Bölüm 6

SÜREKLİ FONKSİYONLAR

6.1 YEREL SÜREKLİLİK

6.2 YAYGIN SÜREKLİLİK

6.2.1 Problemler

1. Bir topolojik uzaydan kendisine olan özdeşlik dönüşümü süreklidir. Neden?

   Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $I : (X, \mathscr{T}) \longrightarrow (X, \mathscr{T})$ özdeşlik dönüşümü ise;

   (a) I bbö dir,

   (b) Her $T \in \mathscr{T}$ için $I(T) = T$ ve $I^{-1}(T) = T$ olduğundan I ve I^{-1} açık kümeleri açık kümelere resmederler.

   O halde, Önerme 2.1.1 sağlanır.

2. Her hangi bir topolojik uzaydan başka bir topolojik uzaya olan sabit fonksiyonlar süreklidir. Neden?

   Çözüm: $f : (X, \mathscr{T}) \longrightarrow (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu her $x \in X$ için $f(x) = y_0$, $(y_0 \in Y$ sabit) koulunu sağlasın. Her $S \in \mathscr{S}$ için

$$f^{-1}(S) = \begin{cases} X, & y_0 \in S \\ \emptyset, & y_0 \notin S \end{cases} \tag{6.1}$$

   olur. Her iki halde de açık kümelerin f^{-1} ters dönüşümü altındaki resimleri açıktır. O halde, f süreklidir.

3. Bir ayrık uzaydan her hangi bir topolojik uzaya olan fonksiyonlar süreklidir. Neden?

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ her hangi bir topolojik uzay ve $(A, \mathscr{A})$ ayrık uzay olsun. Bir $f : (A, \mathscr{A}) \longrightarrow (X, \mathscr{T})$ fonksiyonu verilsin. Her $T \in \mathscr{T}$ için $f^{-1}(T) \subset A$ dır ve A nın her alt kümesi ayrık topolojiye göre açıktır; yani

$$T \in \mathscr{T} \Rightarrow f^{-1}(T) \in \mathscr{A}$$

dır. Açık kümelerin f^{-1} ters dönüşümü altındaki resimleri açık olduğundan, f süreklidir.

4. Her hangi bir topolojik uzaydan ayrık olmayan bir uzaya olan fonksiyonlar süreklidir. Neden?

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ her hangi bir topolojik uzay ve $(F, \mathscr{F})$ ayrık olmayan bir uzay olsun. Bir $f : (X, \mathscr{T}) \longrightarrow (F, \mathscr{F})$ fonksiyonu verilsin. $\mathscr{F}$ nin açık kümeleri yalnızca $\{\emptyset, F\}$ dir.

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathscr{T}, \quad f^{-1}(F) = X \in \mathscr{T}$$

olduğundan; yani açık kümelerin f^{-1} ters dönüşümü altındaki resimleri açık olduğundan, f süreklidir.

5. $(X, \mathscr{T})$ ve $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayları ile $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $\mathfrak{s}$ ailesi $\mathscr{S}$ nin bir alt tabanı ise, f nin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her $S \in \mathfrak{s}$ için $f^{-1}(S) \in \mathscr{T}$ olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm:

Gerekliği: $\mathfrak{s}$ alt tabanına ait her küme açıktır. Çünkü

$$\mathfrak{s} \subset \mathfrak{S} \subset \mathscr{S}$$

kapsamaları vardır. Öyleyse, f fonksiyonu sürekli ise,

$$S \in \mathfrak{s} \Rightarrow f^{-1}(S) \in \mathscr{T} \tag{6.2}$$

olmalıdır.

Yeterliği: Tersine olarak 6.2 sağlansın. Her H için

$$H \in \mathscr{S} \Rightarrow f^{-1}(H) \in \mathscr{T} \tag{6.3}$$

olduğunu göstermeliyiz. $\mathfrak{s}$ alt-tabanının bütün sonlu arakesitlerinin oluşturduğu aile $\mathfrak{S}$ tabanıdır. $\mathscr{T}$ topolojisine ait her açık küme $\mathscr{T}$ tabanına ait bazı kümelerin bir bileşimi olarak yazılabilir. O halde, $H \in \mathscr{S}$ ise

$$H = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{k=1}^{n} S_{i_k} \right)$$

olacak biçimde $S_{i_k} \in \mathfrak{s}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ kümeleri ile bir I damga kümesi vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f^{-1}(H) &= f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{k=1}^{n} S_{i_k}\right)\right) \\ &= \bigcup_{i\in I}\left(f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} S_{i_k}\right)\right) \\ &= \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\left(f^{-1}(S_{i_k})\right)\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Her $i \in I$ ve her $k = 1, 2, \ldots, n$ için $(f^{-1}(S_{i_k}) \in \mathscr{T}$ olduğundan, topolojinin [T2] ve [T3] aksiyomları sağ yanın $\mathscr{T}$ ye ait olduğunu söyler. Böylece, 6.2 sağlanıyorsa 6.3 bağıntısının da sağlandığı gösterilmiş oldu.

6. Bir $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayından bir $(Y, \mathscr{S})$ topolojik uzayı içine bir f fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki ifadelerin eşdeğer olduklarını gösteriniz:

   (a) f fonksiyonu X üzerinde süreklidir,

   (b) Her $A \subset Y$ alt kümesi için $f^{-1}(A^\circ) \subset \left(f^{-1}(A)\right)^\circ$ dır,

   (c) Her $A \subseteq Y$ alt kümesi için $f^{-1}(\bar{A}) \supset \overline{(f^{-1}(A))}$ dır.

Çözüm:

(a) ⇒ (b):

$$A^o \subset A \Rightarrow f^{-1}(A^o) \subset f^{-1}(A)$$

dır. Oysa f sürekli olduğundan $f^{-1}(A^o)$ açıktır. Öyleyse $f^{-1}(A)$ nin içlemi tarafından kapsanır; yani

$$f^{-1}(A^o) \subset (f^{-1}(A))^o \tag{6.4}$$

olur.

(b) ⇒ (a):

$$S \in \mathscr{S} \Rightarrow f^{-1}(S) \in \mathscr{T}$$

olduğunu göstereceğiz. S açık ise $S = S^o$ olduğundan, 6.4 uyarınca

$$f^{-1}(S) = f^{-1}(S^o) \subset (f^{-1}(S))^o$$

dir. Oysa, bu kapsamanın tersi olan

$$f^{-1}(S) \supset (f^{-1}(S))^o$$

daima vardır. Demek ki $f^{-1}(S) = (f^{-1}(S))^o \in \mathscr{T}$ dir.

(a) $\Rightarrow$ (c):

$$\bar{A} \supset A \Rightarrow f^{-1}(\bar{A}) \supset f^{-1}(A)$$

dır. Oysa f sürekli olduğundan $f^{-1}(\bar{A})$ kapalıdır. Öyleyse $f^{-1}(A)$ nın kaplamını kapsar (bkz. Önerme 2.5.1(d)). O halde

$$f^{-1}(\bar{A}) \supset \overline{(f^{-1}(A))} \tag{6.5}$$

olur.

(c) $\Rightarrow$ (a):

$$K \in \mathscr{S}' \Rightarrow f^{-1}(K) \in \mathscr{T}'$$

olduğunu göstereceğiz. K kapalı ise $K = \bar{K}$ olduğundan, 6.5 uyarınca

$$f^{-1}(K) = f^{-1}(\bar{K}) \supset \overline{(f^{-1}(K))}$$

dır. Oysa, bu kapsamanın tersi olan

$$f^{-1}(K) \subset \overline{(f^{-1}(K))}$$

daima vardır. Demek ki $f^{-1}(K) = \overline{(f^{-1}(K))} \in \mathscr{T}'$ dir.