GENEL TOPOLOJİ

Timur Karaçay

Kısım I

TOPOLOJİ SORULARI

0.1 Topolojik Kavramlar

1. Her açık aralık salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ uzayında açıktır. Gösteriniz.

2. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(n, n+1)$ aralıklarının bileşimi açıktır. Gösteriniz.

3. $$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \tag{1}$$

   eşitliğini kullanarak sonsuz sayıda açık kümelerin arakesitinin açık olmayabileceğini gösteriniz.

4. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin, salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ uzayında ne açık ne de kapalı olduğunu gösteriniz.

5. Salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ uzayında bir (a, b) açık aralığının her $x \in (a, b)$ öğesi için bir komşuluk olduğunu gösteriniz.

6. $(0, 1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ olduğunu gösterinz. Buradan şu sonucu çıkarınız: Sonsuz sayıda kapalı kümelerin bileşimi kapalı olmayabilir.

7. Daha ince topolojiye göre yoğun bir alt-küme daha kaba topolojiye göre de yoğundur. Başka bir deyişle, topoloji inceldikçe yoğun alt-kümeler azalır, topoloji kabalaştıkça yoğun alt-kümeler çoğalır.

8. Hiç bir yerde yoğun bir kümenin kaplamının da hiç bir yerde yoğun olduğunu gösteriniz.

9. Her gerçel sayının rasyonel sayılar kümesinin bir yığılma noktası olduğunu; yani her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in \tilde{\mathbb{Q}}$ olduğunu gösteriniz.

10. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin hiç bir yığılma noktası olmadığını gösteriniz.

11. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre $S = (0, 1) \cup \{3\}$ kümesinin yığılma noktalarını bulunuz.

12. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre, bir a sayısının bir S alt kümesinin yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, S kümesi içinde a sayısına yakınsayan ve sabit olmayan bir dizinin varlığıdır. Bunu simgesel olarak,

    $$a \in \tilde{S} \Longleftrightarrow \exists (a_n) \subset S \; : \; (n \neq m \Rightarrow (a_n \neq a_m)$$

    biçiminde yazabiliriz.

13. Bir kümenin içlemi, kapsadığı açık kümeler arasında en büyük olanıdır. Gösteriniz.

14. Bir kümenin açık olması için gerekli ve yeterli koşul, hiç bir kenar noktasını içermemesidir. Başka bir deyişle, $(X;\mathscr{T})$ uzayında

$$T \in \mathscr{T} \Leftrightarrow \partial T \cap T = \emptyset$$

dir.

15. $(X;\mathscr{T})$ uzayınının $A \subset X$ alt kümesi için

$$\bar{A} = \partial A \cup A = \partial A \cap A^{\circ}$$

olur.

16. *Topolojik Toplam Uzay:*

17. *Topolojiler Toplamı:* $(X_\imath, \mathscr{T}_\imath)$ uzayları verilsin. $\imath \neq \jmath \Rightarrow X_\imath \cap X_\jmath = \emptyset$ olsun. Bu koşulu sağlayan uzaylar ailesine ayrışık (dijoint) uzaylar denir.

$$\mathcal{S} = \cup \mathscr{T}_\imath = \cup\{T \,:\, (\exists \imath \in I)\, T \in \mathscr{T}_\imath\}$$

bileşimi üzerinde $\mathscr{T}$ ailesini şöyle tanımlayalım:

$$U \in \mathscr{T} \Leftrightarrow U \cap X_\imath \in \mathscr{T}_\imath,\ (\imath \in I)$$

$(\mathcal{S}, \mathscr{T})$ bir topolojik uzaydır. Gösteriniz. *(Bu uzaya $(X_\imath, \mathscr{T}_\imath)$ uzaylarının topolojik toplam uzayı* denilir.)

18. Hiç bir has alt kümesi yoğun olmayan uzay ayrık bir uzay mıdır?

19. Sayılabilir her alt kümesi kapalı olan uzay ayrık bir uzay mıdır?

0.2 Basis

1. $(X,\mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ alt kümesi verilmiş olsun. Bir $x \in X$ noktasının A nın bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul her $B \in \mathscr{B}(x)$ için $(B \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır. Gösteriniz.

2. $(X,\mathcal{A})$ ayrık uzayında $\mathscr{B}(x) = \{\{x\}\}$ ailesinin x noktası için bir komşuluklar tabanı olduğunu gösteriniz.

3. Düzlemdeki salt topoloji için başka komşuluk tabanları bulunuz.

4. $\mathbb{R}$ üzerinde $= \{[a, a+1] : a \in \mathbb{R}\}$ ailesini alt taban olarak alan topolojinin $\mathbb{R}$ üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

5. $\mathbb{R}^2$ düzleminde eksenlere paralel yatay ve düşey doğrularla belirlenen bütün açık yarı düzlemler ailesinin salt topoloji için bir alt taban olduğunu gösteriniz.

6. $(X, \leq)$ tam sıralanmış bir küme olsun. Her $a, b \in X$ öğe çiftine karşılık $\{x \in X : x > a\}$, $\{x \in X : x < b\}$ ve $\{x \in X : a < x < b\}$ kümeleri tanımlanıyor. a, b öğeleri bütün X kümesini taradığında elde edilecek bütün bu kümelerden oluşan ailenin X kümesi üzerinde bir topoloji tabanı olduğunu gösteriniz. Bu tabanın ürettiği topolojiye *sıra topolojisi* denir. Bu topolojik uzayın kapalı kümelerinin nasıl olduğunu belirleyiniz.

0.3 Neigborhoods

1. $(X, \leq)$ tam sıralanmış bir küme olsun. Her $a, b \in X$ öğe çiftine karşılık $\{x \in X : x > a\}$, $\{x \in X : x < b\}$ ve $\{x \in X : a < x < b\}$ kümeleri tanımlanıyor. a, b öğeleri bütün X kümesini taradığında elde edilecek bütün bu kümelerden oluşan ailenin X kümesi üzerinde bir topoloji tabanı olduğunu gösteriniz. Bu tabanın ürettiği topolojiye *sıra topolojisi* denir. Bu topolojik uzayın kapalı kümelerinin nasıl olduğunu belirleyiniz.

2. Salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ uzayında herhangi farklı iki noktanın birbirleriyle kesişmeyen birer komşuluğu vardır; yani $x, y \in \mathbb{R}$ $x < y$ noktaları için $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $U \in \mathscr{B}(x)$ ve $V \in \mathscr{B}(y)$ komşulukları vardır.

0.4 Seperation Axioms

1. $\mathbb{R}^2$ düzleminde

$$[a, b) \times [c, d) = \{(x, y)| \qquad a \leq x < b, c \leq y < d\}$$

yarı-açık diktörtgenlerinin doğurduğu topolojiyi $\mathscr{T}$ ile gösterelim. $Y = \{(x, y)|x + y = 1\}$ doğrusu üzerindeki rasyonel koordinatlı noktaların oluşturduğu küme A olsun ve $B = Y - A$ diyelim.

(i) A ve B kümeleri $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ uzayında kapalıdır;

(ii) A ve B nin birbirinden ayrık birer komşuluğu olamaz; yani $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T})$ normal bir uzay değildir.

2. Bir T_1 uzayında sonlu bir kümenin hiç bir yığılma noktası yoktur. Gösteriniz.

3. T_0 uzayının her alt uzayı da T_0 dır. Gösteriniz.

4. T_1 uzayının her alt uzayı da T_1 dır. Gösteriniz.

5. T_2 uzayının her alt uzayı da T_2 dır. Gösteriniz.

6. T_0 uzayının bire-bir-örten (BBÖ) ve açık bir fonksiyon altındaki resmi de T_0 uzayıdır. Gösteriniz.

7. T_1 uzayının bire-bir-örten (BBÖ) ve açık bir fonksiyon altındaki resmi de T_1 uzayıdır. Gösteriniz.

8. T_2 uzayının bire-bir-örten (BBÖ) ve açık bir fonksiyon altındaki resmi de T_2 uzayıdır. Gösteriniz.

9. $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\mathscr{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ topolojisi veriliyor. $(X, \mathscr{T})$ nın normal bir uzay olduğunu ama Hausdorff olmadığını gösteriniz.

10. $X = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1/2, 1/2 < x < 1\}$ kümesi veriliyor. Sabit bir $\alpha \in [0, 1/2]$ ve sabit bir $\beta \in [1/3, 1]$ gerçel sayısına karşılık $T_{\alpha\beta} = \{x \in X | \alpha < x < \beta\}$ kümesini oluşturalım. $\mathscr{T} = \{T_{\alpha\beta} | 0 \leq a \leq 1/2, 1/2 \leq \beta \leq 1\}$ ailesinin X üzerinde bir topoloji oluşturduğunu gösteriniz. Bu uzay normaldir, ama Hausdorff değildir. Neden?

11. Tamamen düzenli $(X, \mathscr{V})$ uzayı üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonlar kümesi

$$\mathfrak{C}(X) = \{f : X \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathscr{T}) \quad f \quad \text{sürekli} \tag{2}$$

olsun. $\mathfrak{C}(X)$ uzayının noktaları ayırdığını gösteriniz.

12.
$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^2$$

kümesi üzerinde

$$(x, 0) \sim (x, 1) \Longleftrightarrow x \neq 0$$

bağıntısı veriliyor. Gösteriniz ki;

(a) Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.
(b) $X/\sim$ bölüm uzayı yerel Öklidyendir.
(c) $X/\sim$ bölüm uzayı İkinci sayılabilme Aksiyomu'nu sağlar.
(d) $X/\sim$ bölüm uzayı Hausdorff değildir.

13. Ayrışık (disjoint) Hausdorff uzayların topolojik toplamı da Hausdorff uzayıdır. Gösteriniz.

0.5 Functions

1. Sonlu sayıda açık dönüşümlerin çarpımı açık bir dönüşümdür. Gösteriniz.

2. Sonlu sayıda kapalı dönüşümlerin çarpımı kapalı bir dönüşümdür. Gösteriniz.

3. Topoloji inceldikçe sürekli fonksiyonlar artar, topoloji kabalaştıkça sürekli fonksiyonlar azalır.

4. $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$ dönüşümünün $(-1, 1)$ den $\mathbb{R}$ ye bir eşyapı dönüşümü olduğunu gösteriniz.

5. $(X, \mathscr{T})$ uzayının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul, X uzayından her Y uzayına tanımlı fonksiyonların sürekli olmasıdır.

6. Boş olmayan bir X kümesi veriliyor. X üzerinde öyle bir $\mathscr{T}$ topolojisi kurunuz ki, her $(Y, \mathscr{S})$ uzayından $(X, \mathscr{T})$ uzayına tanımlı her fonsiyon sürekli olsun. Bu topolojiyi belirleyiniz.

7. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ sürekli ve örten bir fonksiyon ise, X uzayının yoğun alt kümelerini Y uzayının yoğun alt kümelerine resmeder; yani
$$\bar{A} = X \Rightarrow \overline{f(A)} = Y \tag{3}$$
olur. Gösteriniz.

8. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu X uzayının yoğun alt kümelerini Y uzayının yoğun alt kümelerine resmederse, sürekli midir? Simgelerle söylersek,
$$\bar{A} = X \Rightarrow \overline{f(A)} = Y \tag{4}$$
olması f fonksiyonunun sürekli olmasını gerektirir mi? Neden?

9. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ sürekli ve örten bir fonksiyon ise $\mathscr{T}$ topolojisinin bir tabanını $\mathscr{S}$ topolojisinin bir tabanına resmeder mi? Simgelerle söylersek, $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{T}$ topolojisinin bir tabanı olduğunda $f(\mathscr{B})$ ailesi $\mathscr{S}$ topolojisinin bir tabanı olur mu? Neden?

10. $I : (X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{T})$ özdeşlik (birim) fonksiyonu her $x \in X$ için $I(x) = x$ olan fonsiyondur. I özdeşlik dönüşümünün bir topolojik eşyapı dönüşümü (homeomorphism) olduğunu gösteriniz.

11. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu bire-bir-içine (injective) olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de sürekli iseler, f fonksiyonuna bir *gömme dönüşümüdür*, denilir. Bu durumda, her $x \in X$ için $g : X \to f(X)$ diye tanımlanan g fonksiyonu bir topolojik eşyapı dönüşümüdür (homeomorphism). Gösteriniz

0.6 Limit

1. Aşağıdaki dizilerin herbirisinin, varsa, limit ve yığılma noktalarını bulunuz:

   (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n = 3)$ diye tanımlanan (a_n) sabit dizisi.

   (b) Belli bir n_0 indisinden sonra terimleri sabit olan dizi; yani

   $$a_n = \begin{cases} n, & n \leq n_0 \\ a, & n > n_0,\ a \quad \text{sabit} \end{cases} \tag{5}$$

   biçiminde tanımlanan (a_n) dizisi.

   (c) Genel terimi $a_n = 5 - \frac{5}{n}$ olan (a_n) dizisi.

   (d) Genel terimi $a_n = 7 + \frac{7}{n}$ olan (a_n) dizisi.

   (e) Genel terimi $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ olan (a_n) dizisi.

   (f) Genel terimi $a_n = n$ olan (a_n) dizisi.

   (g) Genel terimi $a_n \equiv n \pmod 3$ olan (a_n) dizisi.

   (h) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ fonksiyonu $f(n) = \frac{1}{n}$ diye tanımlanan bire-bir-içine bir fonksiyon olmak üzere, $a_n = f(n)$ dizisi. [Böyle bir fonksiyonun varlığını gösteriniz.]

2. Dizileri, genellikle, genel terimini belirten bir ifade ile yazarız. Örneğin, $(1/n)$, (n^2), $(1/(n^2 + 1)), \ldots$. Bazen de genel terimi belirli kılmaya yetecek kadar terimi ard arda yazarak diziyi belirleyebiliriz Örneğin,

$(0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$ dizisinin genel teriminin $(2n)$ olduğu hemen görülüyor. Ama bazı dizilerin genel terimini bulmak için sınama-deneme yolundan başka bir yöntem olmayabilir. Aşağıdaki dizilerin genel terimlerini sınama-deneme yoluyla bulunuz:

$$(1, 4, 9, 16, \ldots) \tag{6}$$

$$(2, 5, 10, 17, 26, \ldots) \tag{7}$$

$$(1, 3, 6, 10, 15, \ldots) \tag{8}$$

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \quad \text{Fibonacci dizisi} \tag{9}$$

Çözümler, sırasıyla, aşağıdadır:

$$(n^2), \quad (n^2 + 1), \quad (n(n+1)/2), \quad (a_{n+2} = a_{n+1} + a_n)$$

3. Genel terimi recursive olarak $(a_{n+2} = a_{n+1} + a_n)$ biçiminde tanımlanan *Fibonacci* dizisinin salt topolojiye göre ıraksayan bir dizi olduğunu gösteriniz.

4. Yakınsak bir dizinin her alt dizisinin de yakınsak ve aynı limite sahip olduğunu gösteriniz.

5. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojiye göre, bir a sayısının bir S alt kümesinin yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, S kümesi içinde a sayısına yakınsayan ve sabit olmayan bir dizinin varlığıdır. Bunu simgesel olarak,

$$a \in \tilde{S} \Longleftrightarrow \exists (a_n) \subset S \; : \; (n \neq m \Rightarrow (a_n \neq a_m)$$

biçiminde yazabiliriz. Gösteriniz.

0.7 Compactness

1.

0.8 Product Spaces

1. $(X_i, \mathscr{T}_i)$ uzaylarının herbiri içinde kapalı olan bir $K_i \subset X_i$ kümesi veriliyor. $K_1 \times K_2 \times K_3 \times \cdots \times K_n$ kümesinin $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$ çarpım uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

2. A sayılamayan bir küme olsun. Her $\alpha \in A$ için $X_\alpha = \{0, 1\}$ kümesini tanımlayalım ve her birisi üzerinde ayrık topoloji var olsun.

$$X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha = \{0, 1\}^A \tag{10}$$

kartezyen çarpım kümesi üzerinde X_α uzaylarının çarpım topolojisi konulmuş olsun. Şimdi $p = (p_\alpha) \in X$ noktasını her $\alpha \in A$ için $p_\alpha = 1$ olacak biçimde seçelim. $q = (q_\alpha) \in X$ noktasını ise sayılabilir sayıdaki α indisi dışında $q_\alpha = 0$ olacak biçimde seçelim; yani ancak sayılabilir sayıdaki bileşeni 1 e eşit olsun. Bu durumda, gösteriniz ki,

   (a) p noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı yoktur.

   (b) Kapsama bağıntısına göre sıralanmış bir komşuluklar tabanı yoktur.

   (c) $\bar{K} = X$ ve H kümesi K nın sayılabilir bir alt kümesi ise $\bar{H} \subset K$ olur.

   (d) K içinde p noktasına yakınsayan bir ağ bulunuz.

   (e) Her $\lambda \in \Lambda$ için bir X_λ uzayı ile bunun bir $A_\lambda \subset X_\lambda$ alt-kümesi verilmiş olsun.

$$A = \Pi A_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda$$

   kartezyen çarpımını düşünelim.

      i. Eğer A_λ kümeleri açık ve hemen her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda = X_\lambda$ ise A kümesinin çarpım uzayda açık olduğunu biliyoruz. Bunun karşıtının da doğruluğunu gösteriniz.

      ii. A kartezyen çarpımının kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul A_λ çarpanlarının herbirisinin kapalı olmasıdır. Gösteriniz. Buradan

$$\bar{A} = \Pi \bar{A}_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda$$

      eşitliğini çıkarınız.

      iii. A kümesi ne zaman çarpım uzay içinde yoğun olur?

(f) Her n doğal sayısı için X_n kümesi 0 ile 1 öğelerinden oluşan kümeye eşit olsun; yani $X_n = \{0, 1\}$ olsun. Bu kümeler üzerinde ayrık topolojiyi varsayalım. Şimdi $X = \Pi X_n, \quad n \in \mathbb{N}$ çarpım uzayını düşünelim. Her n doğal sayısı için $V_n = \{0\}$ kümesi çarpan uzaylarda açıktır. Ama $V = \Pi V_n, \quad n \in \mathbb{N}$, kartezyen çarpımı, çarpım uzay içinde açık bir küme değildir. Gösteriniz.

(g) X ile Y iki topolojik uzay ve $A \subset B$ ile $B \subset Y$ kapalı iseler $A \times B$ nin çarpım uzayda kapalı olduğunu gösteriniz.

(h) X ile Y iki topolojik uzay ve $W \subset X \times Y$ çarpım uzayda açık ise

i. $\pi_1(W) \subset X$ ile $\pi_2(W) \subset Y$ izdüşümlerinin açık kümeler olduğunu gösteriniz.

ii. Yukarıdaki özeliğin kapalı kümeler için genel olarak sağlanmadığını bir örnekle gösteriniz.

(i) $(X_i, \mathscr{T}_i)$ uzaylarının herbiri içinde kapalı olan bir $K_i \subset X_i$ kümesi veriliyor. $K_1 \times K_2 \times K_3 \times \cdots \times K_n$ kümesinin $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$ çarpım uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

(j) Çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının örten olduğunu gösteriniz.

(k) Çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının sürekli olduğunu gösteriniz.

(l) Çarpım uzaydan çarpan uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonlarının açık olduğunu gösteriniz.

(m) $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu X uzayının yoğun alt kümelerini Y uzayının yoğun alt kümelerine resmederse, sürekli midir? Simgelerle söylersek,

$$\bar{A} = X \Rightarrow \overline{f(A)} = Y \tag{11}$$

olması f fonksiyonunun sürekli olmasını gerektirir mi? Neden?

0.9 Quotient Spaces

1. $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir bölüm dönüşümü ise, φ nin bir doymuş açık ya da kapalı alt kümeye kısıtlanmışı da bir bölüm dönüşümüdür. Gösteriniz.

2. X bir topolojik uzay ise

$$\Delta = \{(x, x) : \ x \in x\} \subset X \times X \tag{12}$$

köşegeninin $X \times X$ çarpım uzayında kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının Hausdorff olmasıdır.

3. Bir çarpım uzaydan bileşen uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonları birer bölüm dönüşümüdür; yani $(X_i, \mathscr{T}_i)$ uzayları verilmişse

$$pi_i : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

dönüşümleri birer bölüm dönüşümüdür. Gösteriniz.

4. X bir topolojik uzay ise

$$\Delta = \{(x, x) : \ x \in x\} \subset X \times X \tag{13}$$

köşegeninin $X \times X$ çarpım uzayında kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının Hausdorff olmasıdır.

5. Bir çarpım uzaydan bileşen uzaylara tanımlı izdüşüm fonksiyonları birer bölüm dönüşümüdür; yani $(X_i, \mathscr{T}_i)$ uzayları verilmişse

$$\pi_i : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

dönüşümleri birer bölüm dönüşümüdür. Gösteriniz.

6.
$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^2$$

kümesi üzerinde
$$(x, 0) \sim (x, 1) \Longleftrightarrow x \neq 0$$

bağıntısı veriliyor.

(a) Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

(b) $X/\sim$ bölüm uzayı yerel Öklidyendir.

(c) $X/\sim$ bölüm uzayı İkinci sayılabilme Aksiyomu'nu sağlar.

(d) $X/\sim$ bölüm uzayı Hausdorff değildir.

olduğunu gösteriniz.

7. Sonlu sayıda açık dönüşümlerin çarpımı açık bir dönüşümdür. Gösteriniz.

8. Sonlu sayıda kapalı dönüşümlerin çarpımı kapalı bir dönüşümdür. Gösteriniz.

0.10 Connected Spaces

1. X bağlantılı bir uzay ve C bağlantılı bir alt uzayı olsun. $A \subset X$ kümesi için $A \cap C \neq \emptyset$ ve $A' \cap C \neq \emptyset$ ise, $\partial A \cap C \neq \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

2. Aşağıdaki kümelerin $\mathbb{R}$ içinde,salt topolojiye göre, tamamen bağlantısız olduklarını gösteriniz:

   (a) Cantor kümesi.

   (b) Rasyonel sayılar kümesi.

   (c) İrrasyonel sayılar kümesi

3. X uzayının bağlantılı bileşenlerinin kümesini $\mathcal{X}$ ile gösterelim. $\mathcal{X}$ üzerinde bölüm topolojisi var olsun. $\mathcal{X}$ bölüm uzayının tamamen bağlantısız olduğunu gösteriniz.

4. Tamamen bağlantısız uzayın her alt uzayı da tamamen bağlantısızdır. Gösteriniz.

5. Tamamen bağlantısız uzayların çarpım uzayı da tamamen bağlantısızdır. Gösteriniz.

6. $\mathbb{R}^n$ içinde,salt topolojiye göre, açık ve bağlantılı iki alt kümenin arakesiti bağlantılı olmayabilir. Bir örnekle gösteriniz.

0.11 Comparisons of Topologies

1. Bir X kümesi üzerideki $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri arasında $\mathscr{T}_1 \leq \mathscr{T}_2$ bağıntısı var ise $\mathscr{T}_1' \leq \mathscr{T}_2'$ bağıntısının da olduğunu gösteriniz.

2. İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan uzay, Birinci Sayılabilme Aksiyomunu da sağlar. Gösteriniz.

3.

0.12 Metric Spaces

1.

0.13 Nets

1. Doğal sayılar kümesinin $\leq$ bağıntısına göre yönlenmiş bir küme olduğunu gösteriniz.

2. `Tanım ??` deki (iii) koşulu yerine daha güçlü olan aşağıdaki koşulun konulabileceğini gösteriniz:

   Sonlu sayıda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ öğelerine karşılık

   $$\lambda_1 \leq \lambda,\ \lambda_2 \leq \lambda,\ \ldots, \lambda_n \leq \lambda$$

   eşitsizlikleri sağlayan bir $\lambda \in \Lambda$ öğesi vardır.

3. $X, \mathscr{T})$ uzayında x noktasının $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar ailesinin yönlenmiş bir sistem olduğunu gösteriniz.

4. Kapalı $[a, b]$ aralığında bir f fonksiyonunun Riemann integrali tanımlanırken $[a, b]$ aralığının

   $$a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n = b \tag{14}$$

   bölüntüleri kurulur ve en büyük $[a_{i-1}, a_i]$ alt aralığının uzunluğu sıfıra giderken, Riemann toplamlarının inf ve sup değerlerinin olup olmadığına bakılır. Alt aralıkları iç-içe olan (14) bölüntülerinin yönlenmiş bir sistem oluşturduklarını gösteriniz.

5. X kümesi üzerinde $\mathscr{T}_1 \leq \mathscr{T}_2$ koşulunu sağlayan $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri varsa, bir ağın bu topolojilere göre yakınsamaları arasındaki fark nedir?

6. İçindeki her ağ her noktasına yakınsıyorsa, uzay ayrık değildir. Gösteriniz.

7. Ayrık bir uzayı ağların yakınsaması ile belirleyebilir misiniz?

8. (x_λ) ağı x limitine yakınsıyorsa, her alt ağının da aynı noktaya yakınsadığını gösteriniz.

9. X kümesi üzerinde $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri veriliyor. $\mathscr{T}_1 \leq \mathscr{T}_2$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathscr{T}_2$ topolojisine göre yakınsak olan ağın $\mathscr{T}_1$ topolojisine göre de yakınsak olmasıdır. Gösteriniz.

10. X kümesi üzerinde $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri veriliyor. $\mathscr{T}_1 \leq \mathscr{T}_2$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathscr{T}_2$ topolojisine göre yakınsak olan ağın $\mathscr{T}_1$ topolojisine göre de yakınsak olmasıdır. Gösteriniz.

11. **Önerme ??** yi ispatlayınız.

12. $\{X_\imath \,|\, \imath \in I\}$ topolojik uzaylarının çarpım uzayı $X = \Pi_{\imath \in I} X_\imath$ olsun. X içinde bir (x_λ), $\lambda \in \Lambda$, ağı verilsin. Tabii bu ağın her x_λ öğesi $X = \Pi_{\imath \in I} X_\imath$ çarpım uzayının bir öğesi olduğundan

$$x_\lambda = (x_{\lambda_\imath}), \imath \in I,\ x_{\lambda_\imath} \in X_\imath$$

biçiminde olacaktır. Bu demektir ki, $\imath$ sabit kılındığında, her $X_\imath$ bileşeni (çarpan uzay) üzerinde bir $(x_{\lambda_\imath})$, $\lambda \in \Lambda$ ağı oluşur. Gösteriniz ki (x_λ) ağının bir $x = (x_\imath) \in X$ noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul her $\imath \in I$ için $X_\imath$ bileşeni üzerindeki $\{(x_{\lambda_\imath}) : \lambda \in \Lambda\}$ ağının $x_\imath \in X_\imath$ noktasına yakınsamasıdır.

0.14 Filters

1. Yalnızca iki öğesi olan $X = \{x, y\}$ kümesi üzerinde ayrık olmayan topoloji var olsun.

   (a) $\mathscr{S} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ailesinin bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

   (b) $\mathscr{S}$ süzgecinin hem x, hem y noktasına yakınsadığını gösteriniz.

   (c) Buradan, bir süzgecin limitinin tek olmayabileceği sonucunu çıkarınız.

2. Sonlu bir X kümesi üzerindeki her $\mathfrak{U}$ aşkın süzgeci için

$$\mathfrak{U} = \{A : A \subset X,\ x \in A\}$$

   olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. Gösteriniz.

3. X kümesi içinde (x_λ), $(\lambda \in \Lambda)$ ağı verilsin. Her $\imath$ için $F\imath = \{x_\jmath : \jmath \geq \imath\}$ kümesi tanımlanıyor.

   (a) $\mathcal{F} = \{F_\imath : \imath \in I\}$ ailesinin X kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı oluşturduğunu gösteriniz.

   (b) $x_\imath \to p \Leftrightarrow \mathcal{F} \to p$ olduğunu gösteriniz.

4. $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(X)$ süzgeç tabanı verilsin. $\mathcal{F}$ üzerinde $\succeq$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$$U \succeq V \Leftrightarrow U \subseteq V$$

   (a) $(\mathcal{F}, \succeq)$ sisteminin tikel sıralı bir sistem olduğunu gösteriniz.

(b) Her

$$(x_U)_{U\in\mathcal{F}} \in \Pi_{U\in\mathcal{F}} U$$

öğesinin X içinde $(x_U)_{U\in\mathcal{F}} \subset X$ ağını belirlediğini gösteriniz.

(c) Bu şekilde seçilen her $(x_U)_{U\in\mathcal{F}} \subset X$ ağı için

$$\mathcal{F} \to p \Leftrightarrow x_U \to p$$

olduğunu gösteriniz.

5. Birinci sayılabilme Aksiyomunu sağlayan $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının bir $A \subset X$ alt kümesi veriliyor. $x \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul A kümesi içinde x öğesine yakınsayan bir $(x_n, (n \in \mathbb{N})$ dizisinin olmasıdır. Gösteriniz.

6. $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının bir $A \subset X$ alt kümesi veriliyor.

   (a) $x \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul A kümesi içinde x öğesine yakınsayan bir (x_λ), $(\lambda \in \Lambda)$ ağının olmasıdır. Gösteriniz.

   (b) Yukarıda *"ağ"* yerine *"dizi"* konulursa ne olur?

   (c) $x \in \bar{A}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathscr{P}(A)$ içinde x öğesine yakınsayan bir $\mathscr{F}$ süzgecinin olmasıdır. Gösteriniz.

7. X kümesi üzerindeki en küçük süzgeç hangisidir?

8. X kümesinin birden çok öğesi varsa, bu küme üzerindeki süzgeçler ailesinin en büyük öğesi yoktur.

0.15 Compact Spaces

1. X tıkız ve Y Hausdorff ise sürekli $f :\to Y$ fonksiyonu kapalıdır. Gösteriniz.

2. Y tıkız ise $\pi_1 : X \times Y \to Y$ izdüşümü kapalı bir dönüşümdür. Gösteriniz.

3. Y tıkız ve hausdorff ise $f : X \to Y$ dönüşümünün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

grafiğinin $X \times Y$ içinde kapalı olmasıdır.

4. $f : X \to Y$ dönüşümü kapalı, sürekli ve bire-bir-örten olsun. Y tıkız olduğunda, her $y \in Y$ için $f^{-1}(\{y\}) \subset X$ tıkız ise, X uzayının da tıkız olduğunu gösteriniz.

5.