Bölüm 7

TOPOLOJİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

7.1 KABA ve İNCE DOKULULUK

7.1.1 KARŞILAŞTIRILABİLİR TOPOLOJİK YAPILAR

7.1.2 P R O B L E M L E R

1. Bir X kümesi üzerinde $\mathscr{T}$ ve $\mathscr{S}$ topolojileri veriliyor. $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ ise, gösteriniz ki her $A \subset X$ alt-kümesinin $\mathscr{T}$ ya göre içi, $\mathscr{S}$ ye göre içinden daha büyüktür.

   Çözüm Her $A \subset X$ için $A_{\mathscr{T}} \supset A_{\mathscr{S}}$ olduğunu

   $$\begin{aligned} x \in A_{\mathscr{S}} &\Rightarrow (\exists T_{\mathscr{S}} \in \mathscr{S})(x \in T_{\mathscr{S}} \in \mathscr{S}) \\ &\Rightarrow (\exists T_{\mathscr{S}} \in \mathscr{S})(x \in T_{\mathscr{S}} \in \mathscr{T}) \end{aligned}$$

   bağınsından görebiliriz. $\square$

2. Aynı bir alt-tabana sahip iki topolojinin eşit olacağını gösteriniz.

   Çözüm $\mathfrak{s}$ ortak alt-taban olsun. $\mathfrak{s}$ nın sonlu arakesitlerinden oluşan aileyi $\mathfrak{S}$ ile gösterelim. $\mathfrak{S}$ ailesi $\mathscr{S}$ ve $\mathscr{T}$ topolojileri için ortak taban olur. Ortak bir tabana sahip iki topoloji aynı olur:

   $$\left.\begin{aligned} \mathfrak{s} \subset \mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{S}^* = \mathscr{S} \\ \mathfrak{s} \subset \mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{S}^* = \mathscr{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathscr{S} = \mathscr{T}$$

□

3. Gerçel eksen üzerindeki salt topolojinin alt-limit topolojisinden kesinlikle daha kaba olduğunu gösteriniz.

Çözüm Bunun ispatı `Örnek 7.1.1` deki gibi yapılabilir. □

4. $\mathfrak{s}_1$ ve $\mathfrak{s}_2$ sırasıyla $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri için birer alt-taban olsunlar.

   (a) $\mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{s}_1$ ise $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$,

   (b) $\mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{s}_1 \subset \mathscr{T}_2$ ise $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$

   olduğunu gösteriniz.

Çözüm

(a) $\mathfrak{s}_1$ nın ürettiği topoloji tabanı $\mathfrak{S}_1$ ve $\mathfrak{s}_2$ nın ürettiği topoloji tabanı $\mathfrak{S}_2$ olsun.

$$\mathfrak{s}_2 \subset \mathfrak{s}_1 \Rightarrow \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_1 \Rightarrow \mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1 \tag{7.1}$$

□

(b)

$$\mathfrak{s}_1 \subset \mathscr{T}_2 \Rightarrow \mathfrak{S}_1 \subset \mathscr{T}_2 \tag{7.2}$$
$$\Rightarrow \mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2 \tag{7.3}$$

7.1 ve 7.3 dan istenen çıkar. □

7.2 TOPOLOJİLERİN SIRALANMASI

7.2.1 P R O B L E M L E R

1. Boş olmayan bir X kümesi üzerinde verilen bir topolojiler ailesinin *"daha kaba dokulu olmak"* bağıntısına göre tikel sıralanmış bir dizge oluşturduğunu gösteriniz (bkz. `Önerme 7.2.1`).

Çözüm Tikel (kısmi) sıralama bağıntısının `Tanım 1.4.1` ile verilen yansımalı, geçişli ve antisimetrik olma özeliklerinin, bir X kümesi üzerinde tanımlı bir Θ topolojiler ailesi tarafından sağlandığını göstermeliyiz.

(i) Her $\mathscr{T} \in \Theta$ için $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}$ olduğu açıktır.

(ii) Her $\mathscr{T}, \mathscr{S} \in \Theta$ için $(\mathscr{S} \subset \mathscr{T}) \wedge (\mathscr{S} \neq \mathscr{T})$ ise $\mathscr{T} \not\subset \mathscr{S}$ olacağı kümeler cebirinden bilinir. □

(iii) Her $\mathscr{T}, \mathscr{S}, \mathscr{H} \in \Theta$ için

$$(\mathscr{S} \subset \mathscr{T}) \wedge (\mathscr{T} \subset \mathscr{H}) \Rightarrow \mathscr{S} \subset \mathscr{H})$$

olduğu da kümeler cebirinden bilinir.

2. İkinci Sayılabilme Aksiyomunu sağlayan uzay, Birinci Sayılabilme Aksiyomunu da sağlar. Gösteriniz.

Çözüm $(X, \mathscr{T})$ uzayı *İkinci Sayılabilme Aksiyomunu* sağlıyorsa, `Tanım 4.1.3` gereğince sayılabilir bir topoloji tabanı vardır. buna $\mathfrak{S} = \{S_i : i \in \mathbb{N}\}$ diyelim. Komşuluk tanımı uyarınca $\forall(x \in X)(\forall B \in \mathscr{B}(x))$ için $x \in T_B \subset B$ olacak biçimde bir $T_B \in \mathscr{T}$ açık kümesi vardır. Öte yandan, $\mathfrak{S}$ taban olduğundan $x \in S_i \subset T_B$ olacak biçimde bir $S_i \in \mathfrak{S}$ bulunabilir. Bu koşulu sağlayan $\{S_i\}$ ailesi $x \in X$ noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır.