8.2 TÜMEL TOPOLOJİ

8.2.1 Problemler

1. `Tanım 8.2.3` gösterimleri altında,

$$\mathscr{D} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{T}_i \tag{8.3}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $\imath \in I$ için $f_\imath : (Y_\imath, \mathscr{T}_\imath) \to (X, \mathscr{D})$ özdeşlik dönüşümü sürekli olduğundan, Önerme 7.1.1 uyarınca, her $\imath \in I$ için $\mathscr{D} \subset \mathscr{T}_\imath$ olur. O halde

$$\mathscr{D} \subset \bigcap_{i \in I} \mathscr{T}_i \tag{8.4}$$

kapsaması vardır. Öte yandan, $\mathscr{D}$ tümel topolojisi $\{f_\imath\}$ özdeşlik dönüşümlerini sürekli kılan topolojilerin en incesi olduğundan

$$\mathscr{D} \supset \bigcap_{i \in I} \mathscr{T}_i \tag{8.5}$$

bağıntısı vardır. **??** ve **??** den istenen **??** eşitliği çıkar.

2. Bire-bir ve örten

$$f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$$

fonksiyonunun bir eşyapı resmi olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathscr{S}$ nin, Y üzerindeki topolojiler arasında f fonksiyonunu sürekli kılanların en ince dokulusu olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm: Olmayana Ergi Yöntemini kullanacağız. $\mathscr{S}$ den daha ince olan ve f fonksiyonunu sürekli kılan bir $\mathscr{U}$ topolojisi var olsun. $\mathscr{S} \subset \mathscr{U}$ olacaktır. f fonksiyonu $\mathscr{T} - \mathscr{U}$ sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} U \in \mathscr{U} &\Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathscr{T} \\ &\Rightarrow f o f^{-1}(U) = U \in \mathscr{S} \end{aligned}$$

olduğundan, $\mathscr{U} \subset \mathscr{S}$ dir, ki bu kabulümüzle çelişir. O halde, $\mathscr{S}$ den daha ince olan ve f fonksiyonunu sürekli kılan bir $\mathscr{U}$ topolojisi yoktur.