1 EK PROBLEMLER

1. SILINDIRLER

   Bir kare ya da dikdörtgen kağıt alınız. Bunun karşılıklı iki kenarını çakıştırınız. Elde edeceğiniz şekil (sonlu) bir silindirdir. Şimdi bunu topoloji diliyle ifade edelim. $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ birim karesinin karşılıklı iki kenarı çakıştırılıyor. Bu durumda, birim karede aşağıdaki denklik bağıntısı kurulmuş olur. Bu soruda $0 \le x, y \le 1$ olduğunu varsayıyoruz.

   $$(x,y) \ \sim (x',y') \Leftrightarrow [(x,y) = (x',y')] \vee [(0,y) \leftrightarrow (1,y)] \tag{1}$$

   $Y = I^2/\sim$ diyelim. $\varphi : I^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x,y) noktasını $[(x,y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x,y)) = [(x,y)]$. I^2 üzerinde salt topolojinin kondurduğu topoloji var olsun. Y bölüm kümesi üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz. Böylece sonlu silindir üzerinde bir topoloji tanımlamış oluyoruz.

2. Şimdi sonsuz silindiri elde edeceğiz. Düzlem üzerinde $A = [0,1] \times \mathbb{R}$ kapalı şeridini düşünelim. Bu $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde düşey doğrultuda aşağıya ve yukarıya sınırsız uzayan şerittir. Bu şeridin soldaki ve sağdaki düşey kenarlarını birbiri üzerine lelecek şekilde yapıştıralım. İki ucu sonsuza giden bir silindir elde ederiz. Şimdi bunu bir bölüm topolojisi olarak elde edelim. $A = [0,1] \times \mathbb{R}$ şeridi üzerinde düzlemin kondurduğu topoloji var olsun. A üzerinde

   $$(x,y) \ \sim (x',y') \Leftrightarrow [(x,y) = (x',y')] \vee [(0,y) \leftrightarrow (1,y)] \tag{2}$$

   denklik bağıntısını tanımlayalım. Tabii, burada $0 \le x \le 1$ ve $-infty \le y \le +\infty$ olduğu açıktır. Bu bağıntı, şeridin düşey iki kenarını üst üste çakıştırmaya denk olur. $Y = A/\sim$ diyelim. $\varphi : A \to Y$ bölüm dönüşümü her (x,y) noktasını $[(x,y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x,y)) = [(x,y)]$. Y bölüm kümesi üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz.

3. Şimdi yukarıda elde ettiğimiz silindiri yatay eksen byunca kaymaksızın yuvarlayalım. Tabii ilk silindirde $(0,y)$ noktası ile $(1,y)$ noktası çakışmıştır. Silindir yuvarlanarak yatay eksende 2 noktasına eriştiğinde her $y \in \mathbb{R}$ için $(0,y) \sim (1,y) \sim (2,y)$ olacaktır. Bu şekilde silindiri pozitif ve negatif yönlerde yuvarlamaya devam edersek, bütün düzlemi bir silindire dönüştürmüş oluruz. *[Tabii, düzlemin kalınlığı olmadığı için, sonsuz kez yuvarlanan silindirin yanal yüzeyinin de kalınlığı olmayacaktır.]* Şimdi bunu bir bölüm topolojisi olarak elde edelim. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ analitik düzlemi üzerinde salt topoloji var olsun. $\mathbb{R}^2$ üzerinde

   $$(x,y) \ \sim (x',y') \Leftrightarrow [(x,y) = (x',y')] \vee [(x - x' = n) \wedge (y = y')] \tag{3}$$

   denklik bağıntısını tanımlayalım. Tabii, burada $-\infty < x, y < +\infty$ dir. Bu bağıntı, bütün şeritlerin düşey kenarlarını üst üste çakıştırmaya denk olur. $Y = \mathbb{R}^2/\sim$ diyelim. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x,y) noktasını $[(x,y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x,y)) = [(x,y)]$. Y bölüm kümesi üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz. Burada, her $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı ve her $y \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı için

   $$(\ldots \sim (-n,y) \sim \ldots (0,y) \sim \ldots \sim (n,y) \sim$$

   denklikleri vardır; yani bölüm uzayında bu noktalar çakışırlar.

4. MOBIUS ŞERIDI

   $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ birim karesinin karşılıklı iki kenarını ters yönde çakıştıralım. Elde edilen şekil bir Mobius şerididir. Bu şeridin bir tek yüzeyi vardır. Herhangi bir yerden başlayarak, kalemi kaldırmadan bütün yüzey üzerinde bir çizgi çizebilirsiniz. Şimdi bu yüzey üzerine bir topoloji kuralım. I^2 üzerinde düzlemin salt topolojisinin kondurduğu topoloji var olsun. I^2 birim karesi üzerinde şu denklik bağıntısını tanımlayalım:

   $$(x,y) \ \sim (x',y') \Leftrightarrow [(x,y) = (x',y')] \vee [(x = 0) \wedge y' = 1 - y)] \tag{4}$$

   Bu bağıntı, I^2 birim karesinin düşey kenarlarını ters yönde üst üste çakıştırmaya denk olur. $Y = \mathbb{I}^2/\sim$ diyelim. $\varphi : \mathbb{I}^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x,y) noktasını $[(x,y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x,y)) = [(x,y)]$. Y bölüm kümesi (Mobius yüzeyi) üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz.

5. Simit Yüzeyi (Torus)

   $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ birim karesinin dört kenarının karşılıklı olanlarını ikişer ikişer çakıştıralım. Elde edeceğimiz şekil bir simit yüzeyidir. I^2 birim karesi üzerinde düzlemin salt topolojisinin kondurduğu topoloji var olsun. Simit yüzeyini karenin bir bölüm uzayı olarak elde edebiliriz. Bunun için I^2 birim karesi üzerinde şu denklik bağıntısını kuralım:

$$(x,y) \ \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \vee \\ (0,y) \leftrightarrow (1,y) \wedge (x,0) = (x,1) \end{cases} \tag{5}$$

   Bu bağıntı, birim karenin yatay ve düşey kenarlarının karşılıklı olarak çakıştırılmasına denktir. $Y = \mathbb{I}^2/\sim$ diyelim. $\varphi : \mathbb{I}^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x,y) noktasını $[(x,y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x,y)) = [(x,y)]$. Y bölüm kümesi üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz. Bu işlem simit yüzeyi üzerinde bir topoloji kurmaktadır.

6. Küre Yüzeyi

   $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ birim karesinin dört kenarını bir noktada çakıştıralım. Örneğin dört kenarın üzerindeki bütün noktaları $(0,0)$ noktasına eşleyelim. Bu durumda bir küre yüzeyi elde ederiz. I^2 birim karesi üzerinde düzlemin salt topolojisinin kondurduğu topoloji var olsun. Küre yüzeyini karenin bir bölüm uzayı olarak elde edebiliriz. Bunun için I^2 birim karesi üzerinde şu denklik bağıntısını kuralım:

$$(x,y) \ \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \vee \\ (0,y) \leftrightarrow (0,0) \vee \\ (x,0) \leftrightarrow (0,0) \vee \\ (1,y) \leftrightarrow (0,0) \vee \\ (x,1) \leftrightarrow (0,0) \end{cases} \tag{6}$$

   Bu bağıntı, birim karenin yatay ve düşey kenarları üzerindeki bütün noktaları $(0,0)$ noktasına eşler. $Y = \mathbb{I}^2/\sim$ diyelim. $\varphi : \mathbb{I}^2 \to Y$ bölüm dönüşümü her (x,y) noktasını $[(x,y)]$ denklik sınıfına resmediyor: $\varphi((x,y)) = [(x,y)]$. Y bölüm kümesi (küre yüzeyi) üzerinde φ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince topolojiye, bölüm dönüşümü diyoruz. Bu işlem küre yüzeyi üzerinde bir topoloji kurmaktadır.

7. Çember

   Kapalı bir aralıktan bir çember elde etmek için bu aralığın iki ucunu birleştirerek bir çembere benzetebiliriz. Bu görüşten hareketle, çemberi kapalı bir aralığın bölüm uzayı olarak oluşturabiliriz. $Y = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$ diyelim. $[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde salt topoloji var olsun. $f : [0, 2\pi] \to Y$ fonksiyonunu $f(t) = (cost, sint) \in \mathbb{R}^2$ diye tanımlayalım. Bu fonksiyon sürekli ve kapalıdır. $A = [0, 2\pi]$ aralığı üzerinde uç noktaları eşleyen aşağıdaki bağıntı bir denklik bağıntısıdır:

$$x \sim x' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \vee \\ x = 0 \wedge y = 2\pi \wedge \end{cases} \tag{7}$$

   Buna göre f fonksiyonunu sürekli kılan en ince topoloji Y birim çemberi üzerindeki bölüm topolojisidir.