Kısım I

Çarpım ve Bölüm Uzayları

ÇARPIM UZAYLARI

1 ÇARPIM TOPOLOJİSİ

2 KARMA P R O B E M L E R

1. A ile B, sırasıyla, $(X, \mathscr{T})X$ ile $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzaylarının birer alt-kümesi olsunlar.

   (a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

   (b) $\overline{(A \times B)} = \bar{A} \times \bar{B}$

   (c) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$

   olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ uzayının bir tabanı $\mathfrak{T}$ ve $(Y, \mathscr{S})$ uzayının bir tabanı $\mathfrak{S}$ olsun.

   (a)

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in (A \times B)^o &\Leftrightarrow (\exists T \in \mathfrak{T})(\exists S \in \mathfrak{S})[(x, y) \in T \times S \subset A \times B] \\
&\Leftrightarrow (x \in T \subset A) \wedge (y \in S \subset B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A^\circ) \wedge (y \in B^\circ) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in A^\circ \times B^\circ)
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in \overline{(A \times B)} &\Leftrightarrow (\forall T \in \mathfrak{T})(\forall S \in \mathfrak{S})[(x, y) \in T \times S \Rightarrow \\
&\qquad (T \times S) \cap (A \times B) \neq \emptyset] \\
&\Leftrightarrow (\forall T \in \mathfrak{T})(x \in T \Rightarrow T \cap A \neq \emptyset) \wedge \\
&\qquad (\forall S \in \mathfrak{S})(y \in S \Rightarrow S \cap B \neq \emptyset) \\
&\Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (y \in \bar{B}) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in \bar{A} \times \bar{B})
\end{aligned}
$$

   (c) Önceki eşitlikler ile 2.5.1 problemlerdeki ilgili bağıntıları kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\partial(A \times B) &= \overline{(A \times B)} \cap \overline{(A \times B)'} \\
&= (\bar{A} \times \bar{B}) \cap ((A \times B)^o)' \\
&= (\bar{A} \times \bar{B}) \cap (A^o \times B^o)'
\end{aligned}
$$

   eşitliklerini yazabiliriz. Buradan,

$$
\begin{aligned}
(a, b) \in \partial(A \times B) &\Leftrightarrow [(a, b) \in (\bar{A} \times \bar{B})] \wedge [(a, b) \in (A^o \times B^o)'] \\
&\Leftrightarrow (a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B}) \wedge \\
&\qquad \left\{ \begin{array}{l} a \in A^o \Rightarrow b \notin B^o \\ b \in B^o \Rightarrow a \notin A^o \\ (a \notin A^o) \wedge (b \notin B^o) \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

   olur. Burada {} içindeki üç satır $\vee$ ile birbirlerine bağlıdırlar. Şimdi her üç satır için olasılıkları inceleyelim:

i.

$$[(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B})] \wedge [a \in A^o \Rightarrow b \notin B^o]$$
$$\Rightarrow [(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \partial B)$$
$$\Rightarrow (a, b) \in \bar{A} \times \partial B)$$

ii.

$$[(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B})] \wedge [b \in B^o \Rightarrow a \notin A^o]$$
$$\Rightarrow [(a \in \partial A) \wedge (b \in \bar{B})$$
$$\Rightarrow (a, b) \in \partial A \times \bar{B})$$

iii.

$$[(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B})] \wedge [(a \notin A^o) \wedge (b \notin B^o)]$$
$$\Rightarrow [(a \in \partial A) \wedge (b \in \partial B)]$$
$$\Rightarrow [(a \in \partial A) \wedge (b \in \bar{B})] \vee [(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \partial B)]$$
$$\Rightarrow [(a, b) \in \bar{A} \times \partial B)] \vee [(a, b) \in \partial A \times \bar{B})]$$

□

2. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ise $(X \times X, \mathscr{P})$ çarpım uzayında

$$\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$$

köşegeninin $(X, \mathscr{T})$ uzayına eşyapılı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathscr{P}$ nin Δ üzerine kondurduğu topolojiyi $\mathscr{P}_\Delta$ ile gösterelim. $\pi_1 : X \times X \to X$ izdüşüm fonksiyonu sürekli ve açık bir dönüşümdür. $\pi_1(\mathscr{P}) = \mathscr{T}$ dir. π_1 izdüşümünün Δ kümesine kısıtı da sürekli ve açık bir dönüşümdür. Ayrıca $(x, x) \to x$ dönüşümü Δ dan X üzerine bbö dir. Dolayısıyla, Önerme 6.3.1 uyarınca, π_1 izdüşümünün Δ kümesine kısıtı bir eşyapı dönüşümüdür (homeomorphism).

3. Bir $\{X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ topolojik uzaylar ailesi verilsin ve bunların çarpım uzayı $(X, \mathscr{P})$ olsun.

   (a) Eğer Λ sonlu yada sayılabilir sonsuz bir küme ise, çarpım uzayın *Birinci (ya da İkinci) Sayılabilme Aksiyomunu* sağlayabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, çarpan uzaylardan herbirisinin de bu aksiyomu sağlamasıdır.

   Çözüm:

   i. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlasınlar. Her birisinin sayılabilir bir tabanı var olacaktır. Bu tabanları $\mathscr{B}_\lambda$ ile gösterelim. (9.11) bağıntısı uyarınca, bunların π_λ^{-1} ters izdüşüm dönüşümleri altındaki resimlerinden oluşan

   $$\mathfrak{S} = \{A : (\exists \lambda \in \Lambda)(\exists B \in \mathscr{B}_\lambda)\ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\} \tag{1}$$

   ailesi $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin bir alt-tabanıdır. Her $\lambda \in \Lambda$ için $\{(\exists B \in \mathscr{B}_\lambda)\ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\}$ ailesi sayılabilir sayıdadır. O halde, Λ sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir küme ise, $\mathfrak{S}$ ailesi en çok sayılabilir sayıda sayılabilir ailelerden oluşan bir ailedir. Dolayısıyla $\mathfrak{S}$ ailesi sayılabilir. Bu ailenin sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathscr{B}$ ailesi de sayılabilir sayıda olacaktır. Sözkonusu $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin bir tabanıdır. Bu taban sayılabilir olduğuna göre, $\mathscr{P}$ çarpım topolojisi İkinci sayılabilme aksiyomunu sağlar.

   ii. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlasınlar. Her $x \in X_\lambda$ için komşuluklar tabanını $\mathscr{B}_\lambda(x)$ ile gösterelim. Her $\lambda \in \Lambda$ ve her $x \in X_\lambda$ için $\mathscr{B}_\lambda(x)$ komşuluklar tabanı sayılabilir sayıda olacaktır. Her $\lambda \in \Lambda$ ve her $x \in X_\lambda$ için $\{(\exists B \in \mathscr{B}_\lambda(x)\ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\}$ ters resimleri sayılabilir sayıdadır. O halde,

   $$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda^{-1}(B) \tag{2}$$

   yazılabilir. Açıkça görüldüğü gibi, (2) kartezyen çarpımının sayılabilir sayıda çarpanı vardır ve (x) noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır.

(b) Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme olsun. Çarpan uzayların herbirisinin *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağladığını varsayalım. Bu durumda, eğer çarpan uzayların sayılamaz sayıdası enaz ikişer öğeli ise, çarpan uzay *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlayamaz.

Çözüm: Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme ve çarpan uzayların sayılamaz sayıdası enaz ikişer öğeli ise

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(B),\ (\exists B \in \mathscr{B}_\lambda(x)\} \tag{3}$$

kartezyen çarpımının sayılamaz sonsuz sayıda çarpanı vardır. (3) ailesi, çarpım uzayda (x_λ) noktasının bir komşuluklar tabanıdır. Dolayısıyla her öğesi (x_λ) noktasının bir komşuluğudur. Bu noktanın başka bir $\mathscr{V}$ sayılabilir komşuluklar tabanı olduğunu varsayalım. (3) ailesine ait her U komşuluğu $\mathscr{V}$ tabanına ait bir V kümesini kapsar. Öyleyse $\mathscr{V}$ tabanı sayılabilir sayıda olamaz. Bu demektir ki, verilen varsayımlar altında, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı olamaz. Dolayısıyla çarpım uzay *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlamaz.

(c) Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme olsun. Çarpan uzayların herbirisinin *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağladığını varsayalım. Bu durumda, çarpım uzayın ikinci sayılabilme aksiyomunu sağlayabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, çarpan uzayların ancak sayılabilir sayıdasının ayrık olmayan topolojiden farklı bir topolojiye sahip olmasıdır.

Gösteriniz.

Çözüm: Çarpan uzayların sayılamaz sayıdasının ayrık olmayan topolojiden farklı olduğunu varsayalım. $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin (9.6) ile verilen (1) alt-tabanı sayılamaz sayıda sayılabilir ailenin ailesidir. Dolayısıyla sayılamaz çokluktadır. Bunların sonlu arakesitleri ailesi de sayılamaz çoklukta olacağından, çarpım uzay İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlamaz.

Eğer, $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ ayrık olmayan uzay ise, $(T \in \mathscr{T}_\lambda \Rightarrow T = X_\lambda)$ olduğundan,

$$\pi_\lambda^{-1}(T) = \pi_\lambda^{-1}(X_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

olur. Öyleyse, çarpan uzayların ancak sayılabilir sayıdası ayrık olmayan topolojiden farklı bir topolojiye sahip ise, (1) ailesi sayılabilir sayıda olacaktır.

4. Ayrık uzayların sonlu sayıdasının çarpımının da ayrık bir uzay olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(X_i, \mathscr{A}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ayrık topolojik uzayların çarpım uzayı $(X, \mathscr{P})$ olsun. Her $x_i \in X_i$ için tek öğeli $\{x_i\}$ kümesi $\mathscr{A}_i$ ayrık topolojisine göre açıktır. O halde,

$$(x_i)_{i=1}^n \in X = \prod_{i=1}^n X_i$$

için

$$\{x_1\} \times \{x_2\} \times \ldots \{x_n\} \in \mathscr{P}$$

dir. Başka bir deyişle, her $x \in X$ noktası çarpım topolojinin açık bir kümesidir. Dolayısıyla, $(X, \mathscr{P})$ ayrık bir uzaydır.

5. Ayrık uzayların sonsuz sayıdasının çarpımının da ayrık olması için, bu uzayların hemen hemen hepsinin tek öğeli olması gerektiğini gösteriniz.

Çözüm: Burada *hemen hemen hepsi* deyimi Ölçüm Kuramına ait standart bir deyimdir ve *"sayılabilir sayıdası hariç"* anlamındadır. Buna göre, problemi şöyle ifade edebiliriz:

Sayılamaz çoklukta ayrık uzayların çarpımının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul, uzayların sayılabilir sayıdası hariç, geri kalanların tek öğeli olmasıdır.

Verilen koşullar altında (1) ailesinin sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathscr{B}$ tabanı sayılabilir sayıdadır. Bir $(x_\lambda) \in \prod X_\lambda$ noktasını düşünelim. Bu noktanın $\mathscr{P}$ çarpım topolojisine göre açık olduğunu gösterirsek, istenen sonucu bulmuş oluruz. Tek öğeli olan kümeleri $\mathcal{M} = \{X_\mu : \mu \in M, X_\mu = \{x_\mu\}\}$ ile gösterelim. Birden çok öğesi olanları $\mathcal{N} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ile gösterelim.

$$X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n\right) \times \left(\prod_{\mu\in M} X_\mu\right)$$

yazabiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X_n$ ve her $\mu \in M$ için $X_\mu = \{x_\mu\}$ olmak üzere X çarpım uzayında

$$\{x_1\} \times \{x_2\} \times \ldots \{x_n\} \times \ldots \times (\prod_{\mu\in M} \{x_\mu\}$$

kümesi açık bir kümedir (bkz **??**. Öte yandan bu küme, $\Lambda = \mathbb{N} \cup M$ olmak üzere $(x_\lambda) \in \prod X_\lambda$ noktasıdır. Böylece, çarpım uzaya ait her noktanın çarpım topolojisine göre açık olduğu görülür.

2.1 09. Bölüm İçin Ek Problemler

1. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları verilsin. Bunların çarpım uzayı $(X, \mathscr{T})$ olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda \subset X_\lambda$ alt kümesi veriliyor. $\prod A_\lambda \subset \prod X_\lambda$ alt-kümesi için aşağıdaki bağıntının sağlandığını gösteriniz.

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o \subset \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^o \tag{4}$$

Çözüm: Çözümü iki farklı durum için ayrı ayrı yapacağız.

1.Durum: Sonsuz sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ olsun.

Her $\lambda \in \Lambda$ için A_λ^o kümesi $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ uzayında açıktır. Ancak,

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o \tag{5}$$

kartezyen çarpımı $(X, \mathscr{T})$ çarpım uzayında açık olamaz. Çünkü, sonsuz sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ ise, (**??**) kartezyen çarpımı

$$\pi_\imath^{-1}(T_\imath) = T_\imath \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \in \Lambda, \lambda \neq \imath, T\imath \in \mathscr{T}\imath\} \tag{6}$$

biçimindeki alt-tabana ait hiç bir kümeyi kapsayamaz. Öte yandan, her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda^o \subset A_\lambda$ olduğundan

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \tag{7}$$

kapsama bağıntısı vardır. Bu kapsamanın iki yanının içlemleri alınırsa

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o\right)^o \subset \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^o \tag{8}$$

olacaktır. Gene aynı düşünüşle, sonsuz sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ ise, bu kapsamanın sağ ve sol yanları, alt-tabana ait (**??**) tipindeki hiç bir küme içeremezler. O halde her iki içlem boş olmalıdır. Dolayısıyla, $\emptyset \subset \emptyset$ uyarınca (**??**) sağlanır.

2.Durum: Yalnızca sonlu sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ olsun.

Sonlu sayıda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümesi dışında kalan bütün $A\mu$ kümeleri için $A_\mu = X_\mu$ $(\mu \neq 1, 2, \ldots, n)$ olacaktır. Bu durumda (**??**) kartezyen çarpımı, çarpım uzayın tabanına ait kümeler içerir. Örneğin, $T_i \subset A_i^o$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olacak şekilde $T_i \in \mathscr{T}_i$ açık kümeleri için

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(T_i) &= \bigcap_{i=1}^{n} \Big(T_i \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1, 2, \ldots, n\}\Big) \\
&= T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1, 2, \ldots, n\} \\
&\subset A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1, 2, \ldots, n\} \qquad (9)
\end{aligned}$$

olacaktır. Bu durumda (**??**) bağıntısının sol yanı

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o\right)^o &= \Big(A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1, 2, \ldots, n\}\Big)^o \\
&= (A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o)^o \times \Big(\prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1, 2, \ldots, n\}\Big)^o \qquad (10) \\
&= (A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o) \times \Big(\prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1, 2, \ldots, n\}\Big) \\
&= \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o \qquad (11)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi (**??**) den hareketle,

$$\begin{aligned}\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o &= (A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o)^o \times \Big(\prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1,2,\ldots,n\}\Big)^o \\ &\subset (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)^o \times \Big(\prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1,2,\ldots,n\}\Big)^o \\ &= \Big(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1,2,\ldots,n\}\Big)^o \\ &= \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^o \qquad (12)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (**??**) sağlanır.

2. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları verilsin. Bunların çarpım uzayı $(X, \mathscr{T})$ olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda \subset X_\lambda$ alt kümesi veriliyor. $\prod A_\lambda \subset \prod X_\lambda$ alt-kümesi için aşağıdaki bağıntının sağlandığını gösteriniz.

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda} \subset \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \qquad (13)$$

Çözüm: Bunun çözümü yukarıdakine benzer bir düşünüşle yapılabilir. Çözümü gene iki farklı durum için ayrı ayrı yapacağız.

1.Durum: Sonsuz sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ olsun. Bu durumda, X çarpım uzayında

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \qquad (14)$$

kümesini kapsayan kapalı has bir alt küme olamaz. (**??**) kartezyen çarpımını kapsayan tek kapalı küme çarpım uzayın kendisidir. Öyleyse, kaplama tanımı uyarınca

$$\overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = X \qquad (15)$$

olur. X çarpım uzayı bütün alt-kümelerini kapsadığına göre, (**??**) sağlanır.

2.Durum: Yalnızca sonlu sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ olsun. $\mu \in \Lambda$, $\mu \neq 1,2,\ldots,n$ olmak üzere, $A\mu = \overline{A_\mu} = X_\mu$ olduğundan

$$\begin{aligned}\overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} &= \overline{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times \prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu} \\ &= \overline{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)} \times \overline{\prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu} \\ &= (\overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \ldots \times \overline{A_n}) \times \overline{\prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu} \\ &= (\overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \ldots \times \overline{A_n}) \times \left(\prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu\right) \\ &= \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda} \qquad (16)\end{aligned}$$

çıkar. Dolayısıyla (**??**) sağlanır.

3. Box Topoloji: $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları verilsin. Bunların açık kümelerinin kartezyen çarpımları $X = \prod\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde bir topoloji üretir. Başka bir deyişle, her ($\lambda \in \Lambda$ için $T_\lambda \in \mathscr{T}_\lambda$) açık kümelerinin kartezyen çarpımlarından oluşan

$$\mathscr{G} = \left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda : \lambda \in \Lambda,\ T_\lambda \in \mathscr{T}_\lambda\right\} \qquad (17)$$

ailesi X çarpım kümesi üzerinde bir topoloji tabanıdır. Gösteriniz.

Not: (**??**) ile tanımlanan topolojiye X çarpım kümesi üzerindeki box topoloji denilir. Çarpan kümelerin sayısı sonsuz olduğunda, box topoloji çarpım topolojisinden daha incedir. Çarpan kümelerin sayısı sonlu olduğunda box topoloji ile çarpım topolojisi eşit olurlar. Çarpım topolojisi, izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topoloji olduğu için, genellikle, box topolojiye göre daha kullanışlıdır.

Çözüm: $\mathscr{G}$ ailesinin 4.1.3.Önermenin koşullarını sağlandığını göstermeliyiz.

(a) $X = \bigcup \mathscr{G}$ olduğu apaçıktır.

(b) Her $A, B \in \mathscr{G}$ ve her $(x_\lambda) = x \in A \cap B$ için $x \in C \subset A \cap B$ olacak biçimde bir $C \in \mathscr{G}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$A = \prod \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ A_\lambda \in \mathscr{T}_\lambda\} \tag{18}$$

$$B = \prod \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ B_\lambda \in \mathscr{T}_\lambda\} \tag{19}$$

olacak biçimde $\{A_\lambda, B_\lambda\}$ açık kümeleri vardır. Her $\lambda \in \Lambda$ için $\mathscr{T}_\lambda$ topoloji olduğundan her $x_\lambda \in A_\lambda \cap B_\lambda$ için $x_\lambda \in C_\lambda \subset A_\lambda \cap B_\lambda$ olacağı açıktır. Örneğin $C_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$ alınabilir. $C = \prod C_\lambda$ dersek, istenen özelik elde edilir.

4. (**??**) tabanı tarafından üretilen topoloji, çarpım topolojisinden daha incedir. Gösteriniz. Eşitliğin olmadığına bir örnek veriniz.

Çözüm: Çarpım topolojisinin bir tabanı (**??**) tipindeki kümelerin sonlu arakesitlerinden oluşan ailedir; yani

$$T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n) \times \prod_{\mu \in \Lambda} \{X_\mu : \mu \in \Lambda, \mu \neq 1, 2, \ldots, n\}$$

biçimindeki kümelerden oluşan $\mathscr{B}$ ailesidir. Bu aileden seçilecek her küme (**??**) tipinden bir kümeyi kapsar. $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ olduğundan $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{G}^*$ olacağı açıktır.

Eşitliğin olmadığını görmek için, sonsuz tane $(0,1)$ açık aralığının

$$(0,1) \times (0,1) \times \ldots \times (0,1) \times \ldots$$

kartezyen çarpımını düşünelim. Bu kartezyen çarpım box topolojide açık bir kümedir, ama çarpım uzayda açık değildir.