

## SONSUZ KAVRAMI NEDEN GEREKLİDİR? ZENO'NUN KAPLUMBAĞASI

Timur Karaçay

[tkaracay@baskent.edu.tr](mailto:tkaracay@baskent.edu.tr)

Eski Yunan düşünürü Zeno (M.Ö. 490-435), hızlı bir koşucunun bir kaplumbağaya, hiçbir zaman yetişemeyeceğini savunur ve der ki, herhangi bir zamanda A noktasındaki koşucu ile B noktasındaki kaplumbağa aynı doğrultuda yarışa başlasınlar. Koşucu A noktasından B noktasına yetişene kadar, kaplumbağa B den ilerideki bir B' noktasına varacaktır. Bu yeni konumda, koşucu A' = B noktasında ve kaplumbağa ise B' noktasındadır. Koşucu A' den B' ye gelene kadar, kaplumbağa B' den bir B'' noktasına gelecektir. İkisi arasındaki uzaklık ne kadar kısa olursa olsun, kaplumbağa yarışa devam ettiği sürece, yukarıdaki durum her defasında yeniden tekrar edeceğinden, koşucu, kaplumbağaya hiçbir zaman yetişemeyecektir.

Zeno'nun düşüncesi mantık açısından doğrudur. Ama, herkes biliyor ki, bir kaplumbağayı geçmek için yarışçı olmaya bile gerek yoktur. Öyleyse bu çelişki nereden geliyor ?

### HAREKET YOK MU ?

Yukarıdakine benzer olarak, Zeno, hareketin olanaksızlığını savunur ve der ki;

*"Atılan bir ok hiçbir zaman hedefine varamaz . Çünkü, hedefe varabilmesi için önce ilk yarı yolu aşması gerekir. İlk yarı yolu aşması için önce onun ilk yarısını aşması gerekir. İlk yarının ilk yarısını da aşması için önce onun da ilk yarısını aşması gerekir... Ne kadar küçülürse küçülsün bu- ilk yarı yollar durmadan ortaya çıkacaktır. Öyleyse bu ok hedefine varamayacaktır."*

Zeno'nun bu düşüncesi de mantık açısından doğrudur. Ama, yine herkes biliyor ki, atılan ok bir hedefe varır. Öyleyse bu çelişki nereden geliyor?

### Matematiğin En Büyük Devrimi: Sonsuzluk

Yukarıdaki örneklere benzer çelişkiler, bir bütünün istenildiği kadar küçük parçalara ayrılamayacağı görüşüne gidebilir. Nitekim, Zeno'nun her iki örneğinde "zaman" ya da "uzaklık" kavramlarının sonlu ötesi küçük parçalara ayrılması çelişkiyi yaratmaktadır. Oysa, sonsuz serilerin yakınsaklığı kavramı bilinince Zeno'nun doğru düşüncesinden hareketle onun vardığı yanlış hükme varılmayacağını bugün çok iyi biliyoruz. Ama, eski çağ düşünürleri benzer çelişkilerden sakınmak için, yüzyıllar boyunca, "sonsuz" kavramını konu dışı tutmuşlardır. Onlara göre, örneğin, bir daireyi iki eşit parçaya, bölmek olanaksızdır. Çünkü, dairenin merkezi parçalardan ancak birisine ait olacağından eşitlik bozulacaktır.

17. yüzyılda, matematik analizin bir aracı olarak "sonsuz küçük" ve "sonsuz büyük" kavramları geniş ölçüde kullanılmaya başlandı. Bu tür gizil (potansiyel) sonsuzluk kavramı güvenle kullanılırken, "sonsuz öğeli küme" kavramı taa 19. yüzyılın ortalarına dek dokunulmaz (tabu) bir kavram olarak kaldı. Bu tarihlerde, Çek bilgini **B. Bolzano**, sonsuz kümelerle ilk el atan matematikçi olmuştur. Daha sonra, Alman matematikçisi **George Cantor** (1845-1918) sonsuz kümeler kuramını mükemmel bir biçimde kurmuştur. Sonlu kümelerin özellikleri o zamanlar zaten biliniyordu. **Cantor**, sonsuz kümelerin sonlu kümelerden çok farklı ve o zaman için olağan dışı sayılan özelliklere sahip olduğunu ortaya koydu. Bu özellikleri ileride ayrıntılarıyla inceleyeceğiz. Ama, sonlu kümelerle sonsuz kümeler arasındaki belirtken farkı ortaya koymak

için, şu soruyu soralım:

"Bir bütün bir parçasına eşgüçlü olabilir mi?"

Küme sonlu ise, bildiğimiz gibi bu sorunun cevabı 'hayır' olacaktır. Ama, küme sonsuz ise, cevabımız 'evet' olacaktır. Bunun nedenini ileride göreceğiz.

### Stanislaw Lem ' den bir Öykü

Aşağıdaki öykü Polonyalı fantezist Stanislaw Lem'den alınmıştır. Yazarın, sonsuz kavramını bu denli güzel anlatımına, doğrusu ya, bizim ekleyeceğimiz bir şey kalmadı.

### OLAĞANÜSTÜ OTEL

Eve oldukça geç döndüm. Andromedalılar kulübündeki toplantı gece yarısından çok sonraya dek uzamıştı. Bütün gece kâbus gördüm: Önceleri dev yaratıklarla uğraştım. Sonra da kendimi yeniden Durtitov gezegeninde buldum. Üstelik, o makinadan, hani o insanı altıgene çeviren ve bir daha da düzeltmeyen o korkunç makinadan nasıl korunacağımı da bilemiyordum... Neyse ki hesapta olmayan bir telefonla uyanarak kâbuslarımdan sıyrıldım. Hattın öbür ucunda eski dostum ve yıldızlar arası seyahat arkadaşım Profesör Tarantog vardı. Sesinden, gene üstesinden gelemediği bir işle karşılaştığı belliydi. Hemen konuyu açtı:

"Dostum Mülâyim, ilginç bir problemle karşı karşıyayız. Astronomlar bir galaksi boyunca uzanan kara bir bant keşfettiler. Ne olduğunu kimse bilemiyor. En iyi teleskopları ve radyo teleskopları takıp gönderdiğimiz roketler bile bu esrarengiz nesneyi anlayamadan döndüler. Saatlerdir bu işle uğraşyoruz. Artık başka yollardan umudu kestik. Hemen ACD -1587 takım yıldızına doğru yola çıkmaya hazırlan!"

Ertesi gün emektar foton roketimi tamirciden çektim. Yolculuk için gerekli her şeyi içine yerleştirdim. Özellikle, yıldızlar arası bütün dilleri ve en güzel öyküleri bilen elektronik robotumu unutmamaya dikkat ettim. Gideceğim yerde, onuz hiç kimseyle konuşamayacağım gibi, bu uzun yolculukta heran gönlümün dilediği türden öyküler anlatmasa, can sıkıntısından ölebilirim. Robotum enaz beş yıllık bir yolculuğa yetecek kadar öykü bilmektedir.

Yola çıktım.

Her zaman olduğu gibi, önceleri yolculuğum çok iyi geçiyordu. Hatta, dostum Tarantog'un verdiği bu iş'ten memnun bile olmuştum. Ama roketimin zaman ayarındaki bir bozukluk nedeniyle, yolculuk umduğumdan daha çok sürdü. Dönüşte, ya tamircimi değiştireceğim ya da roketimi... Zavallı robotum, ben sıkılmayayım diye enaz on kez devrettiği öyküler arasından, o an için hoşlanabileceklerimi bir daha seçmeye uğraşıyordu. (Bir elektronik robottan bir öyküyü on kez dinlemekten daha berbat bir şey olamayacağını ona ne diye öğretmemişler sanki!) Neyse ki sonunda hedefimiz uzaktan göründü. Galaksiye yaklaştıkça, ne olduğunu dünyadan anlayamadığımız o kara bantın hemen hemen her burçta kurulan heyulâ' birer yapı olduğunu gördüm. Uzaktan bakınca, biz, bu yapıları galaksiyi boydan boya aşan kara bir bant olarak görmüştük.

Bu yapılardan çoğunu geride bırakarak galaksinin merkezine ilerledim ve bu heyulâ yapılardan biri olan Kozmoz oteline indim.

Bir zamanlar bu galakside görevliydim. O zamanlar gezginlerin sığınacağı küçük peykler yaptırılmıştı. Ancak, zamanla gezginlerin sayısı çok arttığından, galakside peyk trafiği tehlikeli

bir hal almış. Üstelik gelişen evrende bu peykler oldukça ilkel sayılmaya başlanmış. Bunun üzerine, peykleri toplayıp onların yerine, hemen hemen her bir burçta sonsuz odalı birer otel yapmaya karar vermişler. Hemen her burçta diyorum, çünkü inşaat sırasında; galaksideki canlıları biraraya topladıkları bir kaç milyon burç hariç, ötekilerin (ki sonsuz sayıdadır) herbirisine bir otel kurmuşlar. Böylece sonsuz odalı bu oteller, hem buldukları burcun bölgesindeki bütün yıldızlara hem de başka galaksilerden o yıldızlara gelecek gezginlere yetsin diye düşünülmüş. Yapı malzemesi olarak, galaksiye ait yıldızlardan uygun maddeler taşınmış.

Gerçekten oteller harika. Sonsuz odalı Kozmoz otelinin herbir odasında, her hangi bir galaksiden gelecek müşterinin yaşam koşullarına ayarlanabilecek her türlü konfor var. Odayı istediğiniz gazla doldurabilir, istediğiniz sıcaklığa ayarlayabilirsiniz. Musluklardan isterseniz sıcak ya da soğuk su, isterseniz istediğiniz kıvamda plazma akar. Dilerseniz, gece sizi atomlarınıza ayırırlar, sabahleyin yeniden birleştirirler. Doğrusu ya, bu galakside uygarlık bizimkinden daha ileride. Bizimkilerin, bu gidişle; kalkınma hızını yeniden ayarlamaları gerekecek.

Bütün bunlara karşın otele indiğimde pek talihli sayılmazdım. Otel yeni açılmıştı. Personel henüz işlere iyice alışmamıştı. Üstelik Uzay Zoologları Kongresi burada toplanmıştı. Öteki bütün galaksilerden gelen zoologlar otele benden önce inmişlerdi. Sonsuz çokluktaki bu galaksilerden gelen bu müşteriler, sonsuz odalı Kozmoz otelini çoktan doldurmuşlardı bile...

Roketim bakım görmeden ve ben de iyice dinlenmeden ne dünyaya dönebilirdim ne de bir başka burçta boş otel aramak için yola çıkabilirdim. Otel kâtibini halden anladım. Önce, telefonla odaları arayarak, odasını benimle paylaşacak bir zoolog aradı. Sonunda buldu; hem de iki centilmen. Ne yazık ki bu centilmenlerden birisi odasını flüor gazı ile doldurmuştu, ötekinin de 8600 C de uyuması gerekiyordu. Nazik kabulleri için her ikisine de ayrı ayrı teşekkür ederek, yine kâtibin yanına döndüm. Katip bu kez otel müdürüne çıktı. Adımı duyan müdür koşarak yanıma geldi. Mutlu bir tesadüf, kendisi buradaki eski dostlarımdan birisiydi. Hemen katibe emretti :

"Konuğumuzu 1 Nolu odaya al."

Katip biraz şaşkın cevap verdi :

"Peki ama 1 Nolu odadaki müşteriyi ne yapayım?"

"1 dekini 2 ye, 2 dekini 3 e, 3 dekini 4 e al. Böylece bütün müşterileri birer numara geriye kaydır."

Bu cevaptan sonra, otelin olağanüstü bir özeliğini anlamıştım. Eğer sonulu sayıda oda olsaydı, her müşteri bir geriye kayınca, en son odadaki müşteriye yer kalmazdı. Ama oda sayısı sonsuz olduğu için, hiçbir müşteriyi otelden çıkarmadan, herkesi birer geriye kaydırmak mümkündü.

Ertesi gün 1000 000 Nolu odaya geçmem rica edilince hiç şaşırmadım. Zira VSK - 3472 numaralı galaksiden gelen zoologlar benden sonra yetişmişlerdi, dolayısıyla, otel müdürü bu gruba dahil 999 999 yeni müşteriye yer açıyordu.

Ertesi gün hesabı ödemek üzere aşağıya indiğimde, katibi çok telaşlı gördüm. Holdeki kayıt bürosunun önünde kuyruğa girmiş olan bir kalabalıktan gürültüler geliyordu :

"Andromeda'dan iki pulum var. Sirius'dan iki pul ile değiştirmek istiyorum..."

"Erpean'dan 57 nci uzay yılına ait bir pul arıyorum..."

Katibe,

"Bunlar da kim ?"

diye sordum.

"Yıldızlar arası kuşseverler kongresi delegeleridir."

diye cevap verdi.

"Çok kalabalık mıdırlar?"

"Hem de nasıl !.. Sonsuz çoklukta ... Herbir galaksiden bir delege var."

O an pencereden dışarıya baktım. Holdeki kuyruk, dışarıda da taa Macellan bulutuna doğru uzayıp gidiyordu.

"Peki ama bunlara nasıl yer bulacaksınız şimdi! Üstelik zoologlar yarına kadar otelden ayrılmayacaklar..."

dedim.

"Doğrusu ben de bilmiyordum. Zaten şimdi durumu müdüre anlatmaya gidiyordum. Lütfen beni birkaç dakika bekleyiniz."

diyerek katip odadan çıktı.

Görünüşe bakılırsa bu kez problem daha zor çözülmüştü. Katibin birkaç dakikası bir saati çoktan aşmıştı ki, yorgun ama memnun bir yüzle odasına döndü. Benim varlığımı bile unutarak, adamlarına buyruk vermeye başladı :

"1 numaradakini 2 numaraya..."

diye söze başladı. Ben o an neredeyse içimden kıs kıs gülmeye başlayacaktım. Çünkü bu yöntemi benim için uygulamışlardı ve biliyordum ki bu iş ancak sonlu sayıda yeni müşteriye yer açabilirdi. Oysa bunların kapısında sonsuz çoklukta müşteri kuyrukta bekliyordu. Ama katip sözünü,

"2 numaradakini 4 numaraya, 3 numaradakini 6 numaraya; genel olarak n numaradakini 2n numaraya yerleştiriniz."

diye bitirince, sorunu gerçekten çözdüklerini anladım. Bu yöntemle sonsuz çoklukta olan bütün tek numaralı odaları boşaltabiliyorlardı. Artık, bunlara kuşseverleri yerleştirebileceklerdi. Böylece çift numaralı odalar uzay zoologları ve tek numaralı odalar da uzay kuşseverleri tarafından işgal edilmiş olacaktı.

Roketimin bakımı yapılmış, geri dönüş için herşey hazırды. Ama Kozmoz otelinin konforu ve uzay zoologları ile kurduğum içten dostluklardan daha çok, bu otelin şimdi karşılaştığım bu ikinci olağanüstü özeliği beni dönüş kararımdan vaz geçirdi. Biraz daha kalırsam, belki Kozmoz otelinin başka olağanüstü özelliklerini daha öğrenebilirdim. Gecikeceğim için dostum Tarantog'un canı sıkılsa bile, bu merakımı yenemeyecektim. Sonunda ben de bütün zoologlar gibi odamı değiştirdim ve 1000 000 numaralı odadan çıkıp 2 000 000 numaralı odaya yerleştim. Bu arada, Samanyolu'dan gelen ve kuyrukta 574 üncü sırada yer alan kuşsever bir arkadaşım 1147 numaralı odaya yerleşmişti. Genel bir kural diye söylersek, kuşseverlerin meydana getirdiği kuyrukta n-inci sırada yer alan bir müşteri 2n-1 numaralı odaya yerleşmişti. Ertesi gün zoologların kongresi bitip herbiri kendi yurduna dönünce otelde bir ferahlama- sezildi. Bu arada otel müdürü arkadaşım, beni, kendisine ayrılan lojmandaki boş bir odaya yerleştirmek nezaketinde bulundu. Otelin yarısı boşaldığı için müşteriler kadar otel personeli de memnun görünüyordu. Ama onları memnun eden bu işin otel müdürünü memnun etmediği anlaşılıyordu :

"Otelin yarısı boşaldı. Bu gidişle işletmemiz zarara girecek!..."

diye dertlendi. Gerçekte, sonsuz müşterisi olan bir otelin nasıl olup da zarar edebileceğini anlayamadım. Ama konuşmuş olmak için,

"Öyleyse müşterilerini tekrar sıklaştır; zoologlarda olduğu gibi otel yeniden dolsun." dedim.

"Hay allah, bunu neden düşünemedim şimdiye dek?"

diye hayıflandı. Hemen telefona sarılarak katibe ne yapacağını anlattı. Zaten bu kez problem kolaydı. Kuşseverler 1, 3, 5, 7, ...  $2n-1$ , ... gibi tek numaralı odaları doldurmuşlardı. Öyleyse, 1 numaradakinin yerinde bırakarak, 3 numaradakinin 2 numaraya, 5 numaradakinin 3 numaraya; genel olarak,  $2n-1$  numaradakinin  $n$  numaraya yerleştirmek yetecekti. Böylece, yarısı boş olan otel hiçbir yeni müşteri gelmediği halde, mevcut müşterilerle otel yeniden doldurulmuştu.

Yazık ki bu sorunun çözümüyle müdürün sevinci uzun sürmedi. Galakside hemen her burçta kurulan herbiri sonsuz odalı sonsuz çoklukta otellerin hemen boşaltılması buyruğu gelmişti. Otellerin inşaatı sırasında öteki yıldızlardan taşınan yapı malzemeleri nedeniyle galaksi içi yıldızlar arası çekim dengesinin bozulduğu saptanmıştı. Bunun ileride ciddi sorunlar yaratmasından korkuluyordu. Bu nedenle, bu otellerin yıkılıp, herbir yıldızda ait malzemelerin geriye götürülmesi kararlaştırılmıştı. Yıkım, işine hemen başlanacağından, bu otellerin bütün müşterilerinin beş gün içinde Kozmoz oteline yerleştirilmesi öngörülmüştü. Zavallı dostum, Kozmoz oteli müdürü, önüne gelene dert yanıyordu:

"Önce, her odası dolu otelime yeni bir müşteri geldi. Yer yok demedim. Ona bir oda buldum. Sonra 999 999 yeni müşteri daha geldi. Onları da geri çevirmedim. Herbirine bir oda buldum. Daha sonra, tamamen dolu olan otelimin oda sayısı kadar yeni müşteri daha geldi. Onlara da yer yok demedim, herbirisine bir oda verdim. Ama bu kez ne yapabilirim ben ? Sonsuz çoklukta burç, her burçta bir otel, her otelde sonsuz çoklukta müşteri var. Şimdi bütün bunları, zaten tamamen dolu olan otelime nasıl yerleştiririm? Bu buyruğu verenler beni sihirbaz mı sanıyorlar?"

Müdürün bu şekilde yakınması birkaç saat sürdü. Ne var ki buyruk buyruktu ve de buyruğun yerine getirilmesi için zaman daralıyordu. Baktı ki yakınmanın yararı yok, oturup sorunu ciddi olarak düşündü. Bir de baktık ki otelin her yanına duyurular astırıyor. Bu sorunu çözümlene istediği bir galaksiye gezi yapma olanağı sağlayacaktı. Oteldeki bütün müşteriler ve bütün personel her işi bir yana bırakıp bu problemi düşünmeye başladılar.

Neden sonra aşçılardan birisi heyecanla müdürün odasına daldı ve şu öneride bulundu :

"Birinci otel bizimki olsun. Bizim otelde, 1 numaradaki müşteriyi yerinde bırakınız. 2 numaradakinin 1001 numaraya, 3 numaradakinin 2001 numaraya, 4 numaradakinin 3001 numaraya... v.b. yerleştiriniz. Sonra ikinci oteldeki müşterileri, bizim otelin 2, 1002, 3002, ... numaralı odalarına yerleştiriniz. Sonra üçüncü otelin müşterilerini bizim otelin 3, 1003, 2003, 3003, 4003, ... numaralı odalarına yerleştiriniz Ve artık bu işe böylece devam ediniz."

Odadakiler bir an duraksadı. Acaba sorun çözümlenmiş miydi ? Müdür, söylenenleri en başından dikkatle yeniden düşünmeye koyuldu. Biraz sonra aşçıya döndü:

"Bak, sana önce bir eski hikaye anlatacağım. Eski Roma senatosu imparator Tiberius'un onuruna, Eylül ayının adını "Tiberius" olarak değiştirmeyi önerir. (Temmuz = Julius ve Ağustos = Augustus adları daha önce imparator adlarını almışlardı.) Tiberius, iğneli bir ifadeyle

senatosuna şu cevabı verir: 'Peki ama onüçüncü Sezar'a ne önereceksiniz?' Şimdi ben de sana şunu soruyorum : Önerdiğin plana göre, öncelikle, Kozmozun bütün müşterilerini yine Kozmoza değişik bir biçimde yerleştiriyorsun. Sonra ikinci otelin bütün müşterilerini de aynı şekilde Kozmoza yerleştirebiliyorsun. Üçüncü, dördüncü, ... , bininci otelin bütün müşterilerini de aynı plana göre yerleştirebileceğinizden hiç kuşku yok. Peki ama 1001 inci ve ondan sonraki otellerin müşterilerini ne yapacaksınız?"

Aşçının planı ilginçti ama problemi tam çözemiyordu.

Biraz sonra otel muhasebecisi bir başka öneriyle çıkageldi. Onun önerisi geometrik dizilere dayanıyordu. Birinci oteldekileri 2, 4, 8, 16, 32, ... numaralı odalara ; başka bir deyişle 2, 22, 23, 24, 25, ... numaralı odalara yerleştirecekti. İkinci oteldekileri 3, 9, 27, 81, ... numaralı odalara; başka bir deyişle 3, 32, 33, 34, ... numaralı odalara yerleştirecekti. Üçüncü oteldekileri 4, 42, 43, 44, ... numaralı odalara,... Ve böylece devam ediyordu ki, müdür sözünü kesti :

"Herkes bir oda istiyoruz. Sizin bu plana göre, örneğin, birinci otelin 2 numaralı müşterisi ile üçüncü otelin 1 numaralı müşterisini Kozmoz'un 4 numaralı odasına yerleştirmiş oluyorsunuz.",

Bir sessizlik çöktü odaya. Bu umut da mı boşa çıkıyordu? Bu noktada söze karıştım. Ne de olsa, Yıldız Akademisinde beş yıllık matematik öğrenimimin boşuna olmadığını ispatlamak fırsatı doğmuştu:

"Baylar," dedim "yalnız asal sayıları kullanırsak bu yöntem işler. Önce, 2 den başlayarak asal sayıları, küçükten büyüğe doğru 2, 3, 5, 7, 11, ... gibi sıralayalım. Birinci otelin müşterilerini ilk asal sayının kuvvetleri ile numaralanmış odalara; yani 2, 22, 23, ... numaralı odalara yerleştirelim. İkinci otelin müşterilerini ikinci asal sayının kuvvetleri ile numaralanmış odalara; yani 3, 32, 33, 34,... numaralı odalara yerleştirelim. Böylece devam edersek, üçüncü otelin müşterilerini 5, 52, 53, 54,... numaralı odalara; dördüncü otelin müşterilerini 7, 72, 73, 74,... numaralı odalara, ... v.b.

Müdür :

"Yani böyle yaparsak, bir odaya birden çok müşteri girme olasılığı kalkıyor mu?"

diye sordu.

"Elbette!" diye cevap verdim. "Çünkü iki asal sayının pozitif tam kuvvetlerinden herhangi ikisi eşit olamaz; yani p ile q herhangi iki asal sayı ise ve p(q ise, her m, n pozitif tamsayıları için  $pm \neq qn$  dir."

Müdürü yüzü gülmüştü artık. Sorunun çözüldüğüne inanmıştı. Ancak işin pratik yönüne kolaylık kazandırmak için, son öneriyi şöyle değiştirdi:

"Yalnız 2 ve 3 asal sayılarını kullanalım. n-inci otelin m-inci odasından gelecek müşteriyi Kozmoz'un  $2m3n$ . numaralı odasına yerleştirelim."

Gerçekten bu çok daha kolay uygulanabilir bir yöntemdi: Buna göre herhangi numaralı bir otelin herhangi numaralı bir odasından gelecek müşteriye, Kozmoz'da hangi numaralı odaya yerleşeceğini, daha girişte kapıcı bile söyleyebilirdi. Tabii, m(p yada n(q ise  $2m3n \neq 2p3q$  olduğundan, her müşteriye bir tek oda verilebilecekti.

Artık herkes memnundu. Çözülemez sanılan problem çözülmüştü. Ama ne ben ne de müdür ortaya konan armağana hak kazanamıyorduk; çünkü bu çözüme göre otelin büyük bir kısmı boş

kalıyor, dolayısıyla işletme zararı doğuyordu. Benim çözüme göre, örneğin, 6, 10, 12, ... numaralı odalar; daha genel söylersek, bir asal sayının bir kuvveti olarak yazılamayan sayılara karşılık gelen bütün odalar boş kalıyordu. Müdürün çözümüne göre,  $2m3n$  şeklinde yazılamayan sayılara karşılık gelen bütün odalar boş kalıyordu. Şu aksiliğe bakın ki, biraz önce, herbiri Kozmoz büyüklüğündeki sonsuz çoklukta bu dolu otellerin müşterilerini zaten dolu olan Kozmoz'a sığdıramıyorduk. Şimdi ise aynı müşterilerin hepsini Kozmoz'a yerleştirdiğimizde bile burayı dolduramıyoruz. Bu, Kozmozun karşılaştığım üçüncü olağanüstü özeliği oluyordu. Doğrusu geciktiğime değmişti.

Armağanı kazanan çözümü, bir kuşseverler delegesi olan Swan galaksisi Matematik Akademisi başkanı önerdi. Başkan, sıralı çiftlerden oluşan şöyle bir tablo düzenlemişti. Sıralı çiftlerden herbirisi bir müşteriye gösteriyordu. Örneğin; 5 inci otelin 102 numaralı odasındaki müşteriye (5,102) sıralı çifti ile; daha genel söylersek, n-inci otelin m-inci odasındaki müşteriye (n,m) sıralı çifti ile temsil ediyordu. Sonra birinci otelin müşterilerini temsil eden sıralı çiftleri bir satır halinde yazıyor, o satırın altına ikinci otelin müşterilerini temsil eden sıralı çiftleri, onun altına üçüncü otelinkileri,... Böylece şöyle bir tablo ortaya çıkıyordu:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	...	(1, m)	...
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	...	(2, m)	...
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	...	(3, m)	...
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	...	(4, m)	...
(n,1)	(n,2)	(n,3)	(n,4)	...	(n, m)	...

.....

Artık sözkonusu bütün müşteriler bu tabloda yer ahyordu. Örneğin, 7000 inci otelin 888 888 numaralı odasındaki müşteriye temsil eden (7000, 888 888) sıralı çifti, tabloda 7000 inci satır ile 888 888 inci sütunun kesiştiği yerde yer alıyordu.

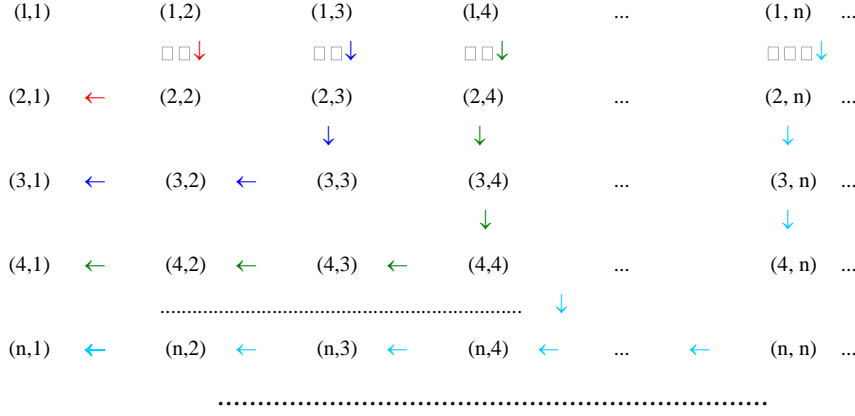
Tabloyu hepimiz az çok anlamıştık, ama bu tablonun ne işe yarayacağını anlayamıyorduk. Başkan kısa konuştu:

"Kareleme yöntemiyle müşterilerinizi yerleştiriniz."

Hiç kimse bir şey anlamamıştı. Müdür sordu:

"Nasıl yani ?"

"Çok kolay!" dedi başkan " (1,1) deki müşteriye 1 numaraya, (1,2) dekini 2 numaraya, (2,2) dekini 3 numaraya, (2,1) dekini 4 numaraya yerleştiriniz. Dikkat ederseniz tablomuzun sol üst köşesindeki ilk kareye ait sıralı çiftleri kullandık. Şimdi ikinci kareye, geçelim. Karenin sağ üst köşesinden başlayacağız. (1,3) deki müşteriye 5 numaraya, (2,3) deki müşteriye 6 numaraya, (3,3) deki müşteriye 7 numaraya,(3,2) deki müşteriye 8 numaraya, (3,1) deki müşteriye 9 numaraya yerleştiriniz. Yine dikkat ederseniz, tablonun sol üst köşesindeki ikinci kareye ait bütün sıralı çiftleri kullandık. Artık böylece devam ediniz. Bakınız, örneğin, üçüncü kareye ait sıralı çiftleri, sağ üst köşeden sol alt köşeye doğru oklarla gösterdiğim sırada yerleştireceksiniz. Sonra 4-üncü, 5-inci, 6-ıncı, ... kareler için de aynı işi yapacaksınız."



Müdür :

"Acaba bu kez bütün müşteriler Kozmoz'a sığacak mı ?"

diye kuşkuyla sordu.

"Elbette!" dedi başkan "Hem bütün müşteriler sığacak, hem de boş yer kalmayacak. Bakınız bu tablodan görüldüğü gibi, ilk  $n$  tane otelin ilk  $n$  odalarından gelecek  $n^2$  tane müşteriye Kozmoz'un ilk  $n^2$  odasına yerleştirmiş olacaksınız. Bütün müşteriler er ya da geç bu karelerden birisine dahil olacaklardır; yani Kozmoz'a yerleşebileceklerdir. Örneğin, 217 inci otelin 136 numaralı müşterisi 217 inci karede yerini alacaktır. Hattâ, isterseniz hangi numaraya, gideceğini de söyleyebilirsiniz. Bu müşteri  $2162 + 136$  numaralı odaya yerleşecektir. Genel bir kural olarak,  $n$ -inci otelin  $m$ -inci odasındaki müşteriye, eğer  $n > m$  ise, Kozmoz'un  $(n-1) 2+m$  numaralı odasına, eğer  $n < m$  ise Kozmoz'un  $(m^2 - n + 1)$  numaralı odasına yerleşecektir."

Başkanın önerisini şimdi hepimiz iyice anlamıştık. Gerçekten hem bütün müşteriler Kozmoz'a sığıyor, hem de Kozmoz'un hiçbir odası boş kalmıyordu. Kuşsever matematikçi LCR - 287 galaksisine bir gezi kazanmış oldu.

Bu başarılı çözüm onuruna, otel müdürü o akşam bütün müşterilere bir davet verdi. Aksiliğe bakın ki davette bile problemler çıkmaya başladı. Kozmoz'un tek numaralı odalarındaki müşteriler davete yarım saat geç geldiler, baktılar ki, bütün sandalyeler çift numaralı odaların müşterileri tarafından doldurulmuş durumda. Oysa, nazik otel müdürümüz, herkese ancak bir sandalye ayırabilmişti. Ne var ki, artık otel kâtibi bile bu işin üstesinden gelebilirdi. Daha önceden edindiği bilgiye göre sandalyelerdeki konukları uygun biçimde geriye kaydırarak yeni gelenlerin hepsine yer açtı. Tabii, dışarıdan tek bir sandalye bile getirmeye ihtiyaç kalmadı.

Biraz sonra konuklara dondurma sunuldu. Baktılar ki her konuğa ikişer külâh düşüyor. Oysa aşçıbaşı herkese ancak birer külâh hazırlamıştı. Sanıyorum ki artık bunun nedenini sizler de benim gibi kolayca anlayabiliyorsunuz.

Giderek, artık bu otelde olanaksız sandığımız herşeyin olabileceğine inanmaya başlıyordum ki nazik dostuma yeni bir buyruk daha ulaştı. Merkezden, Müşterilerin Kozmoz oteline ne kadar değişik biçimlerde yerleştirilebileceği soruluyordu. Herbir yerleşme biçimi, boş odalar 0 ile dolu odalar 1 ile gösterilmek üzere bu iki rakamdan oluşan sonsuz bir satır dizisi ile temsil edilecekti. Örneğin, yalnız tek numaralı odaların dolu olduğu yerleşme biçimi

1010101010...



dizisi ile; bütün odaların dolu olduğu yerleşme biçimi

1111111111...

dizisi ile; bütün odaların boş olduğu hal (ki bu işletmenin iflası demektir) ise,

000000000...

dizisi ile temsil edilecekti.

Otel müdürü problemi bir süre düşündükten sonra şöyle bir yol buldu. Otelin her katında sonsuz çoklukta oda vardı; yani otelin herbir katı, otelin bütün odaları kadar odaya sahipti. Dolayısıyla, her katın, sorumlusundan müşterileri kendi katına nasıl yerleştireceğini belirten bir liste istedi. Farklı iki kattan gelen listelerin aynı olmaması için de gerekli kontrolün yapılmasını buyurdu. Otelde sonsuz çoklukta yerleşme biçimi gösteren diziler verilmiş oluyordu. Artık müdürün yapacağı iş bu dizileri alt alta yazıp meydana gelen listeyi ilgili yere göndermekti.

Dostuma,

"Bu listenin tam olduğuna nasıl güveniyorsunuz? Acaba bu listedekilerden farklı bir yerleşme biçimi olamaz mı?"

diye sordum.

"Doğrusu, bilemiyorum. Elimde sonsuz çoklukta yerleşme biçimi var. Öyleyse, bütün yerleşme biçimleri bu listede var olmalıdır, diye düşünüyorum."

dedi.

"Bu listenin tam olmadığını gösterebilirim. Size, elinizdekilerden farklı bir yerleşme biçimi bulacağım."

dedim. Otel müdürü bana:

"Dostum Mülâyim, belki bu liste eksiktir. Ama bunun böyle olduğunu hiç kimse gösteremez. Zaten elimizde sonsuz çoklukta dizi var. Bundan ötesi nasıl olacak ?"

dedi.

Dostumla iddiaya girerek işe koyuldum. Önce her katın sorumlusuna önerdiği yerleşme biçimini ilgili odaların kapısına yazmalarını rica ettim. Yani, boş önerdikleri odaların kapısına 0, dolu önerdikleri odaların kapısına 1 yazmalarını istedim. Sonra birinci kattaki birinci odanın kapısına gittim. Kapıda 0 vardı. Kuracağım dizinin ilk terimini 1 olarak yazdım. Sonra ikinci kata çıktım. Bu kez bu katın ikinci odasının kapısındaki numaraya baktım: 1 idi. Dizimin ikinci terimi olarak 0 yazdım. Sonra üçüncü kata çıktım, üçüncü odanın kapısına baktım: 1 idi. Dizimin üçüncü terimi olarak yine 0 yazdım. Böylece her katta o katın numarasına eşit numaralı odanın kapısında 0 mı, yoksa 1 mi yazılı olduğuna bakıyor, 0 ise 1, 1 ise 0 rakamını hazırladığım diziyeye yazıyordum. Böylece her katta dizimin bir teriminin ne olması gerektiğine karar veriyordum: Buna göre, örneğin, 778 inci katta, yalnızca 778 numaralı odanın kapısına bakıyorum, kapıda 0 varsa dizimin 778 inci rakamını 1 diye yazıyorum; 1 varsa 0 diye yazıyorum.

Bütün katlarda aynı işi yaptım sonra hazırladığım diziyi gururla müdürün önüne koydum :

"İşte dostum," dedim "listenizde olmayan bir yerleşme biçimi!"

"Bunun benim listemde olmadığı nasıl bilebiliyorsun ?"

"Çok kolay. Kurduğum bu dizi, sizin listedeki birinci dizi olamaz,. çünkü ilk rakamları farklıdır. İkinci dizi de olamaz, çünkü bütün öteki rakamlar eşit olsa bile ikinci rakamlarının farklı olduğunu görüyoruz. Üçüncü diziyeye bakalım, üçüncü rakamlar farklıdır... Genel olarak, benim kurduğum dizi ile sizin listedeki n-inci diziyeyi karşılaştıralım. Bu iki dizinin n-inci terimleri farklıdır: çünkü diziyeyi, özellikle, böyle olacak şekilde kurdum. Demek ki, bu dizi sizin listedeki dizilerden hiçbirisine eşit değildir."

Müdür, bu başarımdan pek memnun görünmeyerek,

"Eh!" dedi "öyleyse sizin diziyeyi de listeye ekleyelim, listemiz tam olsun."

"Yoo..." dedim "Bu liste hiçbir zaman tam olamaz.... Bu diziyeyi listeye ekleseniz, ne değişecek? Gene elinizde numaralanabilen sonsuz çoklukta bir diziler listesi olacak. O zaman ben, bu yeni listeye göre, önceki yöntemi kullanarak bu yeni listede de olmayan yeni bir dizi daha kurabilirim. Hem bu işin sonu hiç gelmez. Her seferinde, listede olmayan yeni bir dizi bulabilirim."

"Yani, şimdi bu işin içinden çıkamadık, diye mi bildirelim merkeze?" diye sordu.

"Hayır," dedim "tam tersine, sorunu çözümledik Onların istediği gibi, müşterilerin Kozmoz'a mümkün bütün yerleşme biçimlerini bir listeye sıralamak olanaksızdır. Başka bir deyişle, bu yerleşme biçimlerini numaralamak; yani saymak olanağı yoktur. Daha açıkçası, sayılamaz çoklukta yerleşme biçimi vardır."

Haber merkeze doğru yola çıkarken ben de nazik arkadaşım otel müdürüne veda ederek emektar roketime atladım. Dönüşte, dostum Tarantog'a o kara banttan daha çok Kozmoz otelini, daha doğrusu sonsuz kümelerin karşılaştığı bu olağanüstü özelliklerini anlatacaktım.

**UYARI:** Bu noktada artık kahramanımız Mülâyimi rahat bırakalım ve ona fiziksel olarak olanaksız bildiğimiz bazı şeyleri nasıl başardığını sormayalım. Örneğin, rölativite kuramına göre 186 000 mil/sn den daha büyük bir hızla herhangi bir işaret göndermek olanaksızdır. Dolayısıyla, otel müdürünün buyruklarının bütün odalara ulaşması bile sonsuz zamanı gerektirir. Başka bir deyişle, bu buyruklar hiçbir zaman her odaya ulaşamayacaktır. Aynı şekilde, kahramanımızın sonsuz çoklukta katları dolaşması da hiçbir zaman bitmeyecektir.

### **KAYNAK**

**T.Karaçay:** 'Soyut Matematiğe Giriş', Modern Matematik ve Fen Kitapları,99. MEB, İstanbul,1975.