5.3 KOMŞULUKLAR TABANI

5.4 KARMA PROBLEMLER

1. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve σ ailesi $\mathscr{T}$-topolojisinin bir alt tabanı olsun.

   (a) $\sigma(x) = \{S \in \sigma : x \in S\}$ ailesinin x noktası için bir komşuluklar tabanı olmayacağını bir örnekle gösteriniz.

   Çözüm: $\sigma = \{(-\infty, b), (a, +\infty) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ailesi salt topoloji için bir alt tabandır. $a < x < b$ olmak üzere $(a, b) \in \mathscr{B}(x)$ dir. $x \in (-\infty, b)$ ve $x \in (a, +\infty)$ dir; yani $(-\infty, b), (a, +\infty) \in \sigma(x)$ dir. Ama $(-\infty, b)$ ve $(a, +\infty)$ kümeleri (a, b) aralığı tarafından kapsanamaz.

   (b) $\sigma(x)$ ailesinin sonlu arakesitlerinin oluşturduğu ailenin x noktası için bir komşuluklar tabanı olacağını gösteriniz.

   Çözüm:
   $$V \in \mathscr{B}(x) \Leftrightarrow [(\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \subset V)$$
   olur. Öte yandan T açık kümesi σ nın sonlu arakesitleri ailesinin bir bileşimidir. O halde $T \in \sigma(x)$ dir.

2. Düzlemdeki her z noktasına karşılık, bu nokta merkez olarak çizilen, bütün açık dairelerden oluşan ailenin, salt topolojiye göre, z noktasının bir komşuluklar tabanı olduğunu gösteriniz.

   Çözüm:
   $$V \in \mathscr{B}(z) \Leftrightarrow [(\exists T \in \mathscr{T})(z \in T \subset V)$$
   olur. $z \in T$ düzlemde açık bir küme ise z merkezli ve T tarafından kapsanan açık bir disk vardır.

3. Düzlemdeki her z noktasına karşılık, bu nokta merkez olarak çizilen $\{\frac{1}{r} \quad (r = 1, 2, 3, \ldots)\}$ yarıçaplı açık disklerden oluşan ailenin, salt topolojiye göre, bu noktanın sayılabilir bir komşuluklar tabanı olduğunu gösteriniz. Buradan, düzlemin salt topolojisinin *birinci sayılabilme aksiyomunu* sağladığı sonucunu çıkarınız.

   Çözüm: Önceki problemde z merkezli açık disklerin bir komşuluklar tabanı olduğunu söylemiştik. Bu tabana ait her açık diskin içine z merkezli ve $\frac{1}{r}$ yarıçaplı bir açık disk çizilebilir. Çünkü, tabana ait diskin yarıçapı d ise, Arşimet kuralı gereğince $\frac{1}{r} < d$ olacak şekilde bir r doğal sayısı daima vardır.

4. Ayrık olmayan bir uzayda her hangi bir noktanın komşuluklar ailesi nedir? Ayrık bir uzayda her hangi bir noktanın komşuluklar ailesi nedir?

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ ayrık olmayan uzay ise, her noktanın komşuluğu yalnızca $\{X\}$ kümesidir.

$(X, \mathscr{A})$ ayrık uzay ise, her hangi bir noktanın komşuluğu o noktatı içeren kümeler ailesidir.

5. p öğesinin A kümesinin bir *yığılma noktası* olması için gerekli ve yeterli koşul, p nin komşuluklar tabanına ait her kümenin A ya ait ve p den farklı olan bir öğeyi içermesidir.

Çözüm: p noktasının komşuluklar tabanını $\mathfrak{S}(x)$ ile gösterelim. x noktasının her T komşuluğu için $x \in S \subset T$ olacak biçimde bir $S \in \mathfrak{S}(x)$ vardır. O halde,

$$\begin{aligned} p \in \tilde{A} &\Leftrightarrow ((\forall T \in \mathscr{T})(p \in T \subset A) \Rightarrow (T - \{p\}) \cap A \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow (\forall S \in \mathfrak{S}(x))(\forall T \in \mathscr{T})(p \in S \subset T) \Rightarrow (S - \{p\}) \cap A \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow (\forall S \in \mathfrak{S}(x)) \Rightarrow (S - \{p\}) \cap A \neq \emptyset) \end{aligned}$$

yazabiliriz.

6. Ayrık bir uzayda her noktanın sonlu bir komşuluklar tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Ayrık uzayda her $B \in \mathscr{B}(x)$ için $x \in \{x\} \subset B$ dir. O halde yalnız {x} den oluşan ile x noktasının bir komşuluklar tabanıdır.

7. Bir noktanın sonlu bir komşuluklar tabanı varsa, bu noktanın tek bir kümeden oluşan bir komşuluklar tabanı vardır. Gösteriniz.

Çözüm: x noktasının sonlu bir komşuluklar tabanı $\mathfrak{S}(x) = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ olsun. Komşuluklar tabanına ait her küme $\mathscr{B}(x)$ komşuluklar ailesine aittir. [N2] aksiyomu uyarınca sonlu sayıda komşuluğun arakesiti gene bir komşuluktur. O halde,

$$S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$$

dersek, $\{S\}$ ailesi bir komşuluklar tabanı olur. Çünkü, her $B \in \mathscr{B}(x)$ için $S_i \subset B$ olacak şekilde tabana ait bir S_i vardır. Oysa $s \subset S_i$ dir. Öyleyse, $B \in \mathscr{B}(x)$ için $S \subset B$ olur. O halde, $\{S\}$ ailesi x noktasının bir komşuluklar tabanıdır.

8. (a) $(X; \mathscr{T})$ topolojik uzayında $\mathscr{F}$ ailesi, kapalı kümeler için bir taban ise, bu aileye ait kümelerin tümleyenlerinden oluşan aile açık kümeler için bir tabandır.

   (b) Karşıt olarak, $(X; \mathscr{T})$ topolojik uzayında $\mathscr{B}$ ailesi, açık kümeler (topoloji) için bir taban ise, bu aileye ait kümelerin tümleyenlerinden oluşan aile kapalı kümeler için bir tabandır.

   Gösteriniz.

Çözüm:

(a)

$$\begin{aligned} T \in \mathscr{T} &\Leftrightarrow T' \quad \text{kapalı} \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(\exists F_i \in \mathscr{F})\left((T' = \bigcap_{i \in I} F_i\right) \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(\exists F_i \in \mathscr{F})\left((T = \bigcap_{i \in I} F_i^{'}\right) \end{aligned}$$

Demek ki, her açık T kümesi $\mathscr{F}$ ailesinin tümleyenlerinden oluşan ailenin bir alt-ailesinin bileşimi olarak yazılabilir. $F \in \mathscr{F} \Leftrightarrow F^{'} \in \mathscr{T}$ olduğundan istenen özelik ortaya çıkar.

(b)

$$\begin{aligned} K \quad \text{kapalı} &\Leftrightarrow K' \quad \text{açık} \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(\exists B_i \in \mathscr{B})\left((K' = \bigcup_{i \in I} B_i\right) \\ &\Leftrightarrow (\exists i \in I)(\exists B_i \in \mathscr{B})\left((K = \bigcap_{i \in I} B_i^{'}\right) \end{aligned}$$

Tabii, formülde K' eşitliğinden her $i \in I$ için $B_i \subset K_i^{'} \Leftrightarrow B_i^{'} \supset K$ dır. Ker kapalı K kümesi için bu yapılabildiğine göre, $\mathscr{B}$ tabanına ait kümelerin tümleyenlerinden oluşan aile kapalı kümeler için bir taban olur.

9. $(X, \leq)$ tam sıralanmış bir küme olsun. Her $a, b \in X$ öğe çiftine karşılık $\{x \in X : x > a\}$, $\{x \in X : x < b\}$ ve $\{x \in X : a < x < b\}$ kümeleri tanımlanıyor. a, b öğeleri bütün X kümesini taradığında elde edilecek bütün bu kümelerden oluşan $\mathscr{B}$ ailesinin X kümesi üzerinde bir topoloji tabanı olduğunu gösteriniz. Bu tabanın ürettiği topolojiye *sıra topolojisi* denir. Bu topolojik uzayın kapalı kümelerinin nasıl olduğunu belirleyiniz.

Çözüm: $\mathscr{B}$ ailesinin Önerme 4.1.3 ün ya da Önerme 4.1.7 nin hipotezlerini sağladığını göstermemiz gerekir.

(a)

$$X = \bigcup \{B \mid B \in \mathscr{B}\}$$

olduğu açıktır. Çünkü eşitliğin sağındaki bileşimi oluşturan her B kümesi X kümesi tarafından kapsanır. Tersine olarak, her $t \in X$ öğesi için $t \neq a$ olmak üzere ya $t \in \{x \in X : x > a\}$ ya da $t \in \{x \in X : x < a\}$ olmalıdır. Dolayısıyla, yukarıdaki eşitlik vardır.

(b) $\mathscr{B}$ ailesinin sonlu arakesit işlemine kapalı olduğu hemen görülüyor. O halde,Önerme 4.1.7 uyarınca, $\mathscr{B}^*$ bir topolojidir.

Problem 8(b) uyarınca,*sıra topolojisi*nin kapalı kümelerinin bir tabanı, açık kümeler için yukarıda verilen $\mathscr{B}$ topoloji tabanına ait kümelerin tümleyenlerinin oluşturduğu $\mathscr{K}$ ailesidir.

10. $\mathscr{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ailesinin $(X, \mathscr{A})$ ayrık uzayı için bir taban olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathscr{B}$ ailesinin Önerme 4.1.3 ün ya da Önerme 4.1.7 nin hipotezlerini sağladığını göstermemiz gerekir.

(a)
$$X = \bigcup\{B \mid B \in \mathscr{B}\} = \bigcup\{x\}\ x \in X$$
olduğu açıktır.

(b)
$$A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \cap B = \begin{cases} \emptyset, & A \neq B \\ \{x\}, & A = B = \{x\} \end{cases}$$

$A \cap B = \emptyset$ ise Önerme 4.1.3(b) sağlanır. $A \cap B = \{x\}$ ise $x \in C \subset A \cap B$ koşulunu sağlayan küme $C = \{x\} \in \mathscr{B}$ dir. Dolayısıyla, Önerme 4.1.3(b) gene sağlanır.

11. Ayrık olmayan $(X, \mathcal{T})$ uzayı için $\mathscr{B} = \{X\}$ ailesinin bir taban olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Ayrık olmayan uzayda topoloji tabanı yalnızca {X} kümesinden oluşur.

12. $\mathscr{B} = \{x : |x| < r, \quad x, r \in \mathbb{Q}\}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topoloji için bir taban olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathscr{B}$ ailesi sonlu arakesit işlemine kapalıdır. Önerme 4.1.7 uyarınca

$$\mathbb{R} = \bigcup\{B : B \in \mathscr{B}\} = \bigcup\{x : |x| < r, \quad x, r \in \mathbb{Q}\}$$

üzerinde bir $\mathscr{S}$ topoloji üretir. Önerme 4.1.8 uyarınca

$$\mathcal{R} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}$$

açık aralıklar ailesi salt topolojinin bir tabanıdır. $\mathscr{S}$ topolojisinin $\mathbb{R}$ üzerindeki $\mathscr{R}$ salt topolojisine eşit olduğunu; yani

$$\mathscr{S} = \mathscr{B}^* = \mathcal{R}^* = \mathscr{R}$$

olduğunu göstermek için Önerme 4.1.2 yi kullanabiliriz. $\{x : |x| < r\} = (x-r, x+r)$ dir. Gerçel eksenin her $(a,b) \in \mathcal{R}$ açık aralığı için $x \in (a,b)$ olduğunda $x \in (x-r, x+r) \subset (a,b)$ olacak biçimde, uç noktaları rasyonel olan bir $(x-r, x+r) \in \mathscr{B}$ açık aralığı daima bulunabilir. Örneğin, $r = \frac{1}{2}\min\{|x-a|, |x-b|\}$ almak yetecektir.

Tersine olarak, uç noktaları rasyonel olan her $(x-r, x+r) = (p,q)$ açık aralığı için $y \in (p,q)$ olduğunda $y \in (c,d) \subset (p,q)$ olacak biçimde bir $(c,d) = (y-\delta, y+\delta) \in \mathcal{R}$ açık aralığı daima bulunabilir. Örneğin, $\delta = \frac{1}{2}\min\{|y-p|, |y-q|\}$ almak yetecektir.