6.3 AÇIK ve KAPALI DÖNÜŞÜMLER

6.3.1 P R O B L E M L E R

1. Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlanan sabit bir fonksiyonun sürekli ve kapalı bir dönüşüm olduğunu; ama açık bir dönüşüm olmadığını gösteriniz.

   Çözüm: $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayında her nokta kapalı bir kümedir. Dolayısıyla, $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ den $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ ye tanımlı her sabit fonksiyon her alt kümeyi sabit bir noktadan oluşan kapalı bir kümeye resmeder. Özel olarak kapalı kümeleri kapalı kümelere resmedeceği için sabir fonksiyon kapalı bir dönüşümdür. Sabit fonksiyonun sürekli olduğunu Problem 6.2.1(2) den biliyoruz.

2. Gerçel sayılardan gerçel sayılara tanımlanan $f : x \longrightarrow x^2$ fonksiyonun açık olmadığını gösteriniz.

   Çözüm: $A = (-1, 1)$ aralığını alalım. A açıktır. Ancak $f(A) = [0, 1)$ kümesidir. Bu küme ne açık ne kapalıdır. O halde, f açık bir dönüşüm olamaz.

3. `Önerme 6.3.1` ve `Önerme 6.3.2` yi ispatlayınız.

   Çözüm:

   Önerme 6.3.1 : f bir topolojik eşyapı resmi ise, Önerme 2.1.1 uyarınca

   (a) f bbö dir.
   (b) f açık bir dönüşümdür.
   (c) f^{-1} açık bir dönüşümdür.

   Sonuncu koşul f nin sürekli olmasını gerektirir. O halde, topolojik eşyapı dönüşümleri açık ve sürekli dönüşümlerdir.
   Benzer olarak, f bir topolojik eşyapı resmi ise, Önerme 2.2.2 uyarınca

   (a) f bbö dir.
   (b) f kapalı bir dönüşümdür.
   (c) f^{-1} kapalı bir dönüşümdür.

   Sonuncu koşul f nin sürekli olmasını gerektirir. O halde, topolojik eşyapı dönüşümleri kapalı ve sürekli dönüşümlerdir.

   Önerme 6.3.2 : $f : (X, \mathscr{T}) \rightarrow (Y, \mathscr{S})$ bir topolojik eşyapı tesmi ise, yukarıda ispatını yaptığımız Önerme 6.3.1 uyarınca

   (a) f bbö dir.
   (b) f sürekli ve açık (sürekli ve kapalı) bir dönüşümdür.
   (c) f^{-1} açık (kapalı) bir dönüşümdür.

bbö olduğu için $(f^{-1})^{-1} = f$ olduğu açıktır. f açık olduğuna göre f^{-1} süreklidir. Demek ki f ile f^{-1} dönüşümleri bbö, hem sürekli hem açık (kapalı) dönüşümlerdir. Tersine olarak, bu koşulların sağlanması Önerme 2.1.1 ya da Önerme 2.2.2 nin hipotezlerinin sağlanması demektir. Dolayısıyla, hem f hem f^{-1} topolojik eşyapı dönüşümleridir.

4. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ bire-bir örten bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bir topolojik eşyapı resmi olması için gerekli ve yeterli koşul, her $A \subset X$ alt-kümesi için $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ olmasıdır. Gösteriniz.

   Çözüm: f topolojik eşyapı dönüşümü ise, Önerme 6.3.1 uyarınca sürekli ve kapalı (açık) olmalıdır. Oysa, f nin sürekli ve kapalı olması için Önerme 6.3.4 uyarınca, her $A \subset X$ alt-kümesi için $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ olması gerekli ve yeterlidir.

5. $(X, \mathscr{T})$ uzayının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul, X uzayından her Y uzayına tanımlı fonksiyonların sürekli olmasıdır.

   Çözüm: $(X, \mathscr{A})$ uzayı ayrık uzay olsun. $I : (X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{A})$ özdeşlik dönüşümünün sürekli olması için $(X, \mathscr{T})$ uzayının ayrık olması gerekli ve yeterlidir. Ayrık olmayan hiç bir $\mathscr{T}$ topolojisi I özdeşlik dönüşümünü sürekli kılamaz.

6. Boş olmayan bir X kümesi veriliyor. X üzerinde öyle bir $\mathscr{T}$ topolojisi kurunuz ki, her $(Y, \mathscr{S})$ uzayından $(X, \mathscr{T})$ uzayına tanımlı her fonsiyon sürekli olsun. Bu topolojiyi belirleyiniz.

   Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ uzayının ayrık olmayan uzay ise her uzaydan buraya tanımlı her fonksiyon sürekli olur (bkz. Problem 6.2.1(4)).

7. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ sürekli ve örten bir fonksiyon ise, X uzayının yoğun alt kümelerini Y uzayının yoğun alt kümelerine resmeder; yani

$$\bar{A} = X \Rightarrow \overline{f(A)} = Y \tag{6.6}$$

   olur. Gösteriniz.

   Çözüm: f sürekli ise, Teorem 6.2.1 uyarınca $\bar{A} \subset \overline{f(A)}$ dır. A yoğun ise $\bar{A} = X$ olduğundan

$$Y = f(X) = f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$$

   olur. Oysa, bu kapsamanın tersi olan $Y \supset \overline{f(A)}$ daima vardır. O halde, $Y = \overline{f(A)}$ çıkar, ki bu (6.6) nın sağlanması demektir.