Bölüm 9

ÇARPIM UZAYLARI

9.1 ÇARPIM TOPOLOJİSİ

9.2 KARMA P R O B E M L E R

1. A ile B, sırasıyla, $(X, \mathscr{T})X$ ile $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzaylarının birer altkümesi olsunlar.

   (a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

   (b) $\overline{(A \times B)} = \bar{A} \times \bar{B}$

   (c) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$

   olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ uzayının bir tabanı $\mathfrak{T}$ ve $(Y, \mathscr{S})$ uzayının bir tabanı $\mathfrak{S}$ olsun.

(a)

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \times B)^o &\Leftrightarrow (\exists T \in \mathfrak{T})(\exists S \in \mathfrak{S})[(x, y) \in T \times S \subset A \times B] \\
&\Leftrightarrow (x \in T \subset A) \wedge (y \in S \subset B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A^\circ) \wedge (y \in B^\circ) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in A^\circ \times B^\circ)
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \overline{(A \times B)} &\Leftrightarrow (\forall T \in \mathfrak{T})(\forall S \in \mathfrak{S})[(x,y) \in T \times S \Rightarrow \\
&\qquad (T \times S) \cap (A \times B) \neq \emptyset] \\
&\Leftrightarrow (\forall T \in \mathfrak{T})(x \in T \Rightarrow T \cap A \neq \emptyset) \wedge \\
&\qquad (\forall S \in \mathfrak{S})(y \in S \Rightarrow S \cap B \neq \emptyset) \\
&\Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (y \in \bar{B}) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in \bar{A} \times \bar{B})
\end{aligned}
$$

(c) Önceki eşitlikler ile 2.5.1 problemlerdeki ilgili bağıntıları kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\partial(A \times B) &= \overline{(A \times B)} \cap \overline{(A \times B)'} \\
&= (\bar{A} \times \bar{B}) \cap ((A \times B)^o)' \\
&= (\bar{A} \times \bar{B}) \cap (A^o \times B^o)'
\end{aligned}
$$

eşitliklerini yazabiliriz. Buradan,

$$
\begin{aligned}
(a,b) \in \partial(A \times B) &\Leftrightarrow [(a,b) \in (\bar{A} \times \bar{B})] \wedge [(a,b) \in (A^o \times B^o)'] \\
&\Leftrightarrow (a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B}) \wedge \\
&\qquad \left\{ \begin{array}{l} a \in A^o \Rightarrow b \notin B^o \\ b \in B^o \Rightarrow a \notin A^o \\ (a \notin A^o) \wedge (b \notin B^o) \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

olur. Burada {} içindeki üç satır $\vee$ ile birbirlerine bağlıdırlar. Şimdi her üç satır için olasılıkları inceleyelim:

i.

$$
\begin{aligned}
&[(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B})] \wedge [a \in A^o \Rightarrow b \notin B^o] \\
&\Rightarrow [(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \partial B) \\
&\Rightarrow (a,b) \in \bar{A} \times \partial B)
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
&[(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B})] \wedge [b \in B^o \Rightarrow a \notin A^o] \\
&\Rightarrow [(a \in \partial A) \wedge (b \in \bar{B}) \\
&\Rightarrow (a,b) \in \partial A \times \bar{B})
\end{aligned}
$$

iii.

$$
\begin{aligned}
&[(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \bar{B})] \wedge [(a \notin A^o) \wedge (b \notin B^o)] \\
&\Rightarrow [(a \in \partial A) \wedge (b \in \partial B)] \\
&\Rightarrow [(a \in \partial A) \wedge (b \in \bar{B})] \vee [(a \in \bar{A}) \wedge (b \in \partial B)] \\
&\Rightarrow [(a,b) \in \bar{A} \times \partial B)] \vee [(a,b) \in \partial A \times \bar{B})]
\end{aligned}
$$

$\square$

2. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ise $(X \times X, \mathscr{P})$ çarpım uzayında
$$\Delta = \{(x,x) | x \in X\}$$
köşegeninin $(X, \mathscr{T})$ uzayına eşyapılı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathscr{P}$ nin Δ üzerine kondurduğu topolojiyi $\mathscr{P}_\Delta$ ile gösterelim. $\pi_1 : X \times X \to X$ izdüşüm fonksiyonu sürekli ve açık bir dönüşümdür. $\pi_1(\mathscr{P}) = \mathscr{T}$ dir. π_1 izdüşümünün Δ kümesine kısıtı da sürekli ve açık bir dönüşümdür. Ayrıca $(x,x) \to x$ dönüşümü Δ dan X üzerine bbö dir. Dolayısıyla, Önerme 6.3.1 uyarınca, π_1 izdüşümünün Δ kümesine kısıtı bir eşyapı dönüşümüdür (homeomorphism).

3. Bir $\{X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ topolojik uzaylar ailesi verilsin ve bunların çarpım uzayı $(X, \mathscr{P})$ olsun.

   (a) Eğer Λ sonlu yada sayılabilir sonsuz bir küme ise, çarpım uzayın *Birinci (ya da İkinci) Sayılabilme Aksiyomunu* sağlayabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, çarpan uzaylardan herbirisinin de bu aksiyomu sağlamasıdır.

   Çözüm:

   i. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlasınlar. Her birisinin sayılabilir bir tabanı var olacaktır. Bu tabanları $\mathscr{B}_\lambda$ ile gösterelim. (9.11) bağıntısı uyarınca, bunların π_λ^{-1} ters izdüşüm dönüşümleri altındaki resimlerinden oluşan
   $$\mathfrak{S} = \{A : (\exists \lambda \in \Lambda)(\exists B \in \mathscr{B}_\lambda)\ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\} \tag{9.1}$$
   ailesi $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin bir alt-tabanıdır. Her $\lambda \in \Lambda$ için $\{(\exists B \in \mathscr{B}_\lambda)\ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\}$ ailesi sayılabilir sayıdadır. O halde, Λ sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir küme ise, $\mathfrak{S}$ ailesi en çok sayılabilir sayıda sayılabilir ailelerden oluşan bir ailedir. Dolayısıyla $\mathfrak{S}$ ailesi sayılabilir. Bu ailenin sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathscr{B}$ ailesi de sayılabilir sayıda olacaktır. Sözkonusu $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin bir tabanıdır. Bu taban sayılabilir olduğuna göre, $\mathscr{P}$ çarpım topolojisi İkinci sayılabilme aksiyomunu sağlar.

   ii. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlasınlar. Her $x \in X_\lambda$ için komşuluklar tabanını $\mathscr{B}_\lambda(x)$ ile gösterelim. Her $\lambda \in \Lambda$ ve her $x \in X_\lambda$ için $\mathscr{B}_\lambda(x)$ komşuluklar tabanı sayılabilir sayıda olacaktır. Her $\lambda \in \Lambda$ ve her $x \in X_\lambda$ için $\{(\exists B \in \mathscr{B}_\lambda(x)\ A = \pi_\lambda^{-1}(B)\}$ ters resimleri sayılabilir sayıdadır. O halde,
   $$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda^{-1}(B) \tag{9.2}$$

yazılabilir. Açıkça görüldüğü gibi, (9.2) kartezyen çarpımının sayılabilir sayıda çarpanı vardır ve (x) noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır.

(b) Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme olsun. Çarpan uzayların herbirisinin *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağladığını varsayalım. Bu durumda, eğer çarpan uzayların sayılamaz sayıdası enaz ikişer öğeli ise, çarpım uzay *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlayamaz.

Çözüm: Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme ve çarpan uzayların sayılamaz sayıdası enaz ikişer öğeli ise

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(B), \ (\exists B \in \mathscr{B}_\lambda(x)\} \tag{9.3}$$

kartezyen çarpımının sayılamaz sonsuz sayıda çarpanı vardır. (9.3) ailesi, çarpım uzayda (x_λ) noktasının bir komşuluklar tabanıdır. Dolayısıyla her öğesi (x_λ) noktasının bir komşuluğudur. Bu noktanın başka bir $\mathscr{V}$ sayılabilir komşuluklar tabanı olduğunu varsayalım. (9.3) ailesine ait her U komşuluğu $\mathscr{V}$ tabanına ait bir V kümesini kapsar. Öyleyse $\mathscr{V}$ tabanı sayılabilir sayıda olamaz. Bu demektir ki, verilen varsayımlar altında, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı olamaz. Dolayısıyla çarpım uzay *Birinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlamaz.

(c) Λ damgalayan kümesi sayılamaz sonsuz bir küme olsun. Çarpan uzayların herbirisinin *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağladığını varsayalım. Bu durumda, çarpım uzayın *ikinci sayılabilme aksiyomunu* sağlayabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, çarpan uzayların ancak sayılabilir sayıdasının ayrık olmayan topolojiden farklı bir topolojiye sahip olmasıdır.

Gösteriniz.

Çözüm: Çarpan uzayların sayılamaz sayıdasının ayrık olmayan topolojiden farklı olduğunu varsayalım. $\mathscr{P}$ çarpım topolojisinin (9.6) ile verilen (9.1) alt-tabanı sayılamaz sayıda sayılabilir ailenin ailesidir. Dolayısıyla sayılamaz çokluktadır. Bunların sonlu arakesitleri ailesi de sayılamaz çoklukta olacağından, çarpım uzay İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlamaz. Eğer, $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ ayrık olmayan uzay ise, $(T \in \mathscr{T}_\lambda \Rightarrow T = X_\lambda)$ olduğundan,

$$\pi_\lambda^{-1}(T) = \pi_\lambda^{-1}(X_\lambda) = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

olur. Öyleyse, çarpan uzayların ancak sayılabilir sayıdası ayrık olmayan topolojiden farklı bir topolojiye sahip ise, (9.1) ailesi sayılabilir sayıda olacaktır.

4. Ayrık uzayların sonlu sayıdasının çarpımının da ayrık bir uzay olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $(X_i, \mathscr{A}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ayrık topolojik uzayların çarpım uzayı $(X, \mathscr{P})$ olsun. Her $x_i \in X_i$ için tek öğeli $\{x_i\}$ kümesi $\mathscr{A}_i$ ayrık topolojisine göre açıktır. O halde,

   $$(x_i)_{i=1}^n \in X = \prod_{i=1}^n X_i$$

   için

   $$\{x_1\} \times \{x_2\} \times \ldots \{x_n\} \in \mathscr{P}$$

   dir. Başka bir deyişle, her $x \in X$ noktası çarpım topolojinin açık bir kümesidir. Dolayısıyla, $(X, \mathscr{P})$ ayrık bir uzaydır.

5. Ayrık uzayların sonsuz sayıdasının çarpımının da ayrık olması için, bu uzayların hemen hemen hepsinin tek öğeli olması gerektiğini gösteriniz.

   Çözüm: Burada *hemen hemen hepsi* deyimi *"sonlu sayıdası hariç"* anlamındadır. Buna göre, problemi şöyle ifade edebiliriz:

   Sayılamaz çoklukta ayrık uzayların çarpımının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul, uzayların sonlu sayıdası hariç, geri kalanların tek öğeli olmasıdır.

   Bir $(x_\lambda) \in \prod X_\lambda$ noktasını düşünelim. Bu noktanın $\mathscr{P}$ çarpım topolojisine göre açık olduğunu gösterirsek, istenen sonucu bulmuş oluruz. Bunu başarmak amacıyla, verilen koşullar altında, çarpım topolojisinin alt tabanı olan (9.1) ailesinin sonlu arakesitlerinden oluşan ailenin nasıl olduğunu bulmaya çalışalım.

   Tek öğeli olan kümeleri $\mathcal{M} = \{X_\mu : \mu \in M, X_\mu = \{x_\mu\}\}$ ile gösterelim. Birden çok öğesi olanları $\mathcal{N} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ile gösterelim.

   $$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \times \left(\prod_{\mu \in M} X_\mu\right)$$

   yazabiliriz. Her $i \in \mathbb{N}$ için $x_i \in X_i$ ve her $\mu \in M$ için $X_\mu = \{x_\mu\}$ olmak üzere X çarpım uzayında

   $$(\{x_1\} \times \{x_2\} \times \ldots \{x_n\}) \times \left(\prod_{\mu \in M} \{x_\mu\}\right)$$

   kümesi açık bir kümedir [Daha genel sonuç için bkz. Ek 4.Problem (9.13)]. Öte yandan bu küme, $\Lambda = \mathbb{N} \cup M$ olmak üzere $(x_\lambda) \in \prod X_\lambda$ noktasıdır. Böylece, verilen koşul altında, çarpım uzaya ait her noktanın çarpım topolojisine göre açık olduğu görülür. O halde, çarpım uzay ayrıktır.