# 1. Gerçel Sayılar ve Özellikleri

## 1.1 Gerçel Sayıların Aksiyomları

[N2]'de, kümeler kuramının en basit aksiyomlarından yola çıkarak, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi matematiksel olarak yaratmıştık. Ayrıca, adına 0 (sıfır) ve 1 (bir) dediğimiz iki gerçel sayıya özel önem vermiş ve $\mathbb{R}$ kümesi üzerine, $+$ (toplama) ve $\times$ (çarpma) diye adlandırdığımız iki işlemle birlikte bir de $<$ olarak simgelediğimiz bir tamsıralama tanımlamıştık. Yine aynı kitapta,

$$(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$$

yapısının birtakım özelliklerini kanıtlamıştık. [N2]'de kanıtlanmış özelliklerin 16'sını birazdan sıralayacağız. Bu kitapta, gerçel sayılar yapısının [N2]'de nasıl inşa edildiğini unutarak, sadece bu 16 özellikten hareketle, yani gerçel sayıların sadece ve sadece bu özelliklerini doğru varsayarak, matematiksel analizi geliştireceğiz; çünkü bu kitapta analiz yapılacak ve analizde gerçel sayıların nasıl yaratıldıklarından ziyade ne oldukları önemlidir.

[N2]'de kanıtlanmış bu 16 önermeyi bu kitapta aksiyom olarak kabul etmenin psikolojik, pedagojik ya da matematiksel düzeyde hiçbir sakıncası yoktur. Gerçekten de bu 16 önerme, çocukluğumuzdan beri sezgilerimizle hissettiğimiz gerçel sayıların özünü oluşturur. Doğru varsayılan bu 16 önermeden hareketle, gerçel sayıların sezgilerimize göre doğru olması gereken tüm özellikleri kanıtlanabilir.

Yani bu kitapta, [N2]'de gerçek anlamda ve somut olarak inşa ettiğimiz $\mathbb{R}$ kümesinin, 0 ve 1 elemanlarının ve toplama ve çarpma işlemlerinin ve $<$ sıralamasının nasıl tanımlandıklarını unutup, gerçel sayıları, aşağıdaki 16 özelliği sağlayan matematiksel bir yapı olarak kabul edebilirsiniz.

Aşağıdaki önermelerde $ab$ ifadesi $a \times b$ anlamına gelmektedir.

**$\mathbb{R}$'nin Aksiyomları**

**T1.** Her $a$, $b$, $c$ için, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

**T2.** Her $a$ için, $a + 0 = 0 + a = a$.

**T3.** Her $a$ için, $a + b = b + a = 0$ eşitliklerini sağlayan bir $b$ vardır.

**T4.** Her $a$, $b$ için, $a + b = b + a$.

**Ç1.** Her $a$, $b$ ve $c$ için, $(ab)c = a(bc)$.
**Ç2.** Her $a$ için, $a \times 1 = 1 \times a = a$.
**Ç3.** Her $a \neq 0$ için, $ab = ba = 1$ eşitliklerini sağlayan bir $b$ vardır.
**Ç4.** Her $a$ ve $b$ için, $ab = ba$.
**SB.** $0 \neq 1$.
**D.** Her $a$, $b$ ve $c$ için, $a(b + c) = ab + ac$.
**O1.** Hiçbir $a$ için $a < a$ olamaz.
**O2.** Her $a$, $b$ ve $c$ için, $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$.
**O3.** Her $a$ ve $b$ için, ya $a < b$ ya $a = b$ ya da $b < a$.
**TO.** Her $a$, $b$ ve $c$ için, $a < b$ ise $a + c < b + c$.
**ÇO.** Her $a$, $b$ ve $c$ için, $a < b$ ve $0 < c$ ise $ac < bc$.
**SUP.** Boş olmayan üstten sınırlı her altkümenin bir en küçük üstsınırı vardır.

Bundan böyle bu önermelere ***aksiyom*** adını vereceğiz. Bunlar matematiğin değil, analizin aksiyomları olarak kabul edilmelidirler. Daha doğru bir ifadeyle, tek bir aksiyomumuz var, o da şu: Bu 16 önermenin doğru olduğu bir

$$(\mathbb{R},\ +,\ \times,\ <,\ 0,\ 1)$$

yapısı vardır.

Yukardaki önermelerin bir anlam kazanması için şunları da eklemek lazım:

**1.** $\mathbb{R}$ bir kümedir.

**2.** 0 ve 1, $\mathbb{R}$'nin birer elemanıdır. 0'a "sıfır", 1'e "bir" denir.

**3.** $+$ ve $\times$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımından $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyondur. Ama aksiyomları yazarken, "$+(a, b)$" yerine çok daha alışık olduğumuz "$a+b$" yazılımını kullandık. "$a + b$" yazılımını "$a$ artı $b$" diye okuyacağız. Benzer şekilde $\times(a, b)$ yerine $ab$ yazdık; bunu da "$a$ çarpı $b$" diye okuyacağız. Gerekli gördüğümüzde "$a \times b$" ya da "$a \cdot b$" yazılımlarına da başvuracağız.

**4.** $<$, $R$'nin ikili bir ilişkisidir, yani $<$ aslında $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımının bir altkümesidir. "$(a,\ b) \in <$" yerine, daha alışık olduğumuz "$a < b$" yazılımını tercih ettik. "$a < b$" ifadesi "$a$, $b$'den küçüktür" diye okunur.

Dikkat ederseniz, toplama ve çarpma üzerine yukarıdaki aksiyomlar dışında hiçbir şey bilmiyormuşuz gibi davranıyoruz. Örneğin 2 diye bir eleman henüz tanımlamadık. Bu elemanı daha sonra $1 + 1$ olarak tanımlayacağız. Soyut matematik işte böyle bir şeydir.

Aksiyomların sonuncusu hariç her biri $\mathbb{R}$'nin elemanlarından bahsetmektedir, yani ilk 15 aksiyomda söz edilen $a$, $b$ ve $c$ şeyleri $\mathbb{R}$'nin birer elemanıdır. Sonuncu aksiyomda (SUP) ise $\mathbb{R}$ kümesinin (üstten sınırlı olan ama boşküme olmayan) altkümelerinden sözedilmektedir.

SUP aksiyomu dışındaki tüm aksiyomların kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ için de geçerli olduklarına dikkatinizi çekeriz. Kesirli sayılarla gerçel sayıların arasındaki ayrımın, elemanlardan değil de altkümelerden sözeden SUP aksiyomunda saklı olduğunu görmek gerekir.

**Bazı Notlar.** Yukarda sıralanan aksiyomları sağlayan iki

$$(R, +, \times, <, 0_R, 1_R) \text{ ve } (S, +, \times, <, 0_S, 1_S)$$

yapısı birbirine öylesine benzer ki, elemanlarının adları değişik olmasa aralarındaki farkı anlamanın olanağı yoktur. Matematiksel deyişle, $R$ ile $S$ arasında, toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya duyarlı, yani her $x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(xy) &= f(x)f(y), \\ x < y &\Leftrightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

önermelerini sağlayan bir

$$f : R \to S$$

eşlemesi vardır [N2]. Günlük ifadeyle bu şu demektir: Toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya dokunmadan $R$'nin $x$ elemanını atıp yerine $f(x)$ koyarsak aynen $S$ yapısını elde ederiz, yani $R$ ile $S$ yapıları arasında, kümelerin elemanlarının adları dışında - ki bunun da matematiksel ve düşünsel açıdan en küçük bir önemi yoktur - en küçük bir ayrım yoktur. Bu durumda,

$$(R, +, \times, <, 0_R, 1_R) \simeq (S, +, \times, <, 0_R, 1_R)$$

yazarız.

Bunu, gerçekten (yani özünde, yani esaslı bir biçimde) birbirinden değişik iki gerçel sayı sistemi yoktur diye ifade edebiliriz. Bu biricikliği SUP aksiyomuna borçluyuz. SUP aksiyomunu sağlamayan

$$(\mathbb{Q}, +, \times, <, 0, 1) \text{ ya da } (\mathbb{Z}, +, \times, <, 0, 1)$$

yapıları için böyle bir biriciklik doğru olmadığı gibi, doğru olması sözkonusu bile olamaz!

Öte yandan sonuncu SUP aksiyomunun diğer aksiyomlar kadar "doğal" olmadığına dikkatinizi çekerim. Bir sonraki gözlem biraz da bu dediğimizle ilgili.

Matematiksel anlamda [N2]'de inşa ettiğimiz ya da yukarda varlığını kabul ettiğimiz gerçel sayılar yapısının gerçek dünyayla (her ne demekse!) ya da liselerde öğretilen sayı doğrusuyla ilgisi pek açık değil. Gerçel sayıları bu kitapta fiziksel anlamda mesafe olarak tanımlamadık, tanımlayamazdık da, çünkü matematik yapıyoruz ve matematik sadece ve sadece zihinsel bir uğraştır. Gerçel sayılar yapısı, matematiksel anlamda yukarıda sıraladığımız özellikleri sağlayan bir yapıdır. Tekrar etmekte yarar var: Böyle bir yapının varlığı [N2]'de kanıtlanmıştı. Bu kitapta matematiksel mantık dışında sadece bu özellikleri veri olarak kabul edeceğiz ve analizi geliştireceğiz. Analize meraklı okur [N2]'ye başvurmadan bu noktadan devam etmelidir.

Bu satırdan itibaren, bütün kitap boyunca ***gerçel sayılar sistemi*** ya da ***yapısı***, bir önceki bölümdeki 16 önermeyi sağlayan bir $(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$ altılısıdır. Bu önermelere $\mathbb{R}$'nin aksiyomları diyeceğiz. Tabii bunlar aslında aksiyom değildirler, [N2]'de kanıtlanmışlardır, ama bu kitapta bu önermelere aksiyom muamelesi yapacağız.

$\mathbb{R}$'nin elemanlarına ***gerçel sayı*** diyeceğiz.

Bu arada, [N2]'de yaptıklarımızı yok saydığımızdan $\mathbb{R}$'nin içinde kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'nün ya da en azından bir kopyasının bulunduğunu henüz bilmediğimizi de dikkatinizi çekerim. Gelecek bölümde $\mathbb{R}$'nin içindeki $\mathbb{Q}$'yü bulacağız.

Bu bölümde gerçel sayı sisteminin en basit özelliklerini kanıtlayacağız. Kanıtlarda SUP aksiyomunu sadece en sonda kullanacağız. SUP dışındaki aksiyomların sağlandığı yapılara ***sıralı cisim*** denir. Demek ki hemen aşağıda kanıtlayacağımız önermeler sadece $\mathbb{R}$'de değil, tüm sıralı cisimlerde doğrudur.

## 1.2 Toplamanın Özellikleri

**A. T1 ve T4'ün anlamı.** T1, sayıları toplarken paranteze gerek olmadığını söylüyor. Örneğin,

$$(a+b)+c \text{ ve } a+(b+c)$$

yerine $a+b+c$ yazabiliriz. Aynı biçimde,

$$(a+b)+(c+d) \text{ ve } (a+(b+c))+d$$

yerine $a+b+c+d$ yazabiliriz. T4 de toplama yaparken sıralamanın önemli olmadığını söylüyor. Örneğin, $a+b+c+d$ yerine $b+d+c+a$ yazabiliriz. T1'e ***birleşme özelliği***, T4'e de ***değişme özelliği*** adı verilir.

**B. 0'ın biricikliği.** T2 özelliğini sağlayan 0 elemanının biricik olduğunu kanıtlayalım: $0'$ elemanı da aynen 0 gibi T2 özelliğini sağlasın, hatta bu özelliğin sadece yarısını sağlasın, diyelim her $a \in \mathbb{R}$ için, $a + 0' = a$ olsun. Özel bir durum olarak, $a = 0$ için $0 + 0' = 0$ elde ederiz; o zaman,

$$0' \stackrel{\text{T2}}{=} 0 + 0' = 0$$

olur.

**C. Toplamsal Ters.** Şimdi, verilmiş bir $a \in \mathbb{R}$ için T3 özelliğini, hatta T3'ün sadece yarısını sağlayan $b$'nin biricikliğini kanıtlayabiliriz:

$$a+b = b+a = 0 \text{ ve } a+c = 0$$

olsun; o zaman,

$$b \stackrel{\text{T2}}{=} b+0 = b+(a+c) \stackrel{\text{T1}}{=} (b+a)+c = 0+c \stackrel{\text{T2}}{=} c.$$

Demek ki $b = c$. Yani verilmiş bir $a$ için T3'ü sağlayan $b$ biricik. Benzer şekilde $c + a = 0$ ise de $c = b$ eşitliği kanıtlanabilir. Tabii $a$ değiştikçe T3 eşitliğini sağlayan $b$ de değişir, ama verilmiş bir $a$ için T3 özelliğini sağlayan $b$ biriciktir, bir ikincisi daha yoktur. O zaman $b$'ye özel bir ad verebiliriz: $b$'ye $a$'nın ***toplamsal tersi*** denir ve $b$ yerine $-a$ yazılır ve bu eleman "eksi a" diye okunur. Elbette,

$$(1) \qquad (-a) + a = a + (-a) = 0$$

eşitliği sağlanır ve $-a$ bu eşitliklerin birini sağlayan yegâne elemandır, yani,

$$b = -a \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b + a = 0.$$

Ayrıca, $0 + 0 = 0$ olduğundan, $-0 = 0$ olur.

**D. Çıkarma.** $a + (-b)$ yerine $a - b$ yazılır ve bu işleme ***çıkarma*** denir.

$$-a - b$$

ifadesi $(-a) - b$ anlamına gelir:

$$-a - b = (-a) - b = (-a) + (-b).$$

$-a + b$ ifadesi de $(-a) + b$ anlamına gelir. Tahmin edilen

$$-(a + b) = -a - b \text{ ve } -(a - b) = b - a$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak zor değildir. Birincisini kanıtlayalım misal olarak:

$$\begin{aligned}(a + b) + (-a - b) &= a + b + (-a) + (-b) \\ &= (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

ve bundan ve (C)'den istenen eşitlik çıkar. Demek ki $-a - b$, $a + b$ sayısının toplamsal tersidir.

**E. Sadeleştirme.** $\mathbb{R}$'de toplamaya göre sadeleştirme de yapılabilir, yani

$$a + c = b + c$$

ise, $a = b$ olur. Nitekim,

$$\begin{aligned}a &= a + 0 = a + (c + (-c)) = (a + c) + (-c) \\ &= (b + c) + (-c) = b + (c + (-c)) = b + 0 = b.\end{aligned}$$

Tabii, T4 sayesinde, sadece sağdan değil, soldan da sadeleştirme yapılabilir.

Eğer $a + b = a$ ise $a + b = a = a + 0$ olur ve buradan sadeleştirerek $b = 0$ buluruz.

**F. Tersin Tersi.** (1) eşitliğinde $a$ yerine $-a$ alırsak,

$$(-(-a)) + (-a) = 0$$

buluruz. Demek ki

$$(-(-a)) + (-a) = 0 = a + (-a)$$

ve sağdaki $-a$'ları sadeleştirerek

$$a = -(-a)$$

elde ederiz. Özetle, $a$'nın tersinin tersi $a$'dır. Bunu şöyle de görebiliriz; T3'te $a$ ve $b$'nin simetrik rolleri olduğundan $b$, $a$'nın tersiyse $a$ da $b$'nin tersi olur, yani $a$'nın tersinin tersi $a$'dır, yani

$$-(-a) = a$$

olur.

**G.** $a + b = c$ eşitliğinden kolaylıkla $a = c - b$ ve $b = c - a$ eşitlikleri çıkar.

Bundan böyle toplamayla ilgili tüm bu bilgileri ve kimbilir belki de kanıtlamayı unuttuğumuz başka eşitlikleri de özgürce kullanacağız.

## 1.3 Çarpmanın Özellikleri

**H. Ç1 ve Ç4'ün anlamı.** Ç1, çarpma işlemi için paranteze gerek olmadığını söylüyor. Ç4 de elemanları çarparken sıralamanın önemli olmadığını söylüyor. Örneğin, $((ab)c)d$ yerine $bdca$ yazabiliriz.

Ç1'e (çarpma için) ***birleşme özelliği***, Ç4'e (çarpma için) ***değişme özelliği*** denir.

**I. 1'in Biricikliği**. Aynen toplamadaki gibi, Ç2 özelliğini sağlayan 1 elemanının biricik olduğunu kanıtlayalım: $1'$ elemanı da Ç2 özelliğini sağlasın, yani her $a \in \mathbb{R}$ için, $a1' = a$ olsun. Bunun özel bir durumu olarak, $a = 1$ için $1 \times 1' = 1$ elde ederiz. Demek ki,

$$1' \overset{\text{Ç2}}{=} 1 \times 1' = 1$$

olur.

**J. 0'la Çarpma.** Her $a$ için $a0 = 0$ olur, çünkü,

$$a0 + 0 = a0 = a(0 + 0) \overset{\text{D}}{=} a0 + a0$$

ve sadeleştirerek ((E)'nin son paragrafı) $a0 = 0$ buluruz.

Bundan ve SB'den, Ç3 özelliğinde neden $a$ elemanının 0'dan değişik olması gerektiği anlaşılır. Çünkü bir $b \in \mathbb{R}$ elemanı için $0b = 1$ olsaydı, $0 = 0b = 1$ olurdu; dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x = 1x = 0x = 0$$

olurdu, yani $\mathbb{R} = \{0\}$ olurdu; pek arzuladığımız bir sonuç olduğu söylenemez!

**K. Çarpımsal Tersin Biricikliği.** Verilmiş bir $0 \neq a \in \mathbb{R}$ için Ç3 özelliğini sağlayan $b$ elemanının da biricikliğini kanıtlayabiliriz:

$$ab = ba = ac = 1$$

olsun; şimdi,

$$b \overset{\text{Ç2}}{=} b \times 1 = b(ac) \overset{\text{Ç1}}{=} (ba)c = 1 \times c \overset{\text{Ç4}}{=} c.$$

Demek ki $b = c$, ve $b$ gerçekten biricikmiş. $b$'ye $a$'nın ***çarpımsal tersi*** denir. $a$'nın çarpımsal tersi $a^{-1}$, $1/a$ ya da $\frac{1}{a}$ olarak gösterilir. Elbette,

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1 \tag{2}$$

eşitliği sağlanır ve $a^{-1}$ bu eşitliklerin birini sağlayan yegâne elemandır.

(J)'den dolayı $a^{-1}$, 0 olamaz, çünkü aksi halde, $1 = aa^{-1} = a0 = 0$ olur ve bu da SB ile çelişir.

Son olarak $1 \times 1 = 1$ olduğundan, $1^{-1} = 1$ olur.

**L. Bölme.** $xy^{-1}$ yerine kimileyin $x/y$ ya da $\frac{x}{y}$ yazılır. Bu yazılım anlaşmasından dolayı

$$x^{-1} = 1/x = \frac{1}{x}$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$\frac{x}{yz} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{z} = x \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{y}$$

gibi tahmin edilen çeşitli eşitlikleri kanıtlamak zor değildir.

**M. Sadeleştirme.** Eğer $ac = bc$ ve $c \neq 0$ ise, $a = b$ olur. Nitekim,

$$a = a1 = a(cc^{-1}) = (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} = b(cc^{-1}) = b1 = b.$$

**N. Tersin Tersi.** $a \neq 0$ olsun. (K)'nın ikinci paragrafına göre $a^{-1} \neq 0$. Demek ki $a^{-1}$ elemanının tersini de alabiliriz. (2) denkleminde $a$ yerine $a^{-1}$ alırsak, $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = 1$ buluruz. Demek ki $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = 1 = a^{-1}a$. Sadeleştirerek,

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

buluruz. $a^{-1}$ yerine $1/a$ yazılımı tercih edilirse, bu eşitlik,

$$\frac{1}{1/a} = a$$

şeklini alır.

**O.** Eğer $ab = c$ ve $b \neq 0$ ise, $a = cb^{-1}$ olur. Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

**P.** Her $a$ için, $-a = (-1)a$, çünkü,

$$0 = 0a = (1 + (-1))a = 1a + (-1)a = a + (-1)a$$

ve (C)'ye göre (toplamsal tersin biricikliği),

$$-a = (-1)a \tag{3}$$

olur. Özel bir durum olarak

$$(-1)(-1) = -(-1) = 1$$

bulunur. Ayrıca (3)'ten

$$-(xy) = x(-y) = (-x)y \tag{4}$$

eşitliklerinin kanıtı kolaydır, mesela $-(xy) = (-1)(xy) = ((-1)x)y = (-x)y$. (4) eşitliklerinden dolayı $-(xy)$ yerine, daha kısa olarak $-xy$ yazılır.

**Q.** Her $a$ için, $(-a)^2 = a^2$ olur. (Burada $x^2 = xx$ anlamına geliyor.) Bu da (P)'den çıkar:

$$\begin{aligned}(-a)^2 &= (-a)(-a) = (-1)a(-1)a = ((-1)(-1))aa\\ &= (-(-1))aa = 1aa = aa = a^2.\end{aligned}$$

**R.** Eğer $ab = 0$ ise ya $a = 0$ ya da $b = 0$ olur; nitekim eğer $b \neq 0$ ise

$$a = a1 = a(bb^{-1}) = (ab)b^{-1} = 0b^{-1} = 0$$

olur.

## 1.4 Sıralamanın Özellikleri

Yukardaki kanıtlarda hiç sıralamayı kullanmadık. Şimdi sıralamayla ilgili özellikleri kanıtlayalım. Bilinmesi gerektiği gibi, $x \leq y$ önermesi

$$x < y \text{ ya da } x = y$$

anlamına gelir. $x > y$ ve $x \geq y$ yazılımlarının anlamlarını okur tahmin ediyordur.

Eğer $x$ ve $y$ iki gerçel sayıysa, $\max\{x, y\}$ sayısı $x$ ve $y$ sayılarının en büyüğü, yani ***maksimumu*** anlamına gelir:

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{eğer } x \geq y \text{ ise} \\ y & \text{eğer } y \geq x \text{ ise} \end{cases}$$

O3'ten dolayı max iyi tanımlanmıştır. max elbette *maximum*'un kısaltılmışıdır.

$\min\{x, y\}$ ise

$$\min\{x, y\} = \begin{cases} y & \text{eğer } x \geq y \text{ ise} \\ x & \text{eğer } y \geq x \text{ ise} \end{cases}$$

anlamına gelir.

**Alıştırmalar**

1.1. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ eşitliğini kanıtlayın.

1.2. Her $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$ için $\max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, \max\{y, z\}\}$ eşitliğini kanıtlayın. Benzer eşitliği max yerine min için kanıtlayın.

Eğer $0 \leq x$ ise $x$'e ***pozitif*** diyeceğiz. (Genelde bu tanım $0 < x$ koşulunu sağlayan $x$ elemanları için kullanılır, ama biz öyle yapmayacağız.) Eğer $0 < x$ ise $x$'e ***mutlak pozitif*** diyeceğiz. ***Negatif*** ve ***mutlak negatif***'in anlamlarını okur tahmin ediyordur.

**S.** Eğer $a < b$ ise $-b < -a$ olur. Bunu kanıtlamak için $a < b$ eşitsizliğinin her iki tarafına $-a-b$ eklemek yeterli. Dolayısıyla $0 < a$ eşitsizliği, ancak ve ancak $-a < 0$ ise doğrudur; yani $a$ pozitiftir ancak ve ancak $-a$ negatifse. Demek ki negatif sayılar, pozitif sayıların toplamsal tersleridir.

**T. Pozitif Elemanlar.** Pozitif gerçel sayılar kümesi toplama ve çarpma altında kapalıdır. Çarpma altında kapalı olduklarını kanıtlamak çok kolay, bu hemen ÇO'dan çıkıyor: $0 < a$ ve $0 < b$ ise, $0 = 0 \cdot 0 < ab$ olur; ve eğer $a$ ya da $b = 0$ ise $ab = 0 \geq 0$. Toplamaya geçelim. $0 < a$ ve $0 < b$ olsun. O zaman, TO'ya göre,

$$0 = 0 + 0 < a + 0 < a + b.$$

$a$ ya da $b$'nin 0'a eşit olduğu durumlar da bariz.

**U.** İki negatif sayının çarpımı pozitiftir ve negatif bir sayıyla pozitif bir sayının çarpımı negatiftir. İkinci önermeyi kanıtlayalım. Eğer

$$0 < x \text{ ve } y < 0$$

ise, o zaman (S)'ye göre $0 < -y$ olur, dolayısıyla (P)'ye göre,

$$0 < x(-y) = -xy \text{ ve } xy < 0.$$

Bundan karelerin (ve karelerin toplamlarının) negatif olamayacakları çıkar. Nitekim, eğer $0 \leq a$ ise (T)'ye göre $0 \leq a^2$ ve eğer $a \leq 0$ ise, o zaman (S)'ye göre $0 \leq -a$ ve yukarda kanıtladığımıza göre, (Q)'den dolayı, $0 \leq (-a)^2 = a^2$ bulunur.

$a$ yerine 1 koyarsak, $0 \leq 1^2 = 1$ olur. Dolayısıyla $-1 < 0$.

**V.** Pozitif elemanlar kümesi çıkarma altında kapalı değildir elbet ama bölme altında kapalıdır. Nitekim $0 < a$ olsun. O zaman $0 \neq 1/a$ olur ve eğer $1/a < 0$ olsaydı $1 = a(1/a) < 0$ olurdu ki bu da (U)'nun en sonunda kanıtladığımız $0 < 1$ eşitsizliğiyle çelişirdi. Demek ki $1/a > 0$.

Dolayısıyla, $a$, $b > 0$ ise $a/b = a(1/b) > 0$ olur.

**W.** $0 < 1$ eşitsizliği (U)'nun son satırında kanıtlandığına göre, her iki tarafa da 1 ekleyerek $1 < 2$ elde ederiz. (2'yi $1 + 1$ olarak tanımlıyoruz.) Demek ki, $0 < 1 < 2$ ve dolayısıyla $0 < 2$ ve $2 \neq 0$. Buradan 2'nin $\mathbb{R}$'de bir tersi olduğu çıkar: $1/2$. Eğer $1 < 2$ eşitsizliğinin iki tarafına 1 eklersek $2 < 3$ elde ederiz. (3'ü $2 + 1$ olarak tanımlıyoruz.) Böylece, $0 < 1 < 2 < 3$ elde ederiz ve $3 \neq 0$ olur. Bunu böyle devam edebiliriz. (Henüz doğal sayılardan ve doğal sayılar kümesinden sözetmediğimize dikkatinizi çekerim. $\mathbb{R}$'nin içinde $\mathbb{N}$'nin bir kopyasının olduğunu bir sonraki bölümde kanıtlayacağız.)

**X. Orta Nokta.** İki sayının ***aritmetik ortalaması*** bu iki sayının arasındadır, yani $x < y$ ise,

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

olur. Kanıtı okura bırakıyoruz.

***Aralığın*** tanımını okur ilköğretim yıllarından biliyordur. İşte birkaç aralık örneği:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},\\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\},\\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},\\
\mathbb{R}^{\geq 0} &= [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\},\\
\mathbb{R}^{>0} &= (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\},\\
\mathbb{R} &= (-\infty, \infty).
\end{aligned}$$

Diğer aralıkların tanımını okura bırakıyoruz. $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $(-\infty, b]$ ve $[a, \infty)$ türünden aralıklara ***kapalı aralık*** ve $\mathbb{R}$, $(a, b)$, $(-\infty, b)$ ve $(a, \infty)$ türünden aralıklara ***açık aralık*** adı verilir. $\mathbb{R}$ ve $\emptyset$ hem açık hem kapalı aralıklardır ve başka da hem açık hem kapalı aralık yoktur.

### Alıştırmalar

1.3. Bir $I \subseteq \mathbb{R}$ altkümesinin şu özelliği olsun: "Her $x, z \in I$ ve her $y \in \mathbb{R}$ için, eğer $x < y < z$ ise $y \in I$." $I$'nın bir aralık olduğunu gösterin. $\mathbb{R}$ için doğru olan bu özelliğin $\mathbb{Q}$ için yanlış olduğunu kanıtlayın. (Not: $\mathbb{Q}$ sıralı halkasının bir aralığının uç noktaları da $qq$'de olmalıdır.)

1.4. $a$ bir gerçel sayı olsun. Eğer her $b > 0$ için $a \leq b$ oluyorsa $a \leq 0$ eşitsizliğini gösterin.

1.5. $a$ ve $b$ iki gerçel sayı olsun. Eğer her $c > b$ için $a \leq c$ oluyorsa, $a \leq b$ eşitliğini gösterin.

## 1.5 Mutlak Değer ve Mesafe

Bir $x \in \mathbb{R}$ için, $x$'in ***mutlak değeri*** denilen $|x| \in \mathbb{R}$ sayısı şöyle tanımlanır:

$$|x| = \max\{x, -x\},$$

yani $x$ ve $-x$'ten en büyüğünü seçiyoruz. Mutlak değerin şu önemli özellikleri vardır:

**Önsav 1.1.** *Her $x$, $y \in \mathbb{R}$ için,*
**i.** $|x| \geq 0$,
**ii.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
**iii.** $|x| = |-x|$,
**iv.** $x \geq 0$ *ise* $|x| = x$ *ve* $x \leq 0$ *ise* $|x| = -x$,
**v.** $|xy| = |x||y|$,
**vi.** $|y| \leq x \Leftrightarrow -x \leq y \leq x$,
**vii.** $-|x| \leq x \leq |x|$,
**viii. Üçgen eşitsizliği.** $|x + y| \leq |x| + |y|$,
**ix.** $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$,
**x.** $|y - a| < x \Leftrightarrow a - x < y < a + x$.

**Kanıt: i.** $x$ ve $-x$ sayılarının ikisi birden mutlak negatif olamaz. $|x|$, tanımı gereği $x$ ve $-x$ sayılarından hangisi pozitifse ona eşittir. Demek ki $|x| \geq 0$.

**ii.** Eğer $x = 0$ ise $|x| = |0| = \max\{0, -0\} = \max\{0, 0\} = 0$ ve böylece ($\Leftarrow$) kısmı gösterilmiş olur. Aksi istikamette: $|x| = 0$ olsun. Demek ki

$$0 = |x| = \max\{x, -x\}.$$

Dolayısıyla,

$$\max\{x, -x\} \geq x \text{ ve } \max\{x, -x\} \geq -x$$

olduğundan,

$$0 \geq x \text{ ve } 0 \geq -x$$

olur. Yani $0 \geq x$ ve $x \geq 0$. Bu da $x = 0$ demektir.

**iii.** Bariz.

**iv.** Eğer $x \geq 0$ ise, $-x \leq 0$ olur; dolayısıyla $-x \leq x$ ve $|x| = \max\{x, -x\} = x$ olur. Eğer $x \leq 0$ ise, $-x \geq 0$ olur; yani $x \leq -x$ ve $|x| = \max\{x, -x\} = -x$ olur.

**v.** Gerekirse $x$ yerine $-x$ ve $y$ yerine $-y$ alarak, (iii)'ten dolayı, $x$ ve $y$'nin negatif olmadıklarını varsayabiliriz. O zaman $xy$ de negatif değildir ve (iv)'ten dolayı, $|xy| = xy = |x||y|$ elde ederiz.

**vi.** $|y| \leq x$ ise, $\max\{y, -y\} = |y| \leq x$ olur. Demek ki, $y \leq x$ ve $-y \leq x$. Buradan $y \leq x$ ve $y \geq -x$ çıkar. Sonuç: $-x \leq y \leq x$.

Şimdi diğer istikameti kanıtlayalım. $-x \le y \le x$ olsun. O zaman $y \le x$ ve $-y \le x$. Yani $|y| = \max\{y, -y\} \le x$.

**vii.** $x \le \max\{x, -x\} = |x|$. Aynı nedenden $-x \le |x|$, yani $-|x| \le x$.

**viii.** (vi)'ya göre, $-|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y|$ eşitsizliklerini kanıtlamalıyız. Bunlar da (vii)'den çıkar.

**ix.** (viii) ve (iii)'ten,

$$|x| = |x - y + y| \le |x - y| + |y|$$

çıkar. Demek ki

$$|x| - |y| \le |x - y|.$$

Benzer biçimde $|y| - |x| \le |y - x|$, yani

$$-|x - y| \le |x| - |y|.$$

Bu iki eşitsizlik

$$-|x - y| \le |x| - |y| \le |x - y|$$

demektir ve (vi)'dan

$$||x| - |y|| \le |x - y|$$

çıkar.

**x.** (vi)'dan çıkar. □

Daha ileri analizde çok önemli olacak olan bir kavramın temellerini atalım. İki $x$ ve $y$ gerçel sayısı arasındaki ***mesafeyi***

$$d(x, y) = |x - y|$$

olarak tanımlayalım. Mesafenin şu önemli özellikleri vardır:

**Önsav 1.2.** *Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için,*
**i.** $d(x, y) \in \mathbb{R}^{\ge 0}$.
**ii.** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
**iii.** $d(x, y) = d(y, x)$.
**iv.** $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

**Kanıt:** Mesafenin tanımından ve sırasıyla Önsav 1.1.i, ii, iii ve viii'den doğrudan çıkar. ***Üçgen eşitsizliği*** adı verilen sonuncusunun kanıtını yazmakta fayda olabilir: $a = x - z$ ve $b = z - y$ olsun. O zaman,

$$d(x, y) = |x - y| = |a + b| \le |a| + |b| = |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

olur. Önsav kanıtlanmıştır. □

Önsav 1.2'yi gündelik dille yorumlayalım:

**i.** İki nokta arasındaki mesafe negatif bir sayı olamaz.

**ii.** İki nokta arasındaki mesafe, ancak ve ancak noktalar çakışıyorsa (aynıysa) 0 olabilir.

**iii.** Bir noktanın ikinci bir noktaya mesafesi, ikinci noktanın birinci noktaya mesafesine eşittir. (Tek yönlü yollar yüzünden modern trafikte bu özellik doğru olmayabilir.)

**iv.** Bir noktanın ikinci bir noktaya mesafesi üçüncü bir noktadan (yani $z$'den) "geçerek" kısalamaz.

**Notlar 1.** Ola ki bazı "herkesin bildiği" özellikleri kanıtlamayı unutmuş olabiliriz. Kanıtlamayı unuttuklarımızı okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Örneğin,

$$a \leq b \text{ ve } 0 \leq c \leq d \text{ ise } ac \leq ad$$

önermesini kanıtlamadık. Okur, bu ve buna benzer kanıtlanmamış ama kanıtlaması kolay gibi görünen önermelere rastlarsa kanıtlasın. Her şeyin aksiyomlardan çıkması gerekir. Genel kural olarak, elemanlarla ilgili önermelerin kanıtı, altkümeler ve fonksiyonlarla ilgili önermelerin kanıtından çok daha kolaydır.

**2.** Son aksiyom olan (SUP) dışındaki aksiyomların uzun uzadıya açıklamalara ihtiyaçları yok. Şimdi kısaca bu aksiyomlarla ilgili birkaç tanım verelim. Bu tanımları bu ve sonraki analiz ciltlerimizde pek kullanmayacağız ama okurun matematiğin bu önemli kavramlarını bilmesinde yarar vardır.

T1, T2, T3 aksiyomlarını sağlayan bir $(R, +, 0)$ yapısına ***grup*** adı verilir. Bir grup ayrıca T4'ü de sağlıyorsa, adına ***değişmeli grup*** denir. Bu yapılara daha ziyade cebirde rastlanır ve bu notlarda pek sözünü etmeyeceğiz.

O1 ve O2'yi sağlayan bir $(R, <)$ yapısına ***yarısıralama*** adı verilir. Eğer yarısıralama ayrıca O3'ü de sağlıyorsa, o zaman yapıya ***tamsıralama*** adı verilir. [N3]'te sıralamalardan uzun uzadıya sözetmiştik.

Eğer değişmeli bir grup aynı zamanda tamsıralıysa ve ayrıca TO'yu sağlıyorsa, o zaman bu yapıya ***sıralı değişmeli grup*** adı verilir.

T1'den D'ye kadar olan aksiyomları sağlayan bir yapıya ***cisim*** denir. Eğer cisimde TO ve ÇO'yu sağlayan bir sıralama varsa, o zaman bu yapıya ***sıralı cisim*** adı verilir. Cisimler de cebirin çalışma alanına girerler.

Belki Ç3 dışında, T1'den D'ye kadar olan aksiyomları sağlayan bir yapıya ***değişmeli halka*** denir. Biz değişmeli halka yerine kısaca ***halka*** diyeceğiz. Eğer halkada TO ve ÇO'yu sağlayan bir sıralama varsa, o zaman bu yapıya ***sıralı halka*** adı verilir.

## 1.6 SUP Aksiyomu

Bizim için hayati önem taşıyacak olan ama bu bölümde bu ana dek hiç sözünü etmediğimiz (SUP) aksiyomunu biraz açalım. $(R, <)$ bir tamsıralama olsun, yani O1, O2, O3 aksiyomlarını sağlasın. Ayrıca $A \subseteq R$ herhangi bir altküme ve $s \in R$ olsun. Eğer her $a \in A$ için $a \leq s$ oluyorsa, $s$'ye $A$'nın ***üstsınırı*** denir. Örneğin 1 ve 2 sayıları $(0, 1)$ ve $(0, 1]$ aralıklarının üstsınırlarıdır. Ama 1, 2'den daha küçüktür. En küçük üstsınıra ***en küçük üstsınır*** denir. 1 sayısı $(0, 1)$ ve $(0, 1]$ aralıklarının en küçük üstsınırıdır.

Örneğin $R = \mathbb{R}$ ise ve sıralama bu bölümdeki sıralamaysa o zaman $\mathbb{R}$'nin üstsınırı yoktur çünkü her $r \in \mathbb{R}$ için $r + 1$, $r$'den daha büyük bir elemandır, üstsınırı olmayan $\mathbb{R}$'nin elbette en küçük üstsınırı da olamaz.

Üstsınırı olan kümelere ***üstten sınırlı kümeler*** denir. ***Altsınır***, ***alttan sınırlı küme*** ve ***en büyük altsınır*** kavramları benzer şekilde tanımlanır. $A$'nın en küçük üstsınırı, olduğunda elbet, biriciktir ve $\sup A$ olarak yazılır. En büyük altsınır $\inf A$ olarak yazılır. Her gerçel sayı boşkümenin bir üstsınırıdır, dolayısıyla boşkümenin de en küçük üstsınırı yoktur.

$\sup A = s$ eşitliği için,

**i.** *Her $a \in A$ için $a \leq s$*, ve
**ii.** *Her $\epsilon > 0$ için, $s - \epsilon < a$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in A$ sayısı vardır*

koşulları gerek ve yeter koşullardır. Nitekim birinci koşul $s$'nin $A$'nın bir üstsınırı olduğunu söylüyor; ikincisi ise $s$'den küçük hiçbir sayının $s$'nin üstsınırı olamayacağını söylüyor, yani $s$'nin en küçük üstsınır olduğunu söylüyor.

**Alıştırmalar**

1.6. Gerçel sayılar kümesinin boş olmayan ve alttan sınırlı bir $X$ altkümesinin en büyük altsınırının olduğunu kanıtlayın. Bu altsınıra $\inf X$ adı verilir. $\inf X = -\sup(-X)$ eşitliğini kanıtlayın.

1.7. Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $c > 0$ ise,
$$\sup(cX) = c \sup X \text{ ve } \inf(cX) = c \inf X$$
eşitliklerini kanıtlayın. ($\sup X$ ve $\inf X$ varsa elbette.) Eğer $c < 0$ ise,
$$\sup(cX) = c \inf X \text{ ve } \inf(cX) = c \sup X$$
eşitliklerini kanıtlayın.

1.8. $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in X$ için, $x \leq y$ eşitsizliğini sağlayan bir $y \in Y$ olsun. $\sup Y$ varsa $\sup X$'in de olduğunu ve $\sup X \leq \sup Y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

1.9. $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan iki altküme olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq y$ eşitsizliği sağlanıyorsa, $\sup X$ ve $\inf Y$'nin olduğunu ve $\sup X \leq \inf Y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

1.10. $X \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı ve boş olmayan bir altküme olsun. $Y$, $X$'in üstsınırlarından oluşan küme olsun. $\sup X = \inf Y$ eşitliğini kanıtlayın.

1.11. $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan ve üstten sınırlı iki altküme olsun.
$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$
olsun. $\sup(X + Y)$'nin olduğunu ve $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ eşitliğini kanıtlayın.

1.12. $X, Y \subseteq \mathbb{R}^{>0}$ boş olmayan ve üstten sınırlı iki altküme olsun.
$$XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$$
olsun. $\sup(XY)$'nin olduğunu ve $\sup(XY) = (\sup X)(\sup Y)$ eşitliğini kanıtlayın. Aynı şey $\mathbb{R}$'nin herhangi iki sınırlı altkümesi için geçerli midir?

1.13. $I \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $a, b \in I$ elemanı için, $(a, b) \subseteq I$ içindeliği doğruysa, o zaman $I$'nın bir aralık olduğunu kanıtlayın. $I$ sınırlıysa uç noktalarının $\inf X$ ve $\sup X$ olduğunu gösterin. (İlerde üstten sınırsız bir küme için $\sup X = \infty$ ve alttan sınırsız bir küme için $\inf X = -\infty$ tanımlarını yapacağız ve bu dediğimiz bir anlamda her zaman doğru olacak.) Her aralığın bu özelliği olduğunu gösterin.