2. $\mathbb{R}$'nin içindeki $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$

Bu bölümde $\mathbb{R}$'nin içindeki doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi, tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'yi ve kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü keşfedip başat özelliklerini kanıtlayacağız. Bu bölümü okurken, tanımlayacağımız bu $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri hakkında sanki hiçbir şey bilmiyormuş gibi davranın ama bir yandan da bu kümelerle çocukluğunuzdan beri aşina olduğunuzu unutmayın!

2.1 Doğal Sayılar

Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin, 0'ı içeren ve içerdiği her x sayısı için $x+1$ sayısını da içeren altkümelerini ele alalım. Bu tür altkümelere ***tümevarımsal altküme*** diyelim. Demek ki bir $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin tümevarımsal olması için iki koşul gerekiyor:

1. $0 \in A$,

2. Eğer $x \in A$ ise $x+1 \in A$.

$\mathbb{R}$'nin kendisi elbette tümevarımsal bir kümedir. Negatif olmayan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^{\geq 0}$ da bir başka tümevarımsal küme örneğidir. Her $r < 0$ için $[r, \infty)$ ve (r, ∞) aralıkları tümevarımsal kümelerdir.

$$\{-1\} \cup \mathbb{R}^{\geq 0}, \;\; \{0\} \cup [1, \infty) \;\text{ ve }\; \{0, 1, 2\} \cup (5/2, \infty)$$

kümeleri de tümevarımsaldır.

Biraz düşününce, varlığını kanıtlayacağız $\mathbb{N}$ kümesinin (eğer varsa tabii!) $\mathbb{R}$'nin en küçük tümevarımsal altkümesi olması gerektiği anlaşılır, ne de olsa ta ilkokuldan beri "bildiğimiz" üzere $\mathbb{N}$ kümesi 0'ı içerir ve 1 ile toplama altında kapalıdır ve bu iki özelliği sağlayan $\mathbb{N}$'den daha küçük bir küme yoktur. Dolayısıyla önce $\mathbb{R}$'nin en küçük tümevarımsal altkümesinin varlığını kanıtlamalıyız ve daha sonra $\mathbb{N}$'yi bu en küçük tümevarımsal küme olarak tanımlamalıyız.

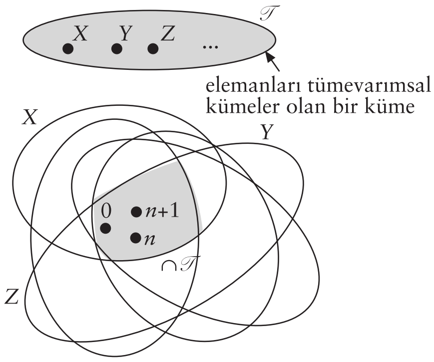
Oldukça basit ama çok parlak olan genel fikri açıkladıktan sonra en küçük tümevarımsal kümenin varlığını kanıtlayalım.

İki tümevarımsal kümenin kesişimi de tümevarımsaldır. Nitekim eğer A ve B iki tümevarımsal kümeyse, her ikisi de 0'ı içerdiğinden, kesişimleri olan $A \cap B$ kümesi de 0'ı içerir. Ayrıca, eğer bir x sayısı $A \cap B$ kesişimindeyse, o zaman x hem A'da hem de B'dedir; her iki küme de tümevarımsal olduğundan $x+1$ de her iki kümededir; demek ki $x+1$ de kesişimdedir.

Sadece iki tümevarımsal kümenin değil, elemanları tümevarımsal kümeler olan bir kümenin elemanlarının kesişimi de tümevarımsaldır. Yani eğer $\mathcal{T}$, tümevarımsal kümeler içeren bir kümeyse, o zaman,

$$\bigcap \mathcal{T} = \bigcap_{A \in \mathcal{T}} A$$

kümesi de tümevarımsaldır. Bunun kanıtı da aynı: Her $A \in \mathcal{T}$ için, $0 \in A$ olduğundan, 0 kesişimdedir. Şimdi kesişimden herhangi bir x sayısı alalım. Her $A \in \mathcal{T}$ için, $x \in A$ ve A tümevarımsal olduğundan, $x+1 \in A$ olur. Demek ki $x+1$ de $\bigcap_{A \in \mathcal{T}} A$ kesişimindedir.



Şimdi $\mathbb{R}$'nin **tüm** tümevarımsal altkümelerini kesiştirelim ve kesişimin adına ***doğal sayılar kümesi*** diyelim ve bu kümeyi $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterelim.

$\mathbb{N}$'nin tümevarımsal bir küme olduğunu gördük. Tüm tümevarımsal altkümelerin kesişimi olduğundan ve tümevarımsal olduğundan, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$'nin en küçük tümevarımsal altkümesidir, yani $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$'nin her tümevarımsal altkümesinin altkümesidir. Bütün bunları özetleyelim:

Teorem 2.1. i. $0 \in \mathbb{N}$.
ii. $n \in \mathbb{N}$ *ise* $n+1 \in \mathbb{N}$.
iii. $\mathbb{N}$*, yukardaki iki özelliği sağlayan* $\mathbb{N}$*'nin en küçük altkümesidir, yani eğer* A*,* $\mathbb{N}$*'nin bir altkümesiyse ve* $0 \in A$ *ise ve her* $n \in A$ *için* $n+1 \in A$ *ise* $A = \mathbb{N}$ *olur.*

Kanıt: İlk ikisi $\mathbb{N}$'nin tümevarımsal olduğundan çıkıyor. Üçüncü önermedeki A kümesi varsayıma göre tümevarımsal bir küme. Ama $\mathbb{N}$ tüm tümevarımsal kümelerin altkümesi. Demek ki $\mathbb{N} \subseteq A$, yani $A = \mathbb{N}$. □

Yukardaki teoremin son maddesinin ***tümevarımla kanıt ilkesi*** olduğuna dikkatinizi çekerim. Bu konuyu [N1, N2]'de ayrıntılarıyla işlediğimizden üstünde fazla durmuyoruz. Gene de ilkeyi yazalım:

Teorem 2.2 (Tümevarım İlkesi I). *Eğer (doğal ya da gerçel) sayılarla ilgili bir önerme* 0 *doğal sayısı için doğruysa ve, her* n *doğal sayısı için,* n *için doğru olduğunda* $n+1$ *için de doğru oluyorsa, o zaman o önerme her* n *doğal sayısı için doğrudur.*

Beklenildiği üzere doğal sayılarda toplama ve çarpma yapabiliriz. Bunu tümevarım ilkesini kullanarak kanıtlayalım.

Teorem 2.3. $\mathbb{N}$*, toplama ve çarpma altında kapalıdır.*

Kanıt: $x+(y+1) = (x+y)+1$ ve $x(y+1) = xy+x$ eşitlikleri kullanılarak istenenler tümevarımla kolaylıkla kanıtlanır. Örnek olarak $\mathbb{N}$'nin toplama altında kapalı olduğunu kanıtlayalım.

$$A = \{y \in \mathbb{N} : \mathbb{N} + y \subseteq \mathbb{N}\}$$

olsun. Elbette $0 \in A$. Şimdi $y \in A$ olsun. $y+1$'in de A'da olduğunu kanıtlayalım. $\mathbb{N}$'den herhangi bir x alalım. O zaman y, A'da olduğundan, $x+y$ elemanı $\mathbb{N}$'dedir. Bundan ve $\mathbb{N}$'nin tanımından $(x+y)+1 \in \mathbb{N}$ çıkar. Ama

$$x + (y+1) = (x+y)+1$$

eşitliği doğru. Demek ki $x+(y+1) \in \mathbb{N}$. Her $x \in \mathbb{N}$ için, $x+(y+1) \in \mathbb{N}$ önermesini kanıtladık, yani $y+1$'in A'da olduğunu kanıtladık. Demek ki $A = \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}$ toplama altında kapalı. □

Yukarda kanıtladıklarımızdan kolaylıkla, $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ yapısının Peano aksiyomlarını sağladığı çıkar (Peano aksiyomları için bkz. [N2]).

Alıştırmalar

2.1. Her $a, b \geq 0$ için, $(a+b)^n \geq a^n + b^n$ eşitsizliğini tümevarımla kanıtlayın. (Binom açılımı daha kolay bir kanıt verir.)

2.2. Eğer $s > -1$ ise, her n doğal sayısı için $(1+s)^n \geq 1 + ns$ eşitsizliğini tümevarımla kanıtlayın.

2.3. Aşağıdaki eşitlikleri tümevarımla kanıtlayın.

$$\begin{array}{lcl} 1+2+\cdots+n & = & n(n+1)/2, \\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 & = & n(n+1)(2n+1)/6, \\ 1^3+2^3+\cdots+n^3 & = & n^2(n+1)^2/4. \end{array}$$

2.4. $n > 6$ doğal sayısı için

$$\frac{1}{n!} > \frac{8^n}{(2n)!}$$

eşitsizliğini tümevarımla kanıtlayın. (İpucu: Doğrudan da deneyebilirsiniz ama şu yöntem de sonuca gider:

$$f(n) = \frac{(2n)!}{n!\, 8^n}$$

olsun. $f(n+1)/f(n) > 1$ eşitsizliğini n üzerinden tümevarımla gösterebilirsiniz.)

2.5. Her $n > 0$ doğal sayısı için

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Aşağıdaki alıştırmalarda sadece ve sadece $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$'nin tanımlarını ve bu tanımlardan yola çıkarak bu satıra kadar kanıtlanan olguları kullanmalısınız.

2.6. 0'ın $\mathbb{N}$'nin en küçük elemanı olduğunu kanıtlayın.

2.7. Eğer $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise $x - 1$'in de doğal sayı olduğunu kanıtlayın.

2.8. Eğer $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < x < 1$ ise, x'in $\mathbb{N}$'de olamayacağını kanıtlayın.

2.9. Eğer $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ ve $n < x < n + 1$ ise, x'in $\mathbb{N}$'de olamayacağını kanıtlayın.

Aşağıdaki alıştırmalarda $x, y \in \mathbb{N}$.

2.10. Eğer $x < y$ ise, $x + 1 \leq y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

2.11. Eğer $x \leq y$ ise, $y - x$'in de $\mathbb{N}$'de olduğunu kanıtlayın.

2.12. Eğer $x < y + 1$ ise, x'in ya y'ye eşit olduğunu ya da y'den küçük olduğunu kanıtlayın.

2.13. Eğer $y \neq 0, 1$ ve $0 < x$ ise $x < xy$ eşitsizliğini kanıtlayın.

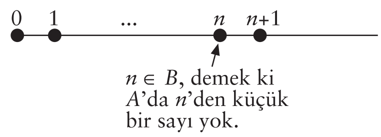
Pierre de Fermat'nın "sonsuzdan iniş" adını verdiğin tümevarım ilkesini kanıtlayalım şimdi.

Teorem 2.4. $\mathbb{N}$*'nin boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır, yani* $\mathbb{N}$ *iyisıralı bir kümedir.*

Kanıt: A, $\mathbb{N}$'nin bir altkümesi olsun. A'nın en küçük elemanı olmadığını varsayıp A'nın boşküme olduğunu kanıtlayalım. Ama önce başka bir şey kanıtlamamız gerekiyor:

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n\text{'den küçük hiçbir sayı } A\text{'da değil}\}$$

olsun. Tümevarımla B'nin $\mathbb{N}$'ye eşit olduğunu kanıtlayalım. 0'dan küçük bir doğal sayı olmadığından (Alıştırma 2.6), 0'dan küçük bir sayı A'da olamaz, dolayısıyla $0 \in B$ olmalı. Şimdi $n \in B$ olsun ve $n + 1$'in de B'de olduğunu kanıtlayalım. Eğer $n + 1$'den küçük bir sayı A'da olsaydı, o zaman bu sayı ancak n olabilirdi (Alıştırma 2.9) ve bu n, A'nın en küçük elemanı olurdu. Ama A'nın en küçük elemanı olmadığını varsaydık. Bu bir çelişkidir.



Demek ki $B = \mathbb{N}$.

Şimdi bir x doğal sayısının A'da olduğunu varsayalım. $n = x + 1$ olsun. O zaman $x < n$ ve $x \in A$. Bundan $n \notin B$ çıkar. Ama bu imkânsız. □

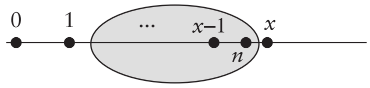
Yukardaki teorem aslında bir kanıt ilkesidir: Eğer doğal sayılarla ilgili bir önerme her n doğal sayısı için doğru değilse, o zaman bu önermenin yanlış olduğu en küçük doğal sayı vardır. Dolayısıyla şu teorem de böylece kanıtlanmış oldu:

Teorem 2.5 (Tümevarım İlkesi II)**.** *Eğer bir önerme, her n doğal sayısı için, n'den küçük doğal sayılar için doğru olduğunda n için de doğru oluyorsa, o zaman bu önerme her n doğal sayısı için doğrudur.*

Kanıt: Önermenin yanlış olduğu en küçük doğal sayı n olsun. Demek ki önerme n'den küçük doğal sayılar için doğru. Ama varsayıma göre, bu durumda önerme n için de doğru olur, çelişki. □

Doğal sayılarla ilgili bildiklerimizi teyit etmeye devam edelim:

Teorem 2.6. *Üstten sınırlı ve boş olmayan bir doğal sayı kümesi en küçük üstsınırını içerir.*



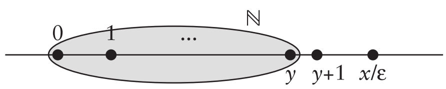
Kanıt: A bir doğal sayı kümesi ve x, A'nın en küçük üstsınırı olsun. $x-1$ bir üstsınır olmadığından,

$$x - 1 < n \leq x$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $n \in A$ doğal sayısı vardır. Demek ki $x < n+1$ ve n'den daha büyük bir doğal sayı A'da olamaz. Bundan da n'nin A'nın en büyük elemanı olduğu çıkar. Yani $n = x$. □

Teorem 2.7 (Arşimet Özelliği)**.** *Eğer $\epsilon > 0$ bir gerçel sayıysa ve $x \in \mathbb{R}$ ise, o zaman $n\epsilon > x$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $n \in \mathbb{N}$ vardır, yani (tanım gereği) $\mathbb{R}$ bir Arşimet cismidir.*

Kanıt: Teoremin doğru olmadığını varsayalım. Demek ki her $n \in \mathbb{N}$ için, $n\epsilon \leq x$ yani $n \leq x/\epsilon$. Demek ki doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, x/ϵ tarafından üstten sınırlı. Teorem 2.6'ya göre $\mathbb{N}$'nin en küçük üstsınırı $\mathbb{N}$'dedir.



Bu en küçük üstsınır y ise, bu da $y+1$ doğal sayısının varlığıyla çelişir. □

Teorem 2.8 (Bölme)**.** *Her $n, m \in \mathbb{N}$ için, eğer $m \neq 0$ ise,*

$$n = mq + r \text{ ve } 0 \leq r < m$$

önermelerini sağlayan bir ve bir tane (q, r) doğal sayı ikilisi vardır.

Kanıt: Önce q ve r'nin varlığını gösterelim. Önermenin yanlış olduğunu varsayalım, yani,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{belli bir } m > 0 \text{ doğal sayısı için, } n = mq + r \text{ eşitliğini ve } 0 \leq r < m \text{ eşitsizliklerini sağlayan } q \text{ ve } r \text{ doğal sayıları yoktur}\}$$

kümesi boş olmasın. n, A'nın en küçük elemanı olsun ve koşullar m sayısı için sağlanmasın. Eğer $n < m$ ise $q = 0$ ve $r = n$ istenen koşulları sağlar. Demek ki $n \geq m$ olmalı. O zaman, Alıştırma 2.11'e göre $n - m$ bir doğal sayıdır ve n'den küçük olduğundan $n - m \notin A$ olmalı. Demek ki, $n - m = mq_1 + r$ eşitsizliğini sağlayan q_1 ve $0 \leq r < m$ doğal sayıları vardır. Ama bundan,

$$n = m(q_1 + 1) + r$$

çıkar ve $q = q_1 + 1$ için

$$n = mq + r$$

elde ederiz. Demek ki önerme n ve m için de doğruymuş. Bu bir çelişkidir.

Şimdi q ve r'nin biricikliğini kanıtlayalım.

$$mq + r = mq_1 + r_1,\ 0 \leq r < m \text{ ve } 0 \leq r_1 < m$$

ilişkilerini sağlayan r, r_1, q, q_1 olsun. $q = q_1$ ve $r = r_1$ eşitliklerini kanıtlayacağız. $q \geq q_1$ eşitsizliğini varsaymanın bedeli yoktur, varsayalım. O zaman,

$$q - q_1 \in \mathbb{N}$$

ve

$$m > r_1 \geq r_1 - r = m(q - q_1)$$

olur. Ama bu ancak $q - q_1 = 0$ ise mümkündür. (Neden?) □

2.2 Tamsayılar ve Kesirli Sayılar

Doğal sayıların bildiğimiz diğer özelliklerini de yukardaki gibi oldukça kolay bir biçimde kanıtlayabiliriz. Daha fazla ileri gitmeden kısaca ***tamsayılar kümesi*** $\mathbb{Z}$'ye geçelim. $\mathbb{Z}$'yi,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}.$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 2.9. *$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$'nin, 1'i içeren ve çıkarma altında kapalı en küçük altkümesidir. Ayrıca $\mathbb{Z}$ toplama, çarpma ve çıkarma altında kapalıdır, yani $\mathbb{Z}$ bir halkadır.*

Kanıt: $\mathbb{Z}$'nin 1'i içerdiği ve çıkarma altında kapalı olduğu bariz.

A, $\mathbb{R}$'nin 1'i içeren ve çıkarma altında kapalı herhangi bir altkümesi olsun. $0 = 1 - 1$ olduğundan $0 \in A$. Demek ki, her $a \in A$ için,

$$-a = 0 - a \in A.$$

Dolayısıyla $-A \subseteq A$ ve her a, $b \in A$ için,

$$a + b = a - (-b) \in A - (-A) \subseteq A - A \subseteq A.$$

Demek ki A toplama altında kapalı. 1'i de içerdiğinden, bundan A'nın tümevarımsal bir küme olduğu sonucu çıkar. Sonuç: $\mathbb{N} \subseteq A$ ve $-\mathbb{N} \subseteq -A \subseteq A$ ve $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \subseteq A$. Böylece birinci önerme kanıtlanmış oldu.

Şimdi $A = \mathbb{Z}$ alırsak $\mathbb{Z}$'nin toplama altında kapalı olduğunu görürüz. $\mathbb{Z}$'nin çarpma altında da kapalı olduğu bundan ve $n(m+1) = nm + m$ eşitliğinden m üzerine tümevarımla çıkar. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Teorem 2.10 (Bölme)**.** *Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için, eğer $m \neq 0$ ise,*

$$n = mq + r \text{ ve } 0 \leq r < |m|$$

önermelerini sağlayan bir ve bir tane (q, r) tamsayı ikilisi vardır.

Kanıt: Teorem 2.8 temel alınarak kolaylıkla kanıtlanabilir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

$\mathbb{Z}$'nin çok bilinen diğer özelliklerini burada kanıtlamayacağız. Gerektiği zaman tanımlara başvurularak kolaylıkla kanıtlanabilir.

Son olarak kesirli sayıları tanımlayalım:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z} \text{ ve } m \neq 0\right\}$$

olsun. $\mathbb{Q}$'nün elemanlarına ***kesirli sayı*** ya da rasyonel sayı, $\mathbb{Q}$ kümesine de ***kesirli sayılar kümesi*** denir.

Teorem 2.11. *$\mathbb{Q}$, toplama, çarpma ve sıfırdan değişik bir elemana bölme altında kapalıdır, yani bir cisimdir. Ayrıca $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Z}$'yi içeren en küçük altcismidir.*

Kanıt: Çok basit. □

Teorem 2.12 (Tamkısım)**.** *Her $x \in \mathbb{R}$ için, $n \leq x < n+1$ eşitsizliklerini sağlayan bir ve bir tane n tamsayısı vardır.*

Kanıt: Önce $x \geq 0$ varsayımını yapalım. $A = \{a \in \mathbb{N} : a \leq x\}$ olsun. O zaman $0 \in A$ ve A, x tarafından üstten sınırlı. Teorem 2.6'ya göre A, en küçük üstsınırını içerir. Bu doğal sayıya n dersek,

$$n \leq x < n+1$$

olur. Biricikliği kanıtlayalım: Bir de ayrıca

$$m \leq x < m+1$$

olsun. Eğer $n < m$ ise, Alıştırma 2.10'a göre,

$$x < n+1 \leq m \leq x,$$

çelişki. Benzer biçimde $m < n$ de olamaz. Demek ki $n = m$.

x'in negatif olduğu durumun kanıtını okura bırakıyoruz. □

Teorem 2.12'de biricikliği kanıtlanan n tamsayısına x'in ***tamkısmı*** denir ve bu sayı $[x]$ olarak yazılır. $[x]$, x'ten küçükeşit en büyük tamsayıdır. Demek ki her $x \in \mathbb{R}$ için $x - [x] \in [0, 1)$ olur ve $[x]$ bu içindeliği sağlayan biricik tamsayıdır.

Teorem 2.13. *Herhangi iki değişik gerçel sayı arasında kesirli bir sayı vardır, yani (yoğunluğun tanımı gereği) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de **yoğundur**.*

Kanıt: $\alpha < \beta$ iki gerçel sayı olsun. Eğer $\alpha < 0 < \beta$ ise 0 sayısı α'yla β arasındadır. Eğer $\alpha < \beta \leq 0$ ise $0 \leq -\beta < -\alpha$ olur ve $-\beta$ ile $-\alpha$ arasında bir q kesirli sayısı bulmuşsak, $-q$ kesirli sayısı α'yla β arasında olur. Dolayısıyla teoremi $0 \leq \alpha < \beta$ varsayımı altında kanıtlamak yeterli.

$\alpha < q \leq \beta$ eşitsizliğini sağlayan bir q kesirli sayısı bulmak istiyoruz. Arşimet Özelliği'nden (Teorem 2.7) dolayı, $1 < n(\beta - \alpha)$ eşitsizliğini sağlayan bir n vardır. Demek ki,

$$\frac{1}{n} < \beta - \alpha.$$

Şimdi, $m = [\alpha]$ olsun. (Teorem 2.12 ve sonraki tanım.) Demek ki

$$m \leq \alpha < m + 1$$

ve

$$\frac{m}{n} \leq \alpha < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq \alpha + \frac{1}{n} \leq \alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

Dolayısıyla

$$\alpha < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq \beta$$

olur ve

$$q = \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

sayısı aranan kesirli sayıdır, daha doğrusu sayılardan biridir. Eğer $\alpha < q < \beta$ eşitsizliklerini sağlayan bir $q \in \mathbb{Q}$ bulunmak isteniyorsa, yukarda yapılanları β yerine β'dan küçük olan $(\alpha + \beta)/2$ sayısı için yapmak yeterlidir. □

Alıştırmalar

2.14. "$|x + 3| < \delta \Rightarrow |4x - 12| < 0,04$" önermesini doğrulayan en büyük δ'yı bulun.

2.15. Merkezi 7 olan ve $|\sqrt{x - 3} - 2| < 1$ eşitsizliğini sağlayan en büyük aralığı bulun.

2.16. $\alpha < \beta$ iki gerçel sayı olsun. $\alpha < q < \beta$ mutlak eşitsizliklerini sağlayan kesirli bir q sayısının olduğunu kanıtlayın.

2.17. $n \in \mathbb{Z}$, $m \in 2\mathbb{N} + 1$ olsun. $n = mq + r$ eşitliğini ve

$$-\frac{n-1}{2} \leq r < \frac{n-1}{2}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir ve bir tane (q, r) tamsayı ikilisi olduğunu kanıtlayın.