Bölüm 8

DÖNÜŞÜMLERLE KONDURULAN TOPOLOJİLER

8.1 İZDÜŞEL TOPOLOJİ

8.1.1 Problemler

1. `Örnek 8.1.2` ile verilen ters resim topolojisinin açık ve kapalı kümelerinin sırasıyla, $\mathscr{S}$ nin açık ve kapalı kümelerinin ters resimlerinden ibaret olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $f : X \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonunun X üzerine kondurduğu izdüşel topolojiye (ters resim topolojisi) $\mathscr{H}$ diyelim. Önerme 8.1.1 uyarınca

   $$\mathfrak{S} = \{f^{-1}(S) : S \in \mathscr{S}\} \tag{8.1}$$

   ailesi $\mathscr{H}$ topolojisinin bir alt-tabanıdır. Bu ailenin sonlu arakesitlerinin oluşturduğu aileyi $\mathcal{S}$ ile gösterelim.

   $$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(S_i)$$

   $$f^{-1}\left(\bigcup_{\imath \in I} S_\imath\right) = \bigcup_{\imath \in I} f^{-1}(S_\imath)$$

   eşitliklerinden $\mathfrak{S} = \mathcal{S} = \mathcal{S}^* = \mathscr{H}$ olduğu görülür. O halde, 8.1 gereğince

   $$T \in \mathscr{H} \Leftrightarrow (\exists S \in \mathscr{S})(T = f^{-1}(S)$$

dir. Önerme 6.2.1(c) uyarınca, L kümesi $\mathscr{S}$ topolojisinde kapalı ise $f^{-1}(L)$ ters resmi $\mathscr{H}$ topolojisinde kapalı olacaktır. Karşıt olarak, K kümesi $\mathscr{H}$ topolojisinde kapalı ise K' açıktır. 8.1 gereğince, $K' = f^{-1}(S)$ olacak biçimde bir $S \in \mathscr{S}$ açık kümesi vardır. S' kapalıdır ve $K' = f^{-1}(S')$ dür. O halde, $\mathscr{H}$ topolojisinin kapalı kümeleri $\mathscr{S}$ topolojisinin kapalı kümelerinin ters resimleridir.

2. Yine yukarıdaki örnekte, her $x \in X$ için W kümeleri $\mathscr{S}$ ye göre $f(x)$ noktasının bir komşuluklar tabanını tarıyorsa X üzerinde $\mathscr{S}$ nin ters resim topolojisine göre, $f^{-1}(W)$ kümeleri x noktasının bir komşuluklar tabanını tarayacaktır. Gösteriniz.

   Çözüm:

$$\begin{aligned} W \in \mathscr{B}(f(x)) &\Rightarrow (\exists S \in \mathscr{S})(f(x) \in S \subset W \\ &\Rightarrow (x \in f^{-1}(S) \subset f^{-1}(W) \in \mathscr{B}((f(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \in \mathscr{B}(x) &\Rightarrow (\exists T \in \mathscr{H})(x \in T \subset B) \\ &\Rightarrow (\exists S \in \mathscr{S})(x \in T = f^{-1}(S) \subset B) \end{aligned}$$

3. $(X, \mathscr{T}$ ve $(Y, \mathscr{S})$ uzayları ile bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. f nin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, X üzerinde $\mathscr{S}$ nin ters resim topolojisi olan $\mathscr{H}$ topolojisinin $\mathscr{T}$ topolojisinden daha kaba dokulu olmasıdır. Gösteriniz.

   Çözüm: $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu sürekli ise $S \in \mathscr{S} \Rightarrow f^{-1}(S) \in \mathscr{T}$ dir. Buradan, 8.1 gereğince, $\mathfrak{S}^* = \mathscr{H} \subset \mathscr{T}$ olur.

4. `Örnek 8.1.3` gösterimleri altında, $\mathscr{H}$ izdüşel topolojisi, X üzerindeki topolojiler arasında her $\imath \in I$ için $f_\imath$ özdeşlik fonksiyonunu sürekli kılan topolojilerin arakesitine eşittir. Gösteriniz. Bunun `Önerme 7.2.4` ile eşdeğer olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Bütün $f_\imath : X \to (X, \mathscr{T}_\imath)$ sürekli özdeşlik fonksiyonlarının ailesini $\mathscr{F} = \{f_\imath\}$ ile ve sözkonusu topolojilerin arakesitini

$$\mathscr{T} = \bigcap_{\imath \in I} \mathscr{T}_\imath \tag{8.2}$$

   ile gösterelim. Başka bir deyişle

$$\mathscr{T}_\imath \in \mathscr{T} \Leftrightarrow f_\imath : X \to (X, \mathscr{T}_\imath) \text{ sürekli}$$

   bağıntısı vardır. $\mathscr{H}$ izdüşel topolojisi $\mathscr{F}$ ye ait her $f_\imath$ fonksiyonunu sürekli kılar. O halde, 8.2 gereğince $\mathscr{H} \supset \mathscr{T}$ dir. Karşıt olarak, $\mathscr{H}$ nın tanımı uyarınca,

$$T \in \mathscr{T} \Rightarrow (\forall \imath \in I)(T = f_\imath^{-1}(T) \in \mathscr{H}$$

dır. Öyleyse $\mathscr{T} = \mathscr{H}$ olur.

Öte yandan, Önerme 8.1.1 gereğince

$$\mathfrak{S} = \{f_\imath^{-1}(T) : T \in \mathscr{T}_\imath\}$$

ailesi $\mathscr{H} = \mathscr{T}$ izdüşel topolojisinin bir alt-tabanıdır. Önerme 7.2.4 uyarınca, $\mathfrak{S}$ ailesini alt taban kabul eden $\mathscr{H}$ topolojisi $\mathscr{T}_\imath$ topolojilerinin en küçük üst sınırıdır.

5. Bir X kümesi ile bir $\mathscr{Y} = \{(Y\imath, \mathscr{T}_\imath) : \imath \in I\}$ topolojik uzaylar ailesi veriliyor. Eğer $\mathcal{F} = \{f_\imath : X \to Y\imath\}$ sabit fonksiyonlardan oluşan bir aile ise, $\mathcal{F}$ ye göre $\mathscr{Y}$ nin X üzerindeki izdüşel topolojisini bulunuz.

   Çözüm: X üzerindeki ayrık olmayan topoloji $\mathcal{F}$ ailesine ait bütün fonksiyonları sürekli kılar (bkz.Problem 6.2.1(4)).O halde, önceki problem gereğince, ayrık topoloji aranan izdüşel topolojidir.

6. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde

$$\mathcal{F} = \{f_{ab} : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathscr{R}) \,|\, f_{ab} : x \rightsquigarrow ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

   fonksiyonlarını, yani $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bütün doğrusal fonksiyonları sürekli kılan en kaba dokulu topolojinin yine gerçel eksenin $\mathscr{R}$ salt topolojisi olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Her $f_{ab} \in \mathcal{F}$ doğrusal dönüşümünün bir topolojik eşyapı dönüşümü olduğunu biliyoruz (bkz Örnek 6.3.4). Buradan

$$T \in \mathscr{R} \Leftrightarrow f_{ab}^{-1}(T) \in \mathscr{R}$$

   olduğu görülür. O halde, her $a, b \in \mathbb{R}$ için $f_{ab}^{-1}(\mathscr{R}) = \mathscr{R}$ olacaktır, ki bu

$$\{f_{ab}^{-1}(\mathscr{R}) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathscr{R}$$

   eşitliğinin varlığı demektir. Bu eşitliğin sol yanı, $\mathcal{F}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerine kondurduğu izdüşel topolojidir. $\square$

7. $\mathbb{R}$ üzerindeki alt-limit topolojisini $\mathscr{L}$ ile gösterelim. $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\mathcal{F} = \{f_{ab} : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathscr{L}) \,|\, f_{ab} : x \rightsquigarrow ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

   doğrusal dönüşümlerini sürekli kılan en kaba topolojinin ayrık topolojiden başkası olamayacağını; yani, $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ uzayının $\mathcal{F}$ ye göre $\mathbb{R}$ üzerindeki izdüşel topolojinin ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Sözkonusu izdüşel topolojiyi $\mathscr{T}$ ile gösterelim. Her $p \in \mathbb{R}$ için $\{p\}$ kümesinin $\mathscr{T}$-açık olduğunu göstermeliyiz. $f(x) = x - p$ ve $g(x) = -x + p$ fonksiyonları $\mathcal{F}$ ailesine aittirler. $B = [0, p)$ kümesi ise $\mathscr{L}$ topolojisine aittir.

$$f^{-1}(B) = [p, 2p), \quad g^{-1}(B) = (0, p]$$

ters resimleri $\mathscr{T}$ izdüşel topolojisinin alt-tabanına aittir. O halde bunların arakesiti

$$[p, 2p) \cap (0, p] = \{p\}$$

kümesi $\mathscr{T}$ topolojisine ait olacaktır; yani her $p \in \mathbb{R}$ için $\{p\} \in \mathscr{T}$ dir.