5.2 KOMŞULUKLAR SİSTEMİ

KOMŞULUKLAR SİSTEMİ İLE
TOPOLOJİK YAPILARIN KURULUŞU

5.2.1 PROBLEMLER

1. $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki salt topolojiyi (bkz. `Örnek 4.1.2`) kurmak için aşağıdaki komşuluklar dizgelerinden her hangi birisinin kullanılabileceğini gösteriniz.

   (a) Düzlemdeki her z noktasına karşılık, kenarları eksenlere paralel olan ve bu noktayı içeren her hangi bir açık dikdörtgeni kapsayan bütün kümelerin oluşturduğu aile,

   (b) Düzlemdeki her z noktasına karşılık, bu nokta merkez olarak çizilen her hangi açık bir diski kapsayan bütün kümelerin oluşturduğu aile,

   (c) Düzlemdeki her z noktasına karşılık, bu noktayı içeren ve kapalı bir eğriyle sınırlanmış her hangi bir bölgenin içini kapsayan bütün kümelerin oluşturduğu aile.

Çözüm: Çözüme geçmeden önce, düzlemin salt topolojisi için Örnek 4.1.2 ile verilen dört topoloji tabanı ile ilgili basit gerçekleri anımsayalım.

Düzlemde bir z noktası verildiğinde, bu noktayı köşegenlerinin kesim noktasına alan ve kenarları koordinat eksenlerine paralel olan açık bir dikdörtgen daima vardır. Bu dikdörtgen içerisine, merkezi köşegenlerin kesim noktasında olan bir açık disk daima çizilebilir. Her açık diskin içerisine tekrar bir açık dikdörtgen çizilebilir. O halde, Önerme 4.1.2 uyarınca, söz konusu açık dikdörtgenler ile açık diskler aynı topolojiyi üretirler.

Benzer olarak, her açık disk içine açık bir eşkenar üçgen ve her açık eşkenar üçgen içine bir açık disk çizilebilir. O halde, açık eşkenar üçgenlerle açık diskler aynı topolojiyi üretirler.

Son olarak, her açık disk içine açık bir kare ve her açık kare içine açık bir disk çizilebilir. O halde, açık karelerle açık diskler aynı topolojiyi üretirler.

Bu dört tabanın ayrı ayrı ürettikleri topolojiler aynıdır ve düzlemin salt topolojisi adını alır.

(a) Düzlemdeki her bir z noktasına karşılık varlığı söylenen aileye $\mathscr{B}(z)$ diyelim. Kenarları koordinat esenlerine paralel olan bütün açık dikdörtgenleri (kenarsız dikdörtgenler) $\mathscr{D}(z)$ ile gösterelim. Kolayca görüleceği gibi $\mathscr{D}(z)$ ailesi sonlu arakesit işlemine kapalıdır; yani $\mathscr{D}(z)$ ye ait sonlu sayıda açık dikdörtgenin arakesiti ya boştur ya da açık bir dikdörtgendir. Önce, $\mathscr{B}(z)$ ailesinin [N1]-[N4] komşuluk aksiyomlarını sağladığını göstereceğiz. Bunu gösterince, `Önerme 5.2.1` uyarınca, $\mathbb{R}^2$ düzleminde öyle bir $\mathscr{T}$ topolojisinin varlığını söyleyebiliriz ki, bu topolojiye göre her z noktasının komşuluklar ailesi $\mathscr{B}(z)$ olur.

N1. $A \in \mathscr{B}(z)$ ise $z \in D \subset A$ olacak biçimde bir $D \in \mathscr{D}$ vardır. Eğer $A \subset B$ ise $z \in D \subset B$ olacağından $B \in \mathscr{B}(z)$ olacaktır.

N2. $A \in \mathscr{B}(z)$ ise $z \in D \subset A$ olacak biçimde bir $D \in \mathscr{D}$ vardır. Eğer $A \subset B$ ise $z \in D \subset B$ olacağından $B \in \mathscr{B}(z)$ olacaktır. $A_1, A_2 \in \mathscr{B}(z)$ ise $z \in D_1 \subset A_1$ ve $z \in D_2 \subset A_2$ olacak biçimde $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ vardır. Buradan $z \in D_1 \cap D_2 \subset A_1 \cap A_2$ yazabiliriz. $D_1 \cap D_2 \in \mathscr{D}$ olduğundan, $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{B}(z)$ çıkar.

N3. $\mathscr{B}(z)$ ailesinin tanımı uyarınca, her $A \in \mathscr{B}(z)$ için $z \in D \subset A$ olacak biçimde bir $D \in \mathscr{D}$ vardır. Dolayısıyla, $z \in A$ olur.

N4. $V \in \mathscr{B}(z)$ olsun. $z \in D \subset V$ olacak biçimde bir $D \in \mathscr{D}$ vardır. $W = D$ alırsak her $y \in W$ için $V \in \mathscr{B}(y)$ olur.

Problemin çözümünü tamamlamak için, $\mathscr{D}^* = \mathscr{T}$ olduğunu göstermeliyiz. Önerme 5.2.1 uyarınca

$$\mathscr{T} = \{A \subset \mathbb{R}^2 |\ z \in A \Rightarrow A \in \mathscr{B}(z)\}$$

dir. Öte yandan, tanımımız uyarınca

$$T \in \mathscr{T} \Leftrightarrow \exists(D_z \in \mathscr{D})(z \in D_z \subset T)$$

olduğundan,

$$T = \bigcup_{z \in T} D_z$$

yazabiliriz. O halde, $\mathscr{T}$ topolojisine ait her açık küme $\mathscr{D}$ ye ait kümelerin bir bileşimi olarak yazılabiliyor. Öyleyse,

$$\mathscr{D}^* = \mathscr{T}$$

olur.

(b) Bunun ispatı yukarıdakine benzer olarak yapılabilir. Ama istersek, her açık diskin içerisine açık bir dikdörtgen çizilebileceği gerçeğini söyleyerek, bu şıkkın çözümünü önceki şıkka indirgeyebiliriz.

(c) z noktası düzlemde kapalı bir eğri ile sınırlanmış bir bölgenin iç noktası ise, bu iç bölge içine z merkezli açık bir disk veya açık bir dikdörtgen çizilebilir. Dolayısıyla, bu şıkkın ispatı (a) veya (b) ye indirgenebilir.