Kısım I

Çarpım ve Bölüm Uzayları

ÇARPIM UZAYLARI

1 ÇARPIM TOPOLOJİSİ

2 KARMA P R O B E M L E R

1. A ile B, sırasıyla, $(X, \mathscr{T})X$ ile $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzaylarının birer alt-kümesi olsunlar.

   (a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

   (b) $\overline{(A \times B)} = \bar{A} \times \bar{B}$

   (c) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$

   olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ uzayının bir tabanı $\mathfrak{T}$ ve $(Y, \mathscr{S})$ uzayının bir tabanı $\mathfrak{S}$ olsun.

   (a)

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A \times B)^o &\Leftrightarrow (\exists T \in \mathfrak{T})(\exists S \in \mathfrak{S})[(x,y) \in T \times S \subset A \times B] \\ &\Leftrightarrow (x \in T \subset A) \wedge (y \in S \subset B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A^\circ) \wedge (y \in B^\circ) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in A^\circ \times B^\circ)\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}(x,y) \in \overline{(A \times B)} &\Leftrightarrow (\forall T \in \mathfrak{T})(\forall S \in \mathfrak{S})[(x,y) \in T \times S \Rightarrow \\ &\qquad (T \times S) \cap (A \times B) \neq \emptyset] \\ &\Leftrightarrow (\forall T \in \mathfrak{T})(x \in T \Rightarrow T \cap A \neq \emptyset) \wedge \\ &\qquad (\forall S \in \mathfrak{S})(y \in S \Rightarrow S \cap B \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (y \in \bar{B}) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \bar{A} \times \bar{B})\end{aligned}$$

   (c) Önceki eşitlikler ile 2.5.1 problemlerdeki ilgili bağıntıları kullanırsak

$$\begin{aligned}\partial(A \times B) &= \overline{(A \times B)} \cap \overline{(A \times B)'} \\ &= (\bar{A} \times \bar{B}) \cap ((A \times B)^o)' \\ &= (\bar{A} \times \bar{B}) \cap (A^o \times B^o)'\end{aligned}$$

   eşitliklerini yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned}(a,b) \in \partial(A \times B) &\Leftrightarrow [(a,b) \in (\bar{A} \times \bar{B})] \wedge [(a,b) \in (A^o \times B^o)'] \\ &\Leftrightarrow (a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B}) \wedge \\ &\qquad \left\{\begin{array}{l} a \in A^o \Rightarrow b \notin B^o \\ b \in B^o \Rightarrow a \notin A^o \\ (a \notin A^o) \wedge (b \notin B^o) \end{array}\right\}\end{aligned}$$

   olur. Burada {} içindeki üç satır $\vee$ ile birbirlerine bağlıdırlar. Şimdi her üç satır için olasılıkları inceleyelim:

i.

$$
\begin{aligned}
&[(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B})] \wedge [a \in A^o \Rightarrow b \notin B^o] \\
&\Rightarrow [(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \partial B) \\
&\Rightarrow (a, b) \in \bar{A} \times \partial B)
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
&[(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B})] \wedge [b \in B^o \Rightarrow a \notin A^o] \\
&\Rightarrow [(a \in \partial A) \wedge (b \in \bar{B}) \\
&\Rightarrow (a, b) \in \partial A \times \bar{B})
\end{aligned}
$$

iii.

$$
\begin{aligned}
&[(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B})] \wedge [(a \notin A^o) \wedge (b \notin B^o)] \\
&\Rightarrow [(a \in \partial A) \wedge (b \in \partial B)] \\
&\Rightarrow [(a \in \partial A) \wedge (b \in \bar{B})] \vee [(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \partial B)] \\
&\Rightarrow [(a, b) \in \bar{A} \times \partial B)] \vee [(a, b) \in \partial A \times \bar{B})]
\end{aligned}
$$

□

2. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ise $(X \times X, \mathscr{P})$ çarpım uzayında

$$\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$$

köşegeninin $(X, \mathscr{T})$ uzayına eşyapılı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathscr{P}$ nin Δ üzerine kondurduğu topolojiyi $\mathscr{P}_\Delta$ ile gösterelim. $\pi_1 : X \times X \to X$ izdüşüm fonksiyonu sürekli ve açık bir dönüşümdür. $\pi_1(\mathscr{P}) = \mathscr{T}$ dir. π_1 izdüşümünün Δ kümesine kısıtı da sürekli ve açık bir dönüşümdür. Ayrıca $(x, x) \to x$ dönüşümü Δ dan X üzerine bbö dir. Dolayısıyla, Önerme 6.3.1 uyarınca, π_1 izdüşümünün Δ kümesine kısıtı bir eşyapı dönüşümüdür (homeomorphism).

3. Bir $\{X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ topolojik uzaylar ailesi verilsin ve bunların çarpım uzayı $(X, \mathscr{P})$ olsun.

   (a) Eğer Λ sonlu yada sayılabilir sonsuz bir küme ise, çarpım uzayın *Birinci (ya da İkinci) Sayılabilme Aksiyomunu* sağlayabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, çarpan uzaylardan herbirisinin de bu aksiyomu sağlamasıdır.

   Çözüm:

   i. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlasınlar. Her birisinin sayılabilir bir tabanı var olacaktır. Bu tabanları $\mathscr{B}_\lambda$ ile gösterelim. (9.11) bağıntısı uyarınca, bunların π_λ^{-1} ters izdüşüm dönüşümleri altındaki resimlerinden oluşan

$$\mathfrak{S} = \{A : (\exists \lambda \in \Lambda)(\exists B \in \mathscr{B}_\lambda)\ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\} \tag{1}$$

   ailesi $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin bir alt-tabanıdır. Her $\lambda \in \Lambda$ için $\{(\exists B \in \mathscr{B}_\lambda)\ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\}$ ailesi sayılabilir sayıdadır. O halde, Λ sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir küme ise, $\mathfrak{S}$ ailesi en çok sayılabilir sayıda sayılabilir ailelerden oluşan bir ailedir. Dolayısıyla $\mathfrak{S}$ ailesi sayılabilir. Bu ailenin sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathscr{B}$ ailesi de sayılabilir sayıda olacaktır. Sözkonusu $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin bir tabanıdır. Bu taban sayılabilir olduğuna göre, $\mathscr{P}$ çarpım topolojisi İkinci sayılabilme aksiyomunu sağlar.

   ii. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlasınlar. Her $x \in X_\lambda$ için komşuluklar tabanını $\mathscr{B}_\lambda(x)$ ile gösterelim. Her $\lambda \in \Lambda$ ve her $x \in X_\lambda$ için $\mathscr{B}_\lambda(x)$ komşuluklar tabanı sayılabilir sayıda olacaktır. Her $\lambda \in \Lambda$ ve her $x \in X_\lambda$ için $\{(\exists B \in \mathscr{B}_\lambda(x)\ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\}$ ters resimleri sayılabilir sayıdadır. O halde,

$$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda^{-1}(B) \tag{2}$$

   yazılabilir. Açıkça görüldüğü gibi, (**??**) kartezyen çarpımının sayılabilir sayıda çarpanı vardır ve (x) noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır.

(b) Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme olsun. Çarpan uzayların herbirisinin *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağladığını varsayalım. Bu durumda, eğer çarpan uzayların sayılamaz sayıdası enaz ikişer öğeli ise, çarpan uzay *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlayamaz.

Çözüm: Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme ve çarpan uzayların sayılamaz sayıdası enaz ikişer öğeli ise

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(B),\ (\exists B \in \mathscr{B}_\lambda(x)\} \tag{3}$$

kartezyen çarpımının sayılamaz sonsuz sayıda çarpanı vardır. (**??**) ailesi, çarpım uzayda (x_λ) noktasının bir komşuluklar tabanıdır. Dolayısıyla her öğesi (x_λ) noktasının bir komşuluğudur. Bu noktanın başka bir $\mathscr{V}$ sayılabilir komşuluklar tabanı olduğunu varsayalım. (**??**) ailesine ait her U komşuluğu $\mathscr{V}$ tabanına ait bir V kümesini kapsar. Öyleyse $\mathscr{V}$ tabanı sayılabilir sayıda olamaz. Bu demektir ki, verilen varsayımlar altında, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı olamaz. Dolayısıyla çarpım uzay *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlamaz.

(c) Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme olsun. Çarpan uzayların herbirisinin *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağladığını varsayalım. Bu durumda, çarpım uzayın ikinci sayılabilme aksiyomunu sağlayabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, çarpan uzayların ancak sayılabilir sayıdasının ayrık olmayan topolojiden farklı bir topolojiye sahip olmasıdır.

Gösteriniz.

Çözüm: Çarpan uzayların sayılamaz sayıdasının ayrık olmayan topolojiden farklı olduğunu varsayalım. $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin (9.6) ile verilen (**??**) alt-tabanı sayılamaz sayıda sayılabilir ailenin ailesidir. Dolayısıyla sayılamaz çokluktadır. Bunların sonlu arakesitleri ailesi de sayılamaz çoklukta olacağından, çarpım uzay İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlamaz.

Eğer, $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ ayrık olmayan uzay ise, $(T \in \mathscr{T}_\lambda \Rightarrow T = X_\lambda)$ olduğundan,

$$\pi_\lambda^{-1}(T) = \pi_\lambda^{-1}(X_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

olur. Öyleyse, çarpan uzayların ancak sayılabilir sayıdası ayrık olmayan topolojiden farklı bir topolojiye sahip ise, (**??**) ailesi sayılabilir sayıda olacaktır.

4. Ayrık uzayların sonlu sayıdasının çarpımının da ayrık bir uzay olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(X_i, \mathscr{A}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ayrık topolojik uzayların çarpım uzayı $(X, \mathscr{P})$ olsun. Her $x_i \in X_i$ için tek öğeli $\{x_i\}$ kümesi $\mathscr{A}_i$ ayrık topolojisine göre açıktır. O halde,

$$(x_i)_{i=1}^n \in X = \prod_{i=1}^n X_i$$

için

$$\{x_1\} \times \{x_2\} \times \ldots \{x_n\} \in \mathscr{P}$$

dir. Başka bir deyişle, her $x \in X$ noktası çarpım topolojinin açık bir kümesidir. Dolayısıyla, $(X, \mathscr{P})$ ayrık bir uzaydır.

5. Ayrık uzayların sonsuz sayıdasının çarpımının da ayrık olması için, bu uzayların hemen hemen hepsinin tek öğeli olması gerektiğini gösteriniz.

Çözüm: Burada *hemen hemen hepsi* deyimi Ölçüm Kuramına ait standart bir deyimdir ve *"sayılabilir sayıdası hariç"* anlamındadır. Buna göre, problemi şöyle ifade edebiliriz:

Sayılamaz çoklukta ayrık uzayların çarpımının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul, uzayların sayılabilir sayıdası hariç, geri kalanların tek öğeli olmasıdır.

Verilen koşullar altında (**??**) ailesinin sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathscr{B}$ tabanı sayılabilir sayıdadır. Bir $(x_\lambda) \in \prod X_\lambda$ noktasını düşünelim. Bu noktanın $\mathscr{P}$ çarpım topolojisine göre açık olduğunu gösterirsek, istenen sonucu bulmuş oluruz. Tek öğeli olan kümeleri $\mathcal{M} = \{X_\mu : \mu \in M, X_\mu = \{x_\mu\}\}$ ile gösterelim. Birden çok öğesi olanları $\mathcal{N} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ile gösterelim.

$$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n \right) \times \left(\prod_{\mu \in M} X_\mu \right)$$

yazabiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X_n$ ve her $\mu \in M$ için $X_\mu = \{x_\mu\}$ olmak üzere X çarpım uzayında

$$\{x_1\} \times \{x_2\} \times \ldots \{x_n\} \times \ldots \times (\prod_{\mu \in M} \{x_\mu\}$$

kümesi açık bir kümedir (bkz **??**. Öte yandan bu küme, $\Lambda = \mathbb{N} \cup M$ olmak üzere $(x_\lambda) \in \prod X_\lambda$ noktasıdır. Böylece, çarpım uzaya ait her noktanın çarpım topolojisine göre açık olduğu görülür.