8.3 ALT UZAYLAR

8.4 PROBLEMLER

1. $(A, \mathscr{T}_A)$ uzayı $(X, \mathscr{T})$ nun bir alt-uzayı olsun. Eğer $\mathfrak{S}$, $\mathscr{T}$ nun bir alt-tabanı ise, $\mathfrak{S}$ nin A üzerindeki izi diyeceğimiz

$$\mathfrak{S}_A = \{S \cap A : S \in \mathfrak{S}\} \tag{8.6}$$

ailesi $\mathscr{T}_A$ nın bir alt-tabanıdır. Gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} T_A \in \mathscr{T}_A &\Rightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(T_A = T \cap A) \\ &\qquad \mathfrak{S} \text{ alt-taban olduğundan} \\ &\Rightarrow T = \bigcup_{\imath \in I} \left(\bigcap_{j \in J} \{S_j \mid S_j \in \mathfrak{S}\} \right) \\ &\Rightarrow T_A = \bigcup_{\imath \in I} \left(\bigcap_{j \in J} \{S_j \cap A \mid S_j \cap A \in \mathfrak{S}_A\} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir, ki bu isteneni verir.

2. $(A, \mathscr{T}_A)$ uzayı $(X, \mathscr{T})$ nun bir alt-uzayı olsun. Bir $x \in A$ noktasının $\mathscr{T}_A$-komşulukları

$$\mathscr{B}_A(x) = \{W \cap A : W \in \mathscr{B}(x)\} \tag{8.7}$$

ve $\mathscr{T}_A$-komşuluklar tabanı

$$\mathfrak{S}_A(x) = \{S \cap A : S \in \mathfrak{S}(x)\} \tag{8.8}$$

ailesidir.

Çözüm:

$$\begin{aligned} W \in \mathscr{B}(x) &\Leftrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \subset W) \\ &\Leftrightarrow (\exists (T \cap A) \in \mathscr{T}_A)(x \in T \cap A \subset W \cap A) \\ &\Leftrightarrow (W \cap A) \in \mathscr{B}_A(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W \in \mathscr{B}(x) &\Leftrightarrow (\exists V \in \mathfrak{S}(x))(x \in V \subset W) \\ &\Leftrightarrow (\exists (V \cap A) \in \mathfrak{S}_A(x))(x \in V \cap A \subset W \cap A) \\ &\Leftrightarrow (V \cap A) \in \mathfrak{S}_A(x) \end{aligned}$$

3. $(A, \mathscr{T}_A)$ uzayının kapalı alt-kümeleri, $(X, \mathscr{T})$ üst-uzayının kapalı kümeleri ile A nın arakesitlerinden ibarettir. Gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} K \in \mathscr{T}' &\Leftrightarrow K' \in \mathscr{T} \\ &\Leftrightarrow K' \cap A \in \mathscr{T}_A \\ &\Leftrightarrow A - (K' \cap A) \in \mathscr{T}_A' \\ &\Leftrightarrow K \cap A \in \mathscr{T}_A' \end{aligned}$$

4. $(A, \mathscr{T}_A)$ uzayı $(X, \mathscr{T})$ nın bir alt uzayı ve $I_A : A \to X$ doğal gömme fonksiyonu olsun. $(A, \mathscr{T}_A)$ alt-uzayının $\mathscr{T}_A' = \{A \cap K \mid K \in \mathscr{T}'\}$ ile tanımlanan kapalı kümelerini,

$$\mathscr{T}_A = \{I^{-1}(T) \mid T \in \mathscr{T}\}$$

ile tanımlanan açık kümelerin tümleyenleri olarak elde ediniz.

Çözüm: $A, \mathscr{T}_A)$ alt uzayın kapalı kümeleri üst uzaydaki kapalı kümelerin A ile arakesitlerinden oluşur. $I_A : A \to X$ doğal gömme fonksiyonu $I : X \to X$ özdeşlik dönüşümünün A kümesine kısıtlanmışıdır; yani $I_A = I|_A$ dır. I özdeşlik dönüşümü bir eşyapı dönüşümüdür (homeomorphism). O halde,

$$\begin{aligned} K_A \in \mathscr{T}_A' &\Rightarrow (\exists K \in \mathscr{T}')(K_A = K \cap A) \\ &\Rightarrow (\exists K \in \mathscr{T}')(K_A = (I^{-1}(K) \cap A)) \\ &\Rightarrow (\exists K \in \mathscr{T}')(K_A = (I^{-1}(K \cap A))) \quad \Rightarrow (\exists K \in \mathscr{T}')(K_A = (I_A^{-1}(K))) \end{aligned}$$

yazılabilir ki bu isteneni verir.

5. Gerçel eksen üzerindeki salt topolojinin $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerine kondurduğu topolojiyi belirleyiniz.

Çözüm: $(\mathbb{Z}, \mathscr{T}_{\mathbb{Z}})$ ayrık bir uzaydır. Çünkü, her $k \in \mathbb{Z}$ için öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı bulunabilir ki $(k-\epsilon, k+\epsilon)$ açık aralığı k dan başka tamsayı içermez. O halde, $\mathbb{Z} \cap (k-\epsilon, k+\epsilon) = \{k\}$ olur ki bu $\{k\}$ kümesinin $\mathscr{T}_{\mathbb{Z}})$ topolojisine göre açık olması demektir. Her $k \in \mathbb{Z}$ için bu özelik var olduğuna göre istenen çıkar.

6. Ayrık bir uzayın her alt-uzayı ayrıktır. Gösteriniz.

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ ayrık bir uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\begin{aligned} \forall x (x \in A &\Rightarrow \{x\} \in \mathscr{T} \\ &\Rightarrow \{x\} \cap A \in \mathscr{T}_A \\ &\Rightarrow \{x\} \in \mathscr{T}_A \end{aligned}$$

olur.

7. Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı ile $B \subset A \subset X$ alt-kümeleri verilmiş olsun.
   (a) $\mathring{B} \subset \mathring{B}_A$
   (b) $(\partial B)_A \subset A \cap (\partial B)$ olduğunu gösteriniz. Kapsamların kesinlikle var olduğu hallere birer örnek veriniz.

Çözüm:

(a)

$$\begin{aligned} x \in B^o &\Rightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \subset B) \\ &\Rightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in (T \cap A) \subset B) \\ &\Rightarrow (\exists (T \cap A) \in \mathscr{T}_A)(x \in (T \cap A) \subset B) \\ &\Rightarrow x \in B^o_A \end{aligned}$$

Kapsama yerine eşitlik konulamayacağını aşağıdaki örnek gösterir. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, \mathscr{R})$ alt-uzaylarını düşünelim. Bir k tamsayısı için

$$k \in ((k - \epsilon, k + \epsilon) \cap \mathbb{Q})^o_{\mathbb{Q}} \in \mathscr{R}_{\mathbb{Q}}$$

olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı daima bulunur. Öte yandan, $\mathscr{R}_{\mathbb{Z}}$ kümesinin içlemi boş olduğundan

$$k \notin ((k - \epsilon, k + \epsilon) \cap \mathbb{Z})^o = \emptyset$$

dir.

(b) Bir $x \in A$ için

$$\begin{aligned} x \in (\partial B)_A &\Rightarrow \forall T_A \in \mathscr{T}_A (x \in T_A \Rightarrow (T_A \cap B \neq \emptyset) \\ &\qquad\qquad \wedge (T_A \cap (A - B) \neq \emptyset) \\ &\Rightarrow (\forall T \in \mathscr{T}) \wedge (T_A \subset T \in \mathscr{T}_A) \quad \text{için} \\ &\qquad\qquad (x \in T \Rightarrow T \cap B \neq \emptyset) \quad \text{ve} \\ &\qquad\qquad \wedge (T_A \cap (X - B) \neq \emptyset) \\ &\Rightarrow x \in \partial B \\ &\Rightarrow x \in \partial B \cap A \end{aligned}$$

Kapsama yerine eşitlik konulamayacağını göstermek için, gene, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, \mathscr{R})$ alt-uzaylarını düşünelim. Her gerçel sayı, dolayısıyla her rasyonel sayı $\mathscr{T}_{\mathbb{Q}}$ topolojisinde bir kenar noktadır. Ama $\mathbb{Z}$ nin kenar noktası olmayan (sonsuz çoklukta) rasyonel sayı vardır.

8. Bir $(X, \mathscr{T})$ uzayı ile her hangi iki $B, A \subset X$ alt kümeleri verilmiş olsun
   (a) $A \cap \mathring{B} \subset (A \cap B)^\circ_A$;
   (b) $A \cap \bar{B} \supset \overline{(A \cap B)}_A$ olduğunu gösteriniz. Kapsamların kesinlikle varolduğu hallere birer örnek veriniz.

Çözüm:

(a)

$$\begin{aligned} A\cap B^o \subset A\cap B &\Rightarrow (A\cap B^o)^o_A \subset (A\cap B)^o_A \\ &\qquad (A\cap B^o)\in \mathscr{T}_A \text{ olduğundan} \\ &\Rightarrow (A\cap B^o)\subset (A\cap B)^o_A \end{aligned}$$

çıkar.

(b)

$$\begin{aligned} A\cap B \subset A\cap \bar{B} &\Rightarrow \overline{(A\cap B)}_A \subset \overline{(A\cap \bar{B})}_A \\ &\qquad \text{2.5.1(a) Problem uyarınca} \\ &\Rightarrow \overline{(A\cap B)}_A \subset \overline{(A)}_A \cap \overline{(\bar{B})}_A \\ &\qquad A,\bar{B}\in \mathscr{T}_A \quad \text{olduğundan} \\ &\Rightarrow \overline{(A\cap B)}_A \subset A\cap \bar{B} \end{aligned}$$

9. $(A,\mathscr{T}_A)$ alt-uzayının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul, A nın her noktasının $(X,\mathscr{T})$ üst-uzayında A nın tekil (ayırtık, ayrık) bir noktası olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (A,\mathscr{T}_A) \text{ ayrık uzay} &\Rightarrow \forall a(a\in A\Rightarrow \{a\}\in \mathscr{T}_A) \\ &\Rightarrow \exists T(T\in\mathscr{T}\wedge \{a\} = T\cap A) \\ &\Rightarrow \exists T((T-\{a\})\cap A=\emptyset) \\ &\Rightarrow a \text{ noktası tekildir (ayırtık,ayrık, isolated)} \end{aligned}$$

10. Bir $(X,\mathscr{T})$ uzayı ile $A,B\subset X$ alt-kümeleri verilsin ve $X=A\cup B$ olduğunu varsayalım. Eğer $M\subset A\cap B$ alt-kümesi $\mathscr{T}_A$ ve $\mathscr{T}_B$-kapalı (ya da açık) ise, M nin $\mathscr{T}$-kapalı (ya da açık) olduğunu gösteriniz.

Çözüm: M alt-uzaylarda açık ise,

$$\left\{ \begin{array}{l} M\in\mathscr{T}_A \Rightarrow (\exists T_1\in\mathscr{T})(M=A\cap T_1) \\ M\in\mathscr{T}_B \Rightarrow (\exists T_2\in\mathscr{T})(M=B\cap T_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M=(A\cap T_1)\cap(B\cap T_2) \\ M=(A\cap B)\cap(T_1\cap T_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$M\subset A\cap B$ olduğundan, $(T=T_1\cap T_2)$ konumuyla,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow M=(A\cap B)\cap T, \quad (T=T_1\cap T_2) \\ &\Rightarrow M=T \end{aligned}$$

çıkar; yani $M \in \mathscr{T}$ dir.

M alt-uzaylarda kapalı ise, önceki özelik uyarınca

$$\left.\begin{cases} M \in \mathscr{T}_A^{'} & \Rightarrow M' \in \mathscr{T}_A \\ M \in \mathscr{T}_B^{'} & \Rightarrow M' \in \mathscr{T}_B \end{cases}\right\} \Rightarrow M' \in \Rightarrow M \in \mathscr{T}'$$

çıkar.

11. Bir $(a, b]$ açık-kapalı aralığının $(-\infty, 0]$ ışınına ve $[a, b)$ kapalı-açık aralığının $[0, \infty)$ ışınına topolojik eşyapılı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f : [a, b) \to [0, \infty)$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım.

$$f(x) = \frac{x - a}{x - b}, \quad x \in [a, b)$$

Bu fonksiyon bbö 'dir. Ayrıca f ve f^{-1} süreklidir. O halde f bir topolololojik eşyapı dönüşümüdür. Dolayısıyla $[a, b)$ kapalı-açık aralığı $[0, \infty)$ ışınına topolojik eşyapılıdır. $(a, b]$ açık-kapalı aralığının $(-\infty, 0]$ ışınına eşyapılı olduğu da benzer yolla gösterilir.

12. Bir çember yayının her hangi bir noktası atılıyor. Kalan yayın gerçel eksendeki her hangi bir açık aralığa eşyapılı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Kutup noktası atılmış birim çemberi düzlemde $A = \{(\sin t, \cos t) | t \in (-\pi, \pi)$ ile temsil edebiliriz.

$$f : t \to (\cos t, \sin t)$$

fonksiyonu $(-\pi, \pi)$ den A üzerine bir topolojik eşyapı dönüşümüdür. Öyleyse, $(-\pi, pi)$ ile A eşyapılıdır. Öte yandan, A kümesi tek noktası atılmış bütün çember yaylarına ve $(-\pi, \pi)$ açık aralığı bütün (a, b) açık aralıklarına eşyapılıdır. Eşyapılı olma bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan, sözü edilen bütün bu kümeler topolojik eşyapılıdırlar.

13. Açık bir diskin (açık daire) düzleme topolojik eşyapılı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$f(z) = \frac{z}{1 - |z|^2}$$

fonksiyonu $D = \{z : |z| < 1$ açık birim diskinden karmaşık düzleme bir eşyapı dönüşümüdür (homeomorphism). O halde $D \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ olur.

14. Açık bir aralık $\mathbb{R}$ de açık olduğu halde $\mathbb{R}^2$ de kapalıdır. Gösteriniz.

Çözüm: R^2 uzayında yatay eksen üzerinde bir (a,b) aralığını düşünelim. Her $x \in (a,b)$ için, merkezi x noktasında olan her açık disk (a,b) ile kesişir. O halde, (a,b) nin her noktası bir kaplama noktasıdır. Önerme 2.4.3 uyarınca, bütün kaplama noktalarını içeren (a,b) aralığı R^2 uzayında kapalıdır.

15. $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde

$$\mathscr{T} = \{T_n \,:\, T_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}\} \tag{8.9}$$

ailesi bir topolojidir. Gösteriniz.

Çözüm:

T1. Bu aksiyomun [T2] ve [T3] aksiyomlarından çıktığını biliyoruz (bkz. 2.1.1(10.) Problem).

T2. $T_k, T_m \in \mathscr{T}$ ise $r = \max\{k, m\}$ olmak üzere $T_k \cap T_m = T_r \in \mathscr{T}$ dir.

T3. $T_i \in \mathscr{T}$, $(i \in I \subset \mathbb{N})$ ise $r = \min\{i : i \in I\}$ olmak üzere

$$\bigcup_{i \in I} T_i = T_r \in \mathscr{T}$$

dir.

16. (8.9) topolojisine göre $A = \{3, 5, 7, 9\}$ alt kümesinin kaplamını bulunuz.

Çözüm: $A = \{3, 5, 7, 9\}$ alt kümesini kapsayan kapalı kümeler $T_{10}, T_{11}, T_{12}, \ldots$ kümelerinin tümleyenleridir; bu kümeler, sırasıyla,

$$T_{10}^{'} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \tag{8.10}$$

$$T_{11}^{'} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \tag{8.11}$$

$$T_{12}^{'} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \tag{8.12}$$

$$\cdots \tag{8.13}$$

kümeleridir. A kümesini kapsayan bütün kapalı kümelerin arakesiti $\bar{A}$ kaplamına eşittir. O halde,

$$\bar{A} = \bigcap_{n=10}^{\infty} T_n^{'} = T_{10}^{'} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

olur.

17. (8.9) topolojisine göre $B = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$ alt kümesinin kaplamını bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki düşünüşle

$$\bar{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

olduğu görülür.

18. (8.9) topolojisine göre $C = \{9, 16, 27, 38, \ldots\}$ alt kümesinin yığılma noktalarını bulunuz.

Çözüm: Her $k \in \mathbb{N}$ tamsayısı C kümesinin bir yığılma noktasıdır. Çünkü, $k \in T_n$ ise $C \cap T_n \neq \emptyset$ dir.

19. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu verilsin. $\mathscr{T}$ topolojisi ne kadar ince dokulu olursa f nin sürekli olma olasılığı o kadar artar; $\mathscr{T}$ topolojisi ne kadar kaba dokulu olursa f nin sürekli olma olasılığı o kadar azalır. Tersine olarak, $\mathscr{S}$ topolojisi ne kadar ince dokulu olursa f nin sürekli olma olasılığı o kadar azalır; $\mathscr{S}$ topolojisi ne kadar kaba dokulu olursa f nin sürekli olma olasılığı o kadar artar. Örneklerle gösteriniz.

Çözüm:

Örnek 1: $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ alt-limit topolojisi ve $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ salt topoloji ise $I : (\mathbb{R}, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{R})$ özdeşlik dönüşümü süreklidir; ama $I : (\mathbb{R}, \mathscr{R}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{A})$ özdeşlik dönüşümü sürekli değildir.

Örnek 2: $(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ üst-limit topolojisi ve $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ salt topoloji ise $I : (\mathbb{R}, \mathscr{U}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{R})$ özdeşlik dönüşümü süreklidir; ama $I : (\mathbb{R}, \mathscr{R}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{U})$ özdeşlik dönüşümü sürekli değildir.

Örnek 3: Ayrık uzaydan her hangi bir uzaya tanımlı her fonksiyon süreklidir; ama ayrık olmayan uzaydan ancak ayrık olmayan uzaya tanımlı fonksiyonlar süreklidir.

20. Bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ iki topoloji ise,

$$\mathscr{T} \cap \mathscr{S} = \{T \cap S \quad : \quad T \in \mathscr{T} \quad \text{ve} \quad S \in \mathscr{S}\} \tag{8.14}$$

arakesiti X kümesi üzerinde bir topolojidir. Ama

$$\mathscr{T} \cup \mathscr{S} = \{T, S \quad : \quad T \in \mathscr{T} \quad \text{ve} \quad S \in \mathscr{S}\} \tag{8.15}$$

bileşimi X kümesi üzerinde, genellikle, bir topoloji değildir. $\mathscr{T} \cup \mathscr{S}$ bileşimin X kümesi üzerinde bir topoloji olduğu duruma bir örnek veriniz.

Çözüm: $\mathscr{T} \cap \mathscr{S}$ nin topoloji olduğunu 2.1.1(7.) Problemde gösterdik. $\mathscr{T} \cup \mathscr{S}$ nin topoloji olmayabileceğini 2.1.1(8.) Problemde gösterdik. $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topoloji ile alt-limit topolojilerinin bileşimi bir topoloji olur. Genel olarak $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ ise $\mathscr{T} \cup \mathscr{S}$ bileşiminin bir topoloji olacağı açıktır. Ama bu koşul gerekli değildir. Örneğin, sonlu tümleyenler topolojisi ile sayılabilir tümleyenler topolojisinin bileşimi bir topoloji olur.

21. (8.14) ailesini kapsayan en kaba ve en ince topolojiler hangileridir?

Çözüm: En kaba topoloji arakesit ile belirlenen topolojidir (en büyük alt sınır). En ince topoloji ayrık topolojidir.

22. (8.15) ailesini kapsayan en kaba ve en ince topolojiler hangileridir?

Çözüm: En kaba topoloji bileşimi alt-taban kabul eden topolojidir (en büyük alt sınır). En ince topoloji ayrık topolojidir.

23. Yoğunluk geçişlidir; yani $(X, \mathscr{T})$ uzayında $A \supset B \supset C$ olmak üzere B kümesi A içinde yoğun ve C kümesi B içinde yoğun ise C kümesi A içinde yoğundur. Gösteriniz.

Çözüm: Kaplama tanımından

$$C \subset B \subset A \Rightarrow \bar{C} \subset \bar{B} \subset \bar{A} \tag{8.16}$$

olduğu açıktır. Yoğunluk tanımından,

$$\bar{C} \supset B \Rightarrow \overline{\overline{C}} \supset \bar{B} \Rightarrow \bar{C} \supset \bar{B} \tag{8.17}$$

$$\bar{B} \supset A \Rightarrow \overline{\overline{B}} \supset \bar{A} \Rightarrow \bar{B} \supset \bar{A} \tag{8.18}$$

yazılabilir. (8.16), (8.17), (8.18) den $\bar{C} = \bar{A}$ sonucu çıkar.

24. A kümesi $(X, \mathscr{T})$ uzayında yoğun, $(A, \mathscr{T}_A)$ alt uzayında $V \in \mathscr{B}(x)$ ise V nin $(X, \mathscr{T})$ uzayındaki $\bar{V}$ kaplamı $(X, \mathscr{T})$ uzayında x noktasının bir komşuluğudur. Gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
V \in \mathscr{B}_A(x) &\Rightarrow (\exists T_A \in \mathscr{T}_A)(x \in T_A \subset V) \\
&\Rightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in T_A = T \cap A \subset V) \\
&\Rightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in (T \cap A) \subset (V \cap A)) \\
&\Rightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in \overline{(T \cap A)}_A \subset \overline{(V \cap A)}_A) \\
&\qquad\qquad \text{8.4.(8-b) Problem uyarınca} \\
&\Rightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in \overline{(T \cap A)} \subset \overline{(V \cap A)}) \\
&\Rightarrow \overline{V} \in \mathscr{B}(x)
\end{aligned}$$

25. $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki bütün mümkün topolojiler arasında birbiriyle karşılaştırılamayan; yani $\mathscr{T}_1 \nsubseteq \mathscr{T}_2$ ve $\mathscr{T}_1 \nsupseteq \mathscr{T}_2$ olan iki topoloji bulunuz.

Çözüm: Örnek 2.1.3 ile verilen $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ ve $\mathscr{T}_3$ topolojileri birbirleriyle karşılaştırılamaz topolojilerdir.

26. Salt topolojiye göre $\mathbb{R}$ uzayında $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ ve $\overline{A \cap B}$ kümelerinin birbirlerinden farklı olduğu A ve B kümeleri bulunuz.

Çözüm: A kümesi $(0,1)$ aralığındaki rasyonel sayılar, B kümesi ise $(0,1)$ aralığındaki irrasyonel sayılar olsun. $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ ve $B = (0,1) \cap \mathbb{Q}'$ dür. $\bar{A} = [0,1]$, $\bar{B} = [0,1]$ ve $A \cap B = \emptyset$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&A \cap \bar{B} = A \\
&\bar{A} \cap B = B \\
&\overline{(A \cap B)} = \overline{(\emptyset)} = \emptyset \\
&\bar{A} \cap \bar{B} = [0,1]
\end{aligned}$$

olur.

27. X kümesi üzerinde tanımlı $\{\mathscr{T}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ topolojiler ailesi verilsin.

$$\mathscr{T} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{T}_\lambda = \{T : (\forall \lambda \in \Lambda)\ T \in \mathscr{T}_\lambda\} \tag{8.19}$$

arakesitinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bkz. 2.1.1(9.) problem.

28. X kümesi üzerinde tanımlı $\{\mathscr{T}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ topolojiler ailesi verilsin.

$$\mathscr{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{T}_\lambda = \{T : (\exists \lambda \in \Lambda)\ T \in \mathscr{T}_\lambda\} \tag{8.20}$$

bileşim ailesinin X üzerinde bir topoloji olmadığını gösteriniz. $\mathscr{S}$ ailesinin ürettiği topolojiyi açıklayınız.

Çözüm: Bkz. Önerme 7.2.4.