9.2.1 09. Bölüm İçin Ek Problemler

1. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları verilsin. Bunların çarpım uzayı $(X, \mathscr{T})$ olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda \subset X_\lambda$ alt kümesi veriliyor. $\prod A_\lambda \subset \prod X_\lambda$ alt-kümesi için aşağıdaki bağıntının sağlandığını gösteriniz.

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A^o_\lambda \subset \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^o \tag{9.4}$$

Çözüm: Çözümü iki farklı durum için ayrı ayrı yapacağız.

1.Durum: Sonsuz sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ olsun.

Her $\lambda \in \Lambda$ için A^o_λ kümesi $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ uzayında açıktır. Ancak,

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A^o_\lambda \tag{9.5}$$

kartezyen çarpımı $(X, \mathscr{T})$ çarpım uzayında açık olamaz. Çünkü, sonsuz sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ ise, (9.5) kartezyen çarpımı

$$\pi_\imath^{-1}(T_\imath) = T_\imath \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \in \Lambda, \lambda \neq \imath, T\imath \in \mathscr{T}\imath\} \tag{9.6}$$

biçimindeki alt-tabana ait hiç bir kümeyi kapsayamaz. Öte yandan, her $\lambda \in \Lambda$ için $A^o_\lambda \subset A_\lambda$ olduğundan

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A^o_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \tag{9.7}$$

kapsama bağıntısı vardır. Bu kapsamanın iki yanının içlemleri alınırsa

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A^o_\lambda\right)^o \subset \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^o \tag{9.8}$$

olacaktır. Gene aynı düşünüşle, sonsuz sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ ise, bu kapsamanın sağ ve sol yanları, alt-tabana ait (9.6) tipindeki hiç bir küme içeremezler. O halde her iki içlem boş olmalıdır. Dolayısıyla, $\emptyset \subset \emptyset$ uyarınca (9.4) sağlanır.

2.Durum: Yalnızca sonlu sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ olsun.

Sonlu sayıda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümesi dışında kalan bütün $A\mu$ kümeleri için $A_\mu = X_\mu$ $(\mu \neq 1, 2, \ldots, n)$ olacaktır. Bu durumda (9.5) kartezyen çarpımı, çarpım uzayın tabanına ait kümeler içerir. Örneğin, $T_i \subset A^o_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olacak şekilde $T_i \in \mathscr{T}_i$ açık kümeleri için

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(T_i) &= \bigcap_{i=1}^{n} \Big(T_i \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1, 2, \ldots, n\}\Big) \\
&= T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1, 2, \ldots, n\} \\
&\subset A^o_1 \times A^o_2 \times \ldots \times A^o_n \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1, 2, \ldots, n\}
\end{aligned} \tag{9.9}$$

olacaktır. Bu durumda (9.8) bağıntısının sol yanı

$$
\begin{aligned}
\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o\right)^o &= \left(A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1,2,\ldots,n\}\right)^o \\
&= (A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o)^o \times \left(\prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1,2,\ldots,n\}\right)^o \qquad (9.10)\\
&= (A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o) \times \left(\prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1,2,\ldots,n\}\right) \\
&= \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o \qquad (9.11)
\end{aligned}
$$

olur. Şimdi (9.10) den hareketle,

$$
\begin{aligned}
\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o &= (A_1^o \times A_2^o \times \ldots \times A_n^o)^o \times \left(\prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1,2,\ldots,n\}\right)^o \\
&\subset (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)^o \times \left(\prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1,2,\ldots,n\}\right)^o \\
&= \left(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \prod\{X_\lambda :\ \lambda \neq 1,2,\ldots,n\}\right)^o \\
&= \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^o \qquad (9.12)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla (9.4) sağlanır.

Başka problemlerde kullanacağımız için son iki eşitliği özgün bir formül olarak ifade edelim:

Sonuç: $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları verilsin. Bunların çarpım uzayı $(X, \mathscr{T})$ olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda \subset X_\lambda$ alt kümesi veriliyor. Sonlu sayıda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümesi dışında kalan bütün $A\lambda$ kümeleri için $A_\lambda = X_\lambda$ $(\lambda \neq 1, 2, \ldots, n)$ ise aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$
\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o\right)^o = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^o \subset \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^o \qquad (9.13)
$$

2. $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları verilsin. Bunların çarpım uzayı $(X, \mathscr{T})$ olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda \subset X_\lambda$ alt kümesi veriliyor. $\prod A_\lambda \subset \prod X_\lambda$ alt-kümesi için aşağıdaki bağıntının sağlandığını gösteriniz.

$$
\prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda} \subset \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \qquad (9.14)
$$

Çözüm: Bunun çözümü yukarıdakine benzer bir düşünüşle yapılabilir. Çözümü gene iki farklı durum için ayrı ayrı yapacağız.

1.DURUM: Sonsuz sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ olsun. Bu durumda, X çarpım uzayında

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \tag{9.15}$$

kümesini kapsayan kapalı has bir alt küme olamaz. (9.15) kartezyen çarpımını kapsayan tek kapalı küme çarpım uzayın kendisidir. Öyleyse, kaplama tanımı uyarınca

$$\overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = X \tag{9.16}$$

olur. X çarpım uzayı bütün alt-kümelerini kapsadığına göre, (9.14) sağlanır.

2.DURUM: Yalnızca sonlu sayıda $A_\lambda \neq X_\lambda$ olsun. $\mu \in \Lambda$, $\mu \neq 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere, $A\mu = \overline{A_\mu} = X_\mu$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} &= \overline{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \times \prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu} \\
&= \overline{(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)} \times \overline{\prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu} \\
&= \left(\overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \ldots \times \overline{A_n}\right) \times \overline{\prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu} \\
&= \left(\overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \ldots \times \overline{A_n}\right) \times \left(\prod_{\mu\in\Lambda} X_\mu\right) \\
&= \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda} \qquad (9.17)
\end{aligned}$$

çıkar. Dolayısıyla (9.14) sağlanır.

3. BOX TOPOLOJI: $(X_\lambda, \mathscr{T}_\lambda)$ topolojik uzayları verilsin. Bunların açık kümelerinin kartezyen çarpımları $X = \prod\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde bir topoloji üretir. Başka bir deyişle, her ($\lambda \in \Lambda$ için $T_\lambda \in \mathscr{T}_\lambda$) açık kümelerinin kartezyen çarpımlarından oluşan

$$\mathscr{G} = \left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda : \lambda \in \Lambda,\ T_\lambda \in \mathscr{T}_\lambda\right\} \tag{9.18}$$

ailesi X çarpım kümesi üzerinde bir topoloji tabanıdır. Gösteriniz.

Not: (9.18) ile tanımlanan topolojiye X çarpım kümesi üzerindeki box topoloji denilir. Çarpan kümelerin sayısı sonsuz olduğunda, box topoloji çarpım topolojisinden daha incedir. Çarpan kümelerin sayısı sonlu olduğunda box topoloji ile çarpım topolojisi eşit olurlar. Çarpım topolojisi, izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topoloji olduğu için, genellikle, box topolojiye göre daha kullanışlıdır.

Çözüm: $\mathscr{G}$ ailesinin 4.1.3.Önermenin koşullarını sağlandığını göstermeliyiz.

(a) $X = \bigcup \mathscr{G}$ olduğu apaçıktır.

(b) Her $A, B \in \mathscr{G}$ ve her $(x_\lambda) = x \in A \cap B$ için $x \in C \subset A \cap B$ olacak biçimde bir $C \in \mathscr{G}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$A = \prod \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ A_\lambda \in \mathscr{T}_\lambda\} \tag{9.19}$$

$$B = \prod \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ B_\lambda \in \mathscr{T}_\lambda\} \tag{9.20}$$

olacak biçimde $\{A_\lambda, B_\lambda\}$ açık kümeleri vardır. Her $\lambda \in \Lambda$ için $\mathscr{T}_\lambda$ topoloji olduğundan her $x_\lambda \in A_\lambda \cap B_\lambda$ için $x_\lambda \in C_\lambda \subset A_\lambda \cap B_\lambda$ olacağı açıktır. Örneğin $C_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$ alınabilir. $C = \prod C_\lambda$ dersek, istenen özelik elde edilir.

4. (9.18) tabanı tarafından üretilen topoloji, çarpım topolojisinden daha incedir. Gösteriniz. Eşitliğin olmadığına bir örnek veriniz.

Çözüm: Çarpım topolojisinin bir tabanı (9.6) tipindeki kümelerin sonlu arakesitlerinden oluşan ailedir; yani

$$(T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n) \times \prod_{\mu \in \Lambda} \{X_\mu : \mu \in \Lambda, \mu \neq 1, 2, \ldots, n\}$$

biçimindeki kümelerden oluşan $\mathscr{B}$ ailesidir. Bu aileden seçilecek her küme (9.18) tipinden bir kümeyi kapsar. $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ olduğundan $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{G}^*$ olacağı açıktır.

Eşitliğin olmadığını görmek için, sonsuz tane $(0,1)$ açık aralığının

$$(0,1) \times (0,1) \times \ldots \times (0,1) \times \ldots$$

kartezyen çarpımını düşünelim. Bu kartezyen çarpım box topolojide açık bir kümedir, ama çarpım uzayda açık değildir.