Dileyen okur bu bölümü okuduktan sonra doğrudan kitabın sonundaki eke gidip $x \in \mathbb{R}$ iken a^x sayısının tanımını görebilir. Dileyen okur ise üs almayı tanımlamak için ikinci cildi bekleyebilir; nitekim ikinci ciltte üs almayı çok daha genel bir teorem kanıtlayarak tanımlayacağız.

Önsav 3.19. *Eğer $x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise $(n+1)x^n - 1 \leq nx^{n+1}$ olur ve eşitlik sadece $x = 1$ için mümkündür.* □

[2] Bu ikinci bölümdeki sonuçlar ve zarif kanıtları için Yusuf Ünlü'ye müteşekkiriz.

Kanıt: Oldukça kolay bir hesap:

$$
\begin{aligned}
(n+1)x^n - nx^{n+1} - 1 = -nx^n(x-1) + (x^n - 1) &= (x-1)\left(-nx^n + \sum_{i=0}^{n-1} x^i\right)\\
&= (x-1)\sum_{i=0}^{n-1}(x^i - x^n) = -(x-1)\sum_{i=0}^{n-1} x^i(x^{n-i}-1)\\
&= -(x-1)^2 \sum_{i=0}^{n-1}\left(x^i \sum_{j=0}^{n-i-1} x^j\right) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

Sonuç 3.20. *Eğer $1 \neq x \geq 0$ ve $0 \leq p < q$ iki kesirli sayıysa*

$$\frac{x^p - 1}{p} < \frac{x^q - 1}{q}$$

olur.

Kanıt: Önermeyi önce p ve q doğal sayıları için kanıtlayalım. $q = p+1$ için kanıtlamak yeterli. Ama bu da Önsav 3.19'dan hemen çıkar:

Şimdi p ve q iki kesirli sayı olsun. p ve q'nün paydalarını eşitleyerek, $n < m$ ve r doğal sayıları için, $p = n/r$, $q = m/r$ yazabiliriz. $y = x^r$ alarak,

$$\frac{y^n - 1}{n} < \frac{y^m - 1}{m}$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz, ki bunu da bir önceki paragrafta kanıtlamıştık. □

Sonuç 3.21 (Bernoulli)**.** *$0 < p$ kesirli bir sayı ve $-1 \leq x$ gerçel bir sayı olsun. Eğer $1 \leq p$ ise $1 + px \leq (1+x)^p$ olur. Eğer $p < 1$ ise $1 + px \geq (1+x)^p$ olur.*

Kanıt: $a = 1 + x \geq 0$ olsun. Eğer $1 \leq p$ ise Sonuç 3.20'den,

$$x = a - 1 < \frac{a^p - 1}{p} = \frac{(1+x)^p - 1}{p}$$

bulunur ve bu da istediğimizi verir. Eğer $p < 1$ ise, gene Sonuç 3.20'den,

$$\frac{(1+x)^p - 1}{p} = \frac{a^p - 1}{p} < a - 1 = x$$

bulunur ve bu da istediğimizi verir. □

Daha önce oldukça ilkel yöntemlerle ve çıplak elle kanıtlanmış olan 3.15, 3.16, 3.17 ve 3.18 numaralı sonuçlarımız yukardaki önsavdan hemen çıkar[3]. Kanıtları okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Şimdi Önsav 3.17'yi genelleştirebiliriz:

---

[3]Önsav 3.19'u ve bu çok şık sonuçlarını işaret eden Yusuf Ünlü'ye çok teşekkür ederim.

Önsav 3.22. *Her $p \geq 1$ kesirli sayısı ve her $0 < x \leq 1$ gerçel sayısı için*

$$1 - px \leq (1-x)^p$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: $a = 1 - x$ olsun. Sonuç 3.20'ye göre

$$-x = a - 1 = \frac{a^p - 1}{p} = \frac{(1-x)^p - 1}{p}$$

olur ve sonuç bundan çıkar[4]. □

Üçüncü Bölüm. Bu bölümdeki iki sonuç, ilerde, Bölüm 10'da exp fonksiyonunu tanımladığımızda gerekecek.

Önsav 3.23. *Her $n > 0$ için, $2 \leq (1 + 1/n)^n \leq 3$ olur.*

Kanıt: Önsav 3.16'da $s = 1/n$ alırsak, $2 \leq (1 + 1/n)^n$ eşitsizliğini buluruz. Diğer eşitsizlik daha zor. Dikkatli bir hesap yapmak gerekiyor. Yapalım. $n = 1$ ve $n = 2$ için kolay. $n \geq 3$ için:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\frac{1}{n^i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-i+1}{n}\frac{1}{i!} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{i!}\right] < 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \\
&< 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} < 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} < 1 + \frac{1}{1/2} = 3.
\end{aligned}$$

□

Önsav 3.24. *$n > 0$ ve $x > 0$ için,* $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$.

Kanıt: Önsav 3.18'e göre,

$$1 + \frac{x}{n} = 1 + \frac{n+1}{n}\frac{x}{n+1} < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

olur. □

[4]Bu kitabın ilk basımında bu önsavın Görkem Özkaya tarafından bulunan son derece yaratıcı ve olağanüstü güzellikte ama iki sayfa uzunluğunda bir kanıtını vermiştik. Yukarda verdiğimiz ve ilk basımda bulunmayan bu sade ve zarif kanıt Yusuf Ünlü'nün. Görkem Özkaya'nın kanıtını üzülerek kaldırmak zorundayım.

Alıştırma 3.9. $0 < k, n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{k}{kn}\right)^{kn}$$

eşitsizliğini kanıtlayın ve bu eşitsizlikten hareketle

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \leq \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

3.4 Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği I

Bu ve bundan sonraki altbölüm bu kitapta çok esaslı bir biçimde kullanılmayacağından, ilk okumada, kanıtlanan sonuçlar –şöyle bir bakıldıktan sonra– atlanabilir. Öte yandan, çok basit yöntemlerle son derece şaşırtıcı ve güçlü sonuçlar kanıtlayacağımızı da söyleyelim[5].

a ve b sayılarının ***aritmetik ortalaması***,

$$\frac{a+b}{2}$$

olarak tanımlanır; ***geometrik ortalaması*** da,

$$\sqrt{ab}$$

olarak. Negatif sayıların geometrik ortalaması alınmaz, sayıların 0'dan büyükeşit olmaları istenir.

Bu iki ortalama arasında meşhur bir eşitsizlik vardır:

Teorem 3.25. *Her a, $b \geq 0$ için,*

$$\text{(AG)} \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

olur ve eşitlik sadece $a = b$ için geçerlidir.

Bunu kanıtlayalım.

Önce şu kanıtın yanlış olduğunu belirtelim: "Her iki tarafın da karesini al, paydaları eşitleyip 1 yap, sol tarafı sağ tarafa geçir; böylece

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab,$$

yani

$$0 \leq (a+b)^2$$

[5] Bu ve bundan sonraki altbölüm için büyük ölçüde, okura da hararetle tavsiye edeceğimiz [SCY] kitabından yararlanılmıştır.

elde ederiz. Bu son eşitsizlik de doğru olduğundan ilk eşitsizliğimiz de doğrudur." Bu akıl yürütmenin yanlış olmasının nedeni, kanıtlanacak önermeden hareket ederek doğru bir önerme elde etmenin bir kanıt yöntemi olamayacağındandır, çünkü yanlış bir önermeden yola çıkılarak da doğru bir önerme elde edilebilir. Örneğin $0 = 1$ eşitliğinden yola çıkalım. "$0 = 1$ ise, $1 = 0$'dır elbette. Bu iki eşitliği altalta yazıp toplayalım: $1 = 1$ elde ederiz." Bu dediklerimizden $0 = 1$ eşitliğinin doğru olduğu anlaşılmaz elbette.

Ama doğru olduğunu bildiğimiz bir önermeden, örneğin, $0 \leq (a+b)^2$ önermesinden yola çıkarak $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ önermesini (kanıtta bir hata yapmadan) elde edersek, o zaman gerçekten de bu son eşitsizliği kanıtlamış oluruz.

Teorem 3.25'in Birinci Cebirsel Kanıtı: Yukarda verdiğiniz yanlış kanıtı ters çevirmek gerekir.

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

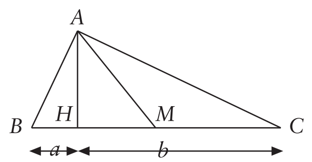
olduğundan, her iki tarafa da $4ab$ ekleyerek

$$4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

elde ederiz. Her iki tarafın karekökünü alıp 2'ye bölersek istediğimiz eşitsizliği elde ederiz.

Bu arada kanıtın ilk satırındaki eşitsizliğin, ancak ve ancak $a = b$ ise eşitlik olabileceği gözönüne alınırsa, ikinci önerme de kanıtlanmış olur. □

Teorem 3.25'in İkinci Geometrik Kanıtı[6]: Bir diküçgende dik köşeden indirilen yükseklik hipotenüzü, aşağıdaki şekildeki gibi a ve b uzunluğunda iki doğru parçasına bölsün.



M, BC'nin orta noktası olsun. Düzlem geometrisinden,

$$|AH|^2 = ab$$

ve

$$|AM| = |BM| = \frac{a+b}{2}$$

eşitliklerini biliyoruz. Ayrıca

$$|AH| \leq |AM|$$

[6]Bu kanıt bu kitaptaki aksiyomatik yaklaşımımızla hiç uyum sağlamıyor. Bu kanıtı bir parantez olarak algılayın lütfen.

eşitsizliğini de biliyoruz. Bu üç olgudan (AG) eşitsizliği kolayca çıkar. □

(AG) eşitsizliğinde a yerine a^2, b yerine b^2 yazarsak ve her iki tarafı da 2'yle çarparsak,

$$2ab \le a^2 + b^2$$

elde ederiz. (Bu eşitsizlik elbette (AG)'siz de kanıtlanır!) Her iki tarafa $a^2 + b^2$ eklersek

$$a^2 + b^2 + 2ab \le 2(a^2 + b^2),$$

yani

$$(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2),$$

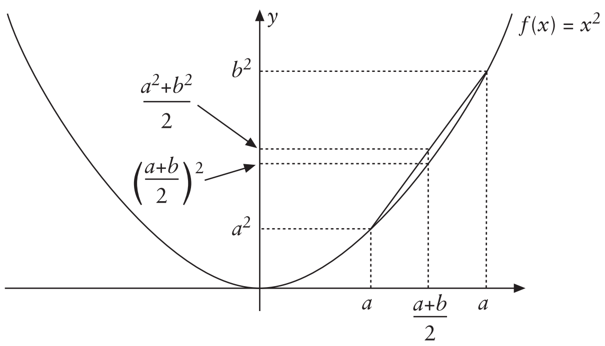
yani

$$\text{(AG}'\text{)} \qquad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

buluruz. Ayrıca bu son eşitsizlikten (AG)'yi elde etmek de zor değildir. Demek ki (AG) ve (AG′) eşitsizlikleri birbirine denktir.

(AG) yerine (AG′) eşitsizliğinin daha kullanışlı olduğu durumlar vardır. Örneklerde göreceğiz.

Teorem 3.25'in Üçüncü Kanıtı[7]: (AG) eşitsizliğine denk olduğunu bildiğimiz (AG′) eşitsizliği, aşağıdaki şekilden de görüldüğü üzere, $f(x) = x^2$ fonksiyonun dışbükeyliğinden de çıkar.



Bu da (AG) eşitsizliğinin üçüncü kanıtını verir. □

Örnekler

3.10. *Çevresi verilmiş bir sabit olan tüm dikdörtgenler arasında, alanı en büyük olanın kare olduğunu kanıtlayın.*

[7]Bu kanıtta da dışbükeylik gibi henüz tanımlamadığımız ama ikinci ciltte tanımlayacağımız geometrik bir kavram kullanacağız. Bu kanıt da bir parantez olarak algılanmalı.

Kanıt: Sabit çevreye p diyelim. Kenarlar a ve b olsun. Demek ki $a+b=p/2$ ve alan ab'ye eşit. (AG)'ye göre,

$$\text{Alan} = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

olur ve ancak $a=b$ ise eşitlik olur. Bundan da en büyük alanın $a=b$ iken meydana çıktığı ve bu alanın $p^2/16$ olduğu anlaşılır.

İkinci Kanıt: Bu kanıt (AG)'yi kullanmadığı gibi başka bir bilgi de kullanmaz. Sabit çevre p, kısa kenar a, büyük kenar b olsun. Demek ki

$$a \leq \frac{p}{2} \leq b \text{ ve } a+b=\frac{p}{2}.$$

Buradan bir $x \geq 0$ sayısı için,

$$a = \frac{p}{4} - x \text{ ve } b = \frac{p}{4} + x$$

çıkar. Dolayısıyla

$$ab = \left(\frac{p}{4} - x\right)\left(\frac{p}{4} + x\right) = \frac{p^2}{16} - x^2$$

olur. Bundan da ab'nin maksimum değerine $x=0$ iken ulaştığı ortaya çıkar: $x=0$ ve $a=b=p/4$. □

3.11. *Alanı verilmiş bir sabit olan tüm dikdörtgenler arasında, çevresi en küçük olanın kare olduğunu kanıtlayın.*

Kanıt: Aynen yukarıdaki birinci kanıttaki gibi. Tekrarlamıyoruz. □

3.12. *Bir diküçgenin dik kenarlarının uzunluklarının toplamının $\sqrt{2}$ defa hipotenüzün uzunluğunu geçemeyeceğini kanıtlayın.*

Kanıt: Dik üçgenin kenarları a, b ve c olsun. Hipotenüsün uzunluğu c olsun. (AG$'$) eşitsizliğine göre,

$$\frac{(a+b)^2}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

ve

$$(a+b)^2 \leq 2c^2$$

olur. Buradan da istenen çıkar. □

3.13. *x, herhangi bir pozitif sayı olsun. $x+1/x$ sayısı en az kaç olabilir? $\alpha > 0$ bir gerçel sayıysa,*

$$\min\{x+1/x : 0 < x \leq \alpha\}$$

kaçtır?

Yanıt: (AG) eşitsizliğini $a=x$ ve $b=1/x$ için uygularsak, $x+1/x$ sayısının en az 2 olacağı çıkar. 2 değeri de $x=1/x$, yani $x=1$ için elde edilir.

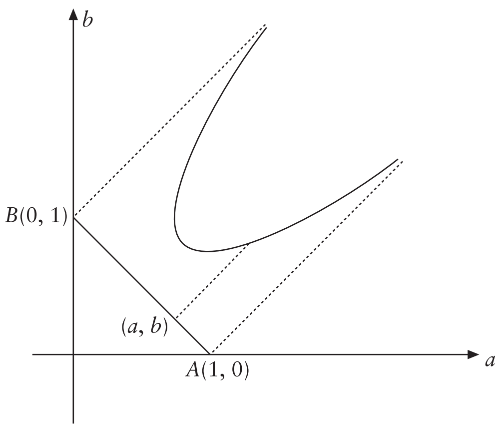
Demek ki $\alpha \geq 1$ ise, ikinci sorunun yanıtı da aynı: Minimum değer $x=1$ için elde edilir ve minimum değer 2'dir. Şimdi $\alpha < 1$ varsayımını yapalım. Kolay bir hesapla kanıtlanacağı üzere $x+1/x$ fonksiyonu $(0, \alpha]$ aralığı üzerine azalır. Demek ki minimum değer $x=\alpha$ iken elde edilir ve bu minimum değer $\alpha+1/\alpha$'dır. □

3.14. *a ve b pozitif sayılar olmak üzere,*

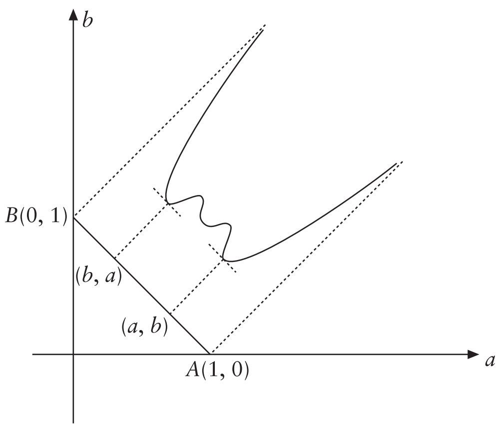
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun. Eğer $a+b=1$ kısıtlaması yapılırsa, en küçük değer ne olur?

Yanıt: Eğer kısıtlama yoksa, yanıt bir önceki sorudan dolayı $4+4=8$ çıkar ve bu sonuç $a=b=1$ için elde edilir. Bundan böyle $a+b=1$ kısıtlaması altında çalışalım. İfade, a ve b değişkenleri açısından simetrik olduğundan, eğer en küçük değer $(a,\ b)$ tarafından alınırsa, aynı değer $(b,\ a)$ tarafından da alınır. Buradan da en küçük değerin, $a=b$, yani $a=b=1/2$ olduğunda aldığı düşünülebilir. (Bu durumda ifadenin değeri $25/2$ olur, 8'den daha büyük elbette.)
Aşağıdaki şekilde (a,b) düzlemi üzerinde, $a+b=1$ eşitliğini sağlayan noktalar kümesi olan AB doğru parçasını ve AB'ye dik olarak da sorudaki ifadenin aldığı değerleri göstermeye çalıştık.



Elbette a ya da b sayıları 0'a yaklaştıkça ifade büyür. Şekilde minimum tam ortada, $a=b=1/2$ olarak gözüküyor, ama böyle olmayabilir tabii. Gerçek şekil aşağıdaki gibi de olabilir.



Ama herhalde birincisi daha akla yakın geliyor. Nitekim öyle de.
Birinci Çözüm: (AG)'ye göre, $a+b=1$ olduğunda, ab en fazla $1/4$ değeri aldığından (o da $a=b=1/2$ olduğunda), sorudaki ifadeyi ab cinsinden ifade etmenin iyi bir fikir

olduğu düşünülebilir. Yanlış değil. Öyle yapalım:

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &= \left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+2+\frac{1}{b^2}\right)\\ &= (a^2+b^2)+\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)+4 = (1-2ab)+\left(\frac{1-2ab}{a^2b^2}\right)+4\\ &= 5-2ab+\frac{1-2ab}{(ab)^2}.\end{aligned}$$

En sondaki ifadede a ve b sadece ab olarak beliriyor. Dikkat edilirse, ab ne kadar büyük olursa, en sondaki ifade o kadar küçük oluyor. Dolayısıyla ifade en küçük değerini ab'nin en büyük değerinde alabilir: $ab = 1/4$ iken. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &= 5-2ab+\frac{1-2ab}{a^2b^2} \leq 5-2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1-2\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\ &= 5-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} = 5+8-\frac{1}{2} = 13-\frac{1}{2} = \frac{25}{2}\end{aligned}$$

olur ve $\frac{25}{2}$ değeri $a = b = \frac{1}{2}$ iken alınır. □

İkinci Çözüm: Fikir gene aynı: $x = a + \frac{1}{a}$ ve $y = b + \frac{1}{b}$ olsun. (AG′) eşitsizliğini x ve y için yazalım:

$$x^2+y^2 \geq 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Ama

$$x+y = \left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right) = a+b+\frac{a+b}{ab} = 1+\frac{1}{ab}.$$

Demek ki

$$x^2+y^2 \geq 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{1+\frac{1}{ab}}{2}\right)^2.$$

En sağdaki ifade en küçük değerini ab en büyükken ($1/4$ iken) alır ve eşitlik $a = b = 1/2$ iken sağlanır. Sonuç gene $25/2$ çıkar. □

3.15. *a ve b pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun. Eğer bir de ayrıca $a + b = 1$ kısıtlaması yapılırsa, en küçük değer ne olur?

Yanıt: Hiç kısıtlama yoksa, en küçük değer

$$2 \times 2 = 4$$

olur elbette ve bu değer de $a = b = 1$ iken alınır.

Bundan böyle $a + b = 1$ kısıtlaması yapalım.

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right) &= ab+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = ab+\frac{1}{ab}+\frac{a^2+b^2}{ab}\\ &= ab+\frac{1}{ab}+\frac{1-2ab}{ab} = ab+\frac{2}{ab}-2\end{aligned}$$

eşitliğinden dolayı,

$$ab+\frac{2}{ab}$$

ifadesinin aldığı en küçük değeri bulmalıyız. Ama bu sefer ab sayısı $(0, 1/4]$ aralığında değişiyor çünkü $ab \leq ((a+b)/2)^2 = 1/2^2 = 1/4$ ve bu değere

$$a = b = 1/2$$

iken ulaşılır. (AG)'den dolayı,

$$ab + \frac{2}{ab} \geq 2\sqrt{ab\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{2}$$

ve eşitlik ancak $ab = 2/ab$, yani $ab = \sqrt{2}$ ise doğru olur. Ama bizim ilgilendiğimiz ab değerleri en fazla $1/4$ olabilirler. $x + 2/x$ fonksiyonunun $(0, 1)$ aralığında azaldığını kanıtlamak zor değil; demek ki $x + 2/x$ fonksiyonu $(0, 1/4]$ aralığında minimum değeri $x = 1/4$ için alır ve bu minimum değer $1/4 + 8 = 33/4$ olur.
Sonuç olarak, $a + b = 1$ ve a, $b \geq 0$ kısıtlaması altında,

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) = ab + \frac{2}{ab} - 2 \geq \frac{33}{4} - 2 = \frac{25}{4}$$

olur ve minimum $25/4$ değerine $a = b = 1/2$ iken ulaşılır. □

3.16. *a ve b pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun. Eğer bir de ayrıca $a + b = 1$ kısıtlaması yapılırsa, en küçük değer ne olur?
Yanıt: İfadeyi açalım:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + \frac{1}{ab} + 2 \geq 2 + 2 = 4.$$

Eşitlik ancak $ab = 1/ab$ ise, yani $ab = 1$ ise geçerlidir. Öte yandan eğer $a + b = 1$ kısıtlaması yaparsak, $ab = 1$ olamaz, ab en fazla $1/4$ olabilir ve bu da ancak $a = b = 1/2$ iken olabilir. $x + 1/x$ fonksiyonu 1'den ve 1/4'ten önce azalan olduğundan,

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + \frac{1}{ab} + 2 \geq \frac{1}{4} + 4 + 2 = \frac{25}{4}$$

olur ve minimum $25/4$ değerine $a = b = 1/2$ iken ulaşılır. □

3.17. *Pozitif a, b ve c sayıları için, $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ eşitsizliğini kanıtlayın.*
Kanıt: Bu soru artık son derece basit olmalı, (AG)'yi üç defa uygulamak yeterli. □

3.18. *Pozitif a ve b sayıları için,*

$$\frac{a + bx^4}{x^2}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun.
Yanıt: $y = x^2$ alırsak, $a/y + by$ ifadesinin $y > 0$ iken alabileceği en küçük değeri bulmak yeterli. İfadenin alabileceği en küçük değer (AG)'ye göre $2(ab)^{1/2}$'dir ve bu en küçük değer $y = (a/b)^{1/2}$ için alınır. Demek ki $x = (a/b)^{1/4}$ olmalı. □

3.19. *a, b, $c \geq 0$ için aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın. Eşitliğin ancak $a = b = c$ için gerçekleşeceğini gösterin:*

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a + b + c}{3}. \qquad (\text{AG}_3)$$

Kanıt: a, b, c yerine a^3, b^3, c^3 alarak,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$$

eşitsizliğini kanıtlamanın (gerekli ve) yeterli olduğu görülür. "Çarpanlarına" ayırarak soldaki ifadenin pozitif olduğunu kanıtlayacağız. Soldaki ifadede a yerine X koyarsak,

$$p(X) = X^3 + b^3 + c^3 - 3Xbc$$

polinomunu elde ederiz.

$$p(-b - c) = 0$$

eşitliğinin doğru olduğunu kontrol etmek kolay. Demek ki

$$X + b + c$$

polinomu $p(X)$ polinomunu böler. Bölmeyi yapalım:

$$p(X) = (X + b + c)(X^2 - (b + c)X + b^2 - bc + c^2)$$

buluruz. Şimdi a'da değerlendirirsek,

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = p(a) &= (a + b + c)(a^2 - (b + c)a + b^2 - bc + c^2) \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)}{2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da istediğimizi kanıtlar.

Eşitliğin ancak $a = b = c$ iken doğru olduğuna da dikkatinizi çekeriz. □

3.20. *$x > 0$ olmak üzere $x + 1/x^2$ ifadesinin alabileceği minimum değeri bulun. $x > 0$ olmak üzere $x^2 + 1/x$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun.*

Kanıt: *AG*'yi uygulamak bir işe yaramıyor. AG_3'ü uygulamanın bir yolu var:

$$x + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\frac{x}{2}\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2^{2/3}}$$

ve eşitlik ancak $x = 2^{1/3}$ ise geçerli.

İkinci soru birincisiyle aynı: İlk soruda $y = 1/x$ almak yeterli. □

3.21. *Aynı çevreye sahip üçgenler arasında, en büyük alan hangi üçgen tarafından elde edilir?*

Yanıt: Ünlü Heron formülünü kullanacağız: Bir üçgenin kenarları a, b ve c uzunluğundaysa ve p çevre uzunluğunun yarısıysa, o zaman alan,

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

olur. (AG_3)'e göre,

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{p} &= (p - a)(p - b)(p - c) \leq \left(\frac{(p - a) + (p - b) + (p - c)}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{3p - (a + b + c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{3p - 2p}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27} \end{aligned}$$

olur ve eşitlik ancak

$$p - a = p - b = p - c,$$

yani $a = b = c$ ise geçerlidir. Demek ki en büyük alanı veren üçgen eşkenar üçgen olmalı. □

3.22. *a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, $b_3 \geq 0$ altı sayı olsun.*

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: İki kez (AG_3)'ü uygulayarak aşağıdaki hesabı yapalım:

$$\begin{aligned}(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3) &= a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + (a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3)\\ &\quad +(a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3)\\ &\geq a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + 3\sqrt[3]{a_1^2a_2^2a_3^2b_1b_2b_3} + 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3b_1^2b_2^2b_3^2}\\ &= \left(\sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}\right)^3.\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. Eşitliğe hangi koşullarda erişildiği sorusunu okura bırakıyoruz. □

3.5 Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği II

Bir önceki altbölümdeki (AG) eşitsizliğini iki sayıdan n sayıya genelleştireceğiz. Önce temel tanımları verelim.

$a_1, \ldots, a_n \geq 0$ olsun. Bu sayıların ***aritmetik ortalaması***,

$$A_n(a) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

sayısıdır. ***Geometrik ortalaması*** ise,

$$G_n(a) = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

sayısıdır. Bu iki ortalama arasında çok meşhur bir eşitsizlik vardır: Geometrik ortalama aritmetik ortalamayı aşamaz! $n = 1$ için bariz olan ve $n = 2$ ve 3 için geçen altbölümde kanıtladığımız bu eşitsizliği bu altbölümde her n doğal sayısı için kanıtlayıp çeşitli uygulamalarını vereceğiz.

Teorem 3.26. *Her $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ için,*

$$(\mathrm{AG}_n) \qquad (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

olur. Ayrıca eşitlik sadece ve sadece $a_1 = \ldots = a_n$ ise geçerlidir.

Birinci Kanıt: Önce (AG_{2^n}) eşitsizliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise kanıt bariz, ne de olsa (AG_1), $a_1 = a_1$ diyor. Kanıtı çok kolay olan $n = 1$ durumunu geçen yazımızda ele almıştık. Şimdi $n \geq 1$ olsun. (AG_{2^n}) eşitsizliğini varsayalım ve $(\mathrm{AG}_{2^{n+1}})$ eşitsizliğini kanıtlayalım. 2^{n+1} tane pozitif sayı alalım:

$$a_1, \ldots, a_{2^n},\ b_1, \ldots, b_{2^n}.$$

(AG_{2^n})'den dolayı

$$(a_1 a_2 \cdots a_{2^n})^{1/2^n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n},$$
$$(b_1 b_2 \cdots b_{2^n})^{1/2^n} \le \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bunları taraf tarafa çarparsak,

$$(a_1 \cdots a_{2^n} b_1 \cdots b_{2^n})^{1/2^n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n}\frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}$$

elde ederiz. (AG_1)'i kullanarak sağ tarafı büyütelim:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n}\frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n} &\le \left(\frac{\frac{a_1+\cdots+a_{2^n}}{2^n}}{2} + \frac{\frac{b_1+\cdots+b_{2^n}}{2^n}}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n} + b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^{n+1}}\right)^2.\end{aligned}$$

Son iki eşitsizlikten,

$$(a_1 \cdots a_{2^n} b_1 \cdots b_{2^n})^{1/2^n} \le \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n} + b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^{n+1}}\right)^2$$

buluruz. Her iki tarafın da karekökünü alırsak, istediğimiz eşitsizliğe ulaşırız.

Eşitliğin ne zaman olacağını da (tümevarımla) anlayabiliriz. Eşitsizliğe kanıt boyunca, bir defa (AG_2)'yi, bir defa da (AG_{2^n})'yi kullanarak olmak üzere tam iki kez başvurduk. $(\mathrm{AG}_{2^{n+1}})$'de eşitliğin olması için kanıtta kullanılan her iki eşitsizliğin de eşitlik olması gerekir. (AG_{2^n})'yi kullandığımızda eşitliğin olması için (tümevarım varsayımına göre),

$$a_1 = \ldots = a_{2^n} \text{ ve } b_1 = \ldots = b_{2^n}.$$

eşitliklerinin geçerli olması gerekir. (AG_2)'yi kullandığımızda eşitliğin olması için,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n} = \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}$$

eşitliğinin geçerli olması gerekir. Sonuç: $(\mathrm{AG}_{2^{n+1}})$'de eşitliğin geçerli olması için

$$a_1 = \ldots = a_{2^n} = b_1 = \ldots = b_{2^n}.$$

eşitliklerinin geçerli olması gerektiği anlaşılır.

Böylece (AG_{2^n}) eşitsizliğini her n doğal sayısı için kanıtlamış olduk. Şimdi eğer (AG_{n+1}) doğruysa, (AG_n)'nin de doğru olduğunu kanıtlayacağız. Bu da, yukardaki sonuç sayesinde, (AG_n) formülünün her n için doğru olduğunu kanıtlayacak.

$$a_1, \ldots, a_n$$

sayılarını alalım.

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

olsun.

$$a_1, \ldots, a_n,\ a_{n+1}$$

sayılarına (AG_{n+1}) eşitsizliğini uygulayalım:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1})^{1/n+1} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

Bu eşitsizlikte a_{n+1} yerine değerini koyalım:

$$\left(a_1 a_2 \cdots a_n \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}{n+1}$$

elde ederiz. Her iki tarafı da düzenleyerek,

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n+1}}} (a_1 + \cdots + a_n)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

elde ederiz. Eşitsizliğin sol tarafındaki en sağdaki ifadeyi eşitsizliğin sağ tarafına geçirelim:

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n+1}}} \leq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^{1 - \frac{1}{n+1}}}{n} = \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^{n/n+1}}{n}$$

elde ederiz. Her iki tarafın da $n+1$'inci kuvvetini alırsak,

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n} \leq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^n}{n^{n+1}}$$

buluruz. Gerisi kolay. Solda paydada bulunan n'yi solda paydada bulunan n ile sadeleştirirsek ve her iki tarafın da n'inci kökünü alırsak, dilediğimiz,

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

eşitsizliğini buluruz.

Eşitliğin ne zaman doğru olduğuna bakalım. Kanıt boyunca eşitsizlik sadece bir defa peyda oldu. O eşitsizliğin de eşitlik olması için

$$a_1 = \ldots = a_n = a_{n+1}$$

olmalı. Demek ki $a_1 = \ldots = a_n$ olmalı. □

İkinci Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için önerme bariz. Şimdi (AG_n)'yi varsayıp (AG_{n+1})'i kanıtlayalım.

$$a_1,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}$$

sayılarını seçelim. Bu sayıların en büyüğünü en sona koyduğumuzu varsayalım, yani a_{n+1} diğer bütün sayılardan büyükeşit olsun.

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

tanımını yapalım. A_{n+1} benzer biçimde tanımlansın. O zaman,

$$A_{n+1} = \frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}$$

olur. a_{n+1} sayısı diğer tüm a_i sayılarından büyükeşit olduğundan, elbette

$$a_{n+1} \geq A_n$$

olur. Demek ki bir $b \geq 0$ sayısı için,

$$a_{n+1} = A_n + b$$

olur. Yukardaki eşitlikten devam edecek olursak,

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{nA_n + A_n + b}{n+1} = A_n + \frac{b}{n+1}$$

eşitliğini buluruz. Sol ve sağ tarafların $n+1$'inci kuvvetini alıp (ve en son eşitsizlikte tümevarım varsayımını kullanıp),

$$\begin{aligned} A_n^{n+1} &= \left(A_n + \frac{b}{n+1}\right)^{n+1} = A_n^{n+1} + \binom{n+1}{1} A_n^n \frac{b}{n+1} + \cdots \\ &\geq A_n^{n+1} + \binom{n+1}{1} A_n^n \frac{b}{n+1} = A_n^{n+1} + A_n^n b = A_n^n(A_n + b) \\ &= A_n^n a_{n+1} \geq (a_1 \cdots a_n) a_{n+1} = a_1 \cdots a_n a_{n+1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da kanıtlamak istediğimiz eşitsizlikti.

Eşitliğin doğru olması için $b = 0$ ve (tümevarım varsayımına göre),

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

olmalı. Bu ikisinden

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$$

çıkar. □

Üçüncü Kanıt: a_i yerine b_i^n yazarak, kanıtlamak istediğimiz eşitsizliği,

$$nb_1 \cdots b_n \leq b_1^n + \cdots + b_n^n$$

şekline sokalım. $n = 1$ için eşitlik var. Şimdi eşitsizliği n için varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım. $n+1$ tane pozitif

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}$$

sayısı seçelim.

$$(n+1)b_1 \cdots b_n b_{n+1} \leq b_1^{n+1} + \cdots + b_n^{n+1} + b_{n+1}^{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak istiyoruz. İki tarafı da b_{n+1}^{n+1} sayısına bölüp

$$c_i = \frac{b_i}{b_{n+1}}$$

tanımını yaparsak, kanıtlamak istediğimiz eşitsizlik,

$$(n+1)c_1 \cdots c_n \leq c_1^{n+1} + \cdots + c_n^{n+1} + 1$$

şekline bürünür. Ama tümevarım varsayımını,

$$c_1^{(n+1)/n}, \ \ldots, \ c_n^{(n+1)/n}$$

sayılarına uygularsak,

$$n(c_1 \cdots c_n)^{(n+1)/n} + 1 = nc_1^{(n+1)/n} \cdots c_n^{(n+1)/n} + 1 \leq c_1^{n+1} + \cdots + c_n^{n+1} + 1$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu görürüz. Demek ki,

$$(n+1)c_1 \cdots c_n \leq n(c_1 \cdots c_n)^{(n+1)/n} + 1$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli.

$$x = (c_1 c_2 \cdots c_n)^{1/n}$$

tanımını yaparak,

$$(n+1)x^n \leq nx^{n+1} + 1$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiği anlaşılır. Ama bu da Önsav 3.19'da kanıtlanmıştı. Gene aynı önsava göre, eşitlik ancak

$$c_1 c_2 \cdots c_n = x = 1$$

ve (tümevarım varsayımını kullanarak)

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n$$

ise, yani,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1$$

ise, yani,

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b_{n+1}$$

ise yani,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$$

ise geçerlidir. Teorem bir kez daha kanıtlanmıştır. □

Örnekler

3.23. *Toplamı verilmiş bir t sayısı olan n pozitif gerçel sayının çarpımı en fazla kaç olabilir?*
Yanıt: $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = t$ ise, (AG_n)'den dolayı

$$r_1 \cdots r_n \leq \left(\frac{r_1 + \cdots + r_n}{n}\right)^n = \frac{t^n}{n^n}$$

olur ve eşitlik ancak $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = t/n$ ise geçerlidir. □

3.24. $a_1, \ldots, a_n > 0$ *sayıları verilmişse,*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

sayısı en fazla kaç olabilir?
Yanıt: (AG_n)'den dolayı

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n\left(\frac{a_1}{a_2}\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{a_n}{a_1}\right) = n$$

olur ve eşitlik ancak

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_1}$$

ise geçerlidir. Bu orana r dersek, eşitlik ancak,

$$a_1 = ra_2,\ a_2 = ra_3,\ \ldots,\ a_{n-1} = ra_n,\ a_n = ra_1$$

ise, yani

$$a_1 = ra_2 = r^2 a_3 = \ldots = r^{n-1} a_n = r^n a_1$$

ise, yani $r = 1$ ve

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a_n$$

ise geçerlidir. □

3.25. *a ve b pozitif sayıları için,*

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a + nb}{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlayın. Ne zaman eşitlik olabilir?
Kanıt: Eşitsizlik (AG_{n+1})'den hemen çıkar. Eşitlik ancak $a = b$ ise mümkündür. □

3.26. *$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ve $z_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ olsun. Her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ ve $z_n < z_{n+1}$ eşitsizliklerini kanıtlayın.*

Kanıt: Önceki problemde $a = 1$ ve $b = 1 \pm 1/n$ alırsak,

$$\sqrt[n+1]{\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1 \pm \frac{1}{n+1}$$

buluruz. Her iki tarafın da $n+1$'inci kuvvetini alırsak istediğimiz çıkar. □

3.27. *$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ olsun. Her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için $y_{n+1} < y_n$ eşitsizliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Bir önceki probleme göre $z_{n+1} < z_{n+2}$ olduğundan, aşağıdaki hesaplar istenen sonucu verir:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

3.28. *$a_1, \ldots, a_n$ pozitif sayılarsa*

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

sayısı en az kaç olabilir?

Yanıt: (AG_{n+1})'i her iki parantez için de uygularsak yanıtın n^2 olduğunu hemen görürüz. Eşitlik ancak $a_1 = \ldots = a_n$ ise mümkündür. □

3.29. *Her $n > 1$ doğal sayısı için,*

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: (AG_n)'yi uygulayalım:

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \leq \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

3.30. *Her $n > 1$ doğal sayısı için,*

$$\frac{2^n n!}{n^n} < 3$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: (AG_n)'yi uygulayarak ya da bir önceki soruyu kullanarak

$$\frac{2^n n!}{n^n} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

buluruz. Demek ki,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 3$$

eşitsizliğini göstermek gerekiyor. İşte bu son eşitsizliğin kanıtı:

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = 1+1+\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\\ &= 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{n!}{i!(n-1)!}\frac{1}{n^i} = 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-(i-1))}{n^i}\frac{1}{i!}\\ &= 2+\sum_{i=2}^{n}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{i!}\\ &\le 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!} \le 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}} < 2+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 3.\end{aligned}$$ □

3.31. $x + x^2 + x^3 + 1/x^6$ *ifadesinin* $x > 0$ *için alabileceği en küçük değeri bulun.*
Yanıt: (AG_4)'ü uygulayalım:

$$x + x^2 + x^3 + \frac{1}{x^6} \le 4\left(xx^2x^3\frac{1}{x^6}\right)^{1/4} = 4.$$

Ve eşitlik ancak $x = 1$ ise mümkündür.
Dikkat: Eğer soru "$x+x^2+2/x^3$" ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun" şeklinde olsaydı (AG_3)'ü uygulayarak en küçük değeri bulamazdık, çünkü $x = x^2 = 2/x^3$ denklemlerinin çözümü yoktur. $x + x^2 + 2/x^3$ ifadesinin alabileceği en küçük değerin bu yöntemle bulunabileceğini sanmıyorum. □

3.32. $x^2 + 2/x^3$ *ifadesinin* $x > 0$ *için alabileceği en küçük değeri bulun.*
Yanıt: (AG_5)'i uygulayalım:

$$x^2 + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \ge 5\left(\frac{x^2}{3}\frac{x^2}{3}\frac{x^2}{3}\frac{1}{x^3}\frac{1}{x^3}\right)^{1/5} = \frac{5}{3^{3/5}}$$

buluruz. Eşitlik ancak $x^2/3 = 2/x^3$ ise, yani $x = 6^{1/5}$ ise mümkündür. □

3.33. $x + x^2 + 1/64x^4$ *ifadesinin* $x > 0$ *için alabileceği en küçük değeri bulun. Bu en küçük değere hangi* x *tarafından ulaşlılır?*
Yanıt: (AG_4)'ü uygulamaya çalışalım:

$$x + x^2 + \frac{1}{64x^4} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + x^2 + \frac{1}{64x^4} \ge 4\left(\frac{x}{2}\frac{x}{2}x^2\frac{1}{64x^4}\right)^{1/4} = 4\left(\frac{1}{4\times 64}\right)^{1/4} = 1.$$

Şimdilik 1'in sadece altsınır olduğunu biliyoruz; henüz 1'e ulaşabileceğimizi bilmiyoruz. $x/2 = x^2 = 1/64x^5$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan ($x = 1/2$, şansımız yaver gitti!) 1 gerçekten en küçük değerdir ve bu en küçük değere $x = 1/2$ ile ulaşılır. □

3.34. $x + x^2 + 64/x^5$ *ifadesinin* $x > 0$ *için alabileceği en küçük değeri bulun. Bu en küçük değere hangi* x *tarafından ulaşılır?*
Yanıt: (AG_4)'ü uygulamaya çalışalım:

$$x + x^2 + \frac{64}{x^5} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{64}{x^5} \ge 4\left(x\frac{x^2}{2}\frac{x^2}{2}\frac{64}{x^5}\right)^{1/4} = 4\cdot(16)^{1/4} = 8.$$

Şimdilik 8'in sadece altsınır olduğunu biliyoruz; henüz 8'e ulaşabileceğimizi bilmiyoruz. $x = x^2/2 = 64/x^5$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan ($x = 2$, şansımız gene yaver gitti!) 8 gerçekten en küçük değerdir ve bu en küçük değere $x = 2$ ile ulaşılır.

Eğer hesaplara

$$x + x^2 + \frac{64}{x^5} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{64}{x^5}$$

eşitliğiyle başlamak yerine,

$$x + x^2 + \frac{64}{x^5} = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{64}{x^5}$$

eşitliğiyle başlasaydık, başarıya ulaşamazdık çünkü $x/3 = x^2/2 = 64/x^5$ denklemlerinin bir çözümü yoktur. Yani şansın yaver gitmesi için doğru ayrıştırmayı yapmak lazım, ama her şeyden önce doğru ayrıştırmanın olması lazım. Bir sonraki soruyu çözmek çok daha zor. $\square$

3.35. $3x + 2x^2 + 1/(2x^{14})$ *ifadesinin* $x > 0$ *için alabileceği en küçük değeri bulun. Bu en küçük değere hangi* x *tarafından ulaşılır?*

Yanıt: (AG_4)'ü uygulamaya çalışalım:

$$3x + 2x^2 + \frac{1}{2x^{14}} = 6 \times \frac{x}{2} + 4 \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^{14}} \geq 11 \left(\left(\frac{x}{2}\right)^6 \left(\frac{x^2}{2}\right)^4 \frac{1}{2x^{14}} \right)^{1/11} = \frac{11}{2}.$$

$x/2 = x^2/2 = 1/(2x^{14})$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan ($x = 1$, şans hep bizden yana!) $11/2$ gerçekten en küçük değerdir ve bu en küçük değere ulaşmak için $x = 1$ alınmalı. $\square$

3.36. $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$ *sayıları için*

$$a_1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 \leq \left(\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4}{10} \right)^{10}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: Çok kolay... $\square$

3.37. *Aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın:*

$$1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{4^4} \cdots \frac{1}{n^n} < \left(\frac{2}{n+1} \right)^{n(n+1)/2}.$$

Kanıt: $(\mathrm{AG}_{n(n+1)/2})$'yi kullanmak yeterli:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{4^4} \cdots \frac{1}{n^n} &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdots \left(\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \left(\frac{1 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + n \times \frac{1}{n}}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} \right)^{1+2+3+\cdots+n} \\ &= \left(\frac{n}{n(n+1)/2} \right)^{n(n+1)/2} = \left(\frac{2}{n+1} \right)^{n(n+1)/2}. \end{aligned}$$

$\square$

3.38. *Aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın:*

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdots n^n \leq \left(\frac{2n+1}{3} \right)^{n(n+1)/2}.$$

Kanıt: $(\mathrm{AG}_{n(n+1)/2})$'yi kullanmak yeterli:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdots n^n &\leq \left(\frac{1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + n \cdot n}{n(n+1)/2} \right)^{n(n+1)/2} \\ &= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)/6}{n(n+1)/2} \right)^{n(n+1)/2} = \left(\frac{2n+1}{3} \right)^{n(n+1)/2}. \end{aligned}$$

$\square$

3.39. *$a_1, \ldots, a_n$, toplamı s olan n tane pozitif sayı olsun.*

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{s^n}{n!}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: (AG_n)'yi kullanacağız:

$$\begin{aligned}
(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) &\leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n (1+a_i)}{n}\right)^n = \left(\frac{n+\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{s}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\frac{s^i}{n^i} \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{s^i}{n^i} = \sum_{i=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-(i-1))}{n^i}\frac{s^i}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^n \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{s^i}{i!} < \sum_{i=0}^n \frac{s^i}{i!}.
\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Not: Bunun özel bir durumu olarak, $a_1 = \ldots = a_n = s/n$ alırsak,

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{s^n}{n!}$$

elde ederiz.

3.40. *Her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için,*

$$\sqrt{2}\,\sqrt[4]{4}\,\sqrt[8]{8}\,\cdots\,\sqrt[2^n]{2^n} \leq n+1$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: Sol tarafın 2^n'inci kuvvetini alıp (AG)'yi uygulayalım:

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^n (2^i)^{1/2^i}\right)^{2^n} &= \prod_{i=1}^n (2^i)^{2^{n-i}} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n 2^{n-i}2^i}{2^{n-1}+\cdots+2+1}\right)^{2^{n-1}+\cdots+2+1} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^n 2^n}{2^n-1}\right)^{2^n-1} = \left(\frac{n2^n}{2^n-1}\right)^{2^n-1} \leq (n+1)^{2^n-1} < (n+1)^{2^n}.
\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □