Bölüm 5

KOMŞULUKLAR

5.1 KOMŞULUKLAR

5.1.1 PROBLEMLER

1. `Tanım 2.3.1` şuna eşdeğerdir: A bir topolojik uzayın bir alt-kümesi olsun. Eğer A kümesi x noktasının bir komşuluğu ise, yani $A \in \mathscr{B}(x)$ ise, x noktası, A kümesinin bir iç noktasıdır.

   Çözüm:
   $$x \in A^o \Leftrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \subset A) \Leftrightarrow A \in \mathscr{B}(x)$$

2. `Tanım 2.4.1` şuna eşdeğerdir: Her $N \in \mathscr{B}(x)$ için $(N \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ise, x noktası A kümesinin bir *yığılma* noktasıdır.

   Çözüm:
   $$\begin{aligned} &(\forall N \in \mathscr{B}(x))(N - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow\ &(\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \subset N \Rightarrow (T - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in \tilde{A} \end{aligned}$$

3. `Tanım 2.5.1` şuna eşdeğerdir: Bir x noktasının A kümesinin bir kaplama noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, x noktasının her komşuluğunun A ile kesişmesidir; yani her $N \in \mathscr{B}(x)$ için $N \cap A \neq \emptyset$ ise $x \in \bar{A}$ dır.

   Çözüm:
   $$\begin{aligned} &(\forall N \in \mathscr{B}(x))(N \cap A \neq \emptyset) \\ \Leftrightarrow\ &(\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \subset N \Rightarrow (T \cap A \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow x \in \bar{A} \end{aligned}$$

4. Ayrık olmayan bir uzayda bir noktanın komşuluklar ailesini bulunuz.

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ ayrık almayan bir uzay ise her $x \in X$ noktası için $\mathscr{B}(x) = \{X\}$ dir; yani her noktanın komşuluklar ailesi yalnızca $\{X\}$ kümesinden ibarettir.

5. Bir noktanın sonlu tane komşuluğunun arakesiti yine bu noktanın komşuluğudur. Gösteriniz.

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ uzayında bir $x \in X$ noktası verilsin. $N_1, N_2, \ldots, N_m \in \mathscr{B}(x)$ ise

$$x \in T_1 \subset N_1, x \in T_2 \subset N_2, \ldots, x \in T_m \subset N_m$$

olacak biçimde $T_1, T_2, \ldots T_m \in \mathscr{T}$ açık kümeleri vardır. Sonlu sayıda açık kümenin arakesiti açık olduğundan

$$x \in \bigcap_{i=1}^{m} T_i \subset \bigcap_{i=1}^{m} N_i \in \mathscr{B}(x)$$

olur.

6. Bir X kümesi üzerindeki iki topolojinin aynı olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x \in X$ öğesinin bu topolojilere göre komşuluklarının aynı olmasıdır.

Çözüm: $(X, \mathscr{T}_1)$ ve $(X, \mathscr{T}_2)$ uzayları verilsin. Bir $x \in X$ noktasının bu topolojilere göre komşuluklarını $\mathscr{B}_1(x)$ ve $\mathscr{B}_1(x)$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2 &\Longleftrightarrow [(T \in \mathscr{T}_1) \Leftrightarrow (T \in \mathscr{T}_2)] \\
&\Longleftrightarrow [(\forall x \in X)(\forall N \subset X)(x \in T \subset N \Leftrightarrow N \in \mathscr{B}_1(x) \cap \mathscr{B}_2(x))] \\
&\Longleftrightarrow \mathscr{B}_1(x) = \mathscr{B}_2(x)
\end{aligned}$$

olur.

7. Gerçel eksen üzerindeki salt topolojiye göre aşağıdaki kümelerden hangileri $\mathscr{B}(1)$ ailesine aittir?

$$(i)\ (0,2], \quad (ii)\ (0,1], \quad (iii)\ [1,2), \quad (iv)\ (1,2]$$

Çözüm: $1 \in (a,b) \subset N$ olacak biçimde bir (a,b) açık kümesi içeren tek küme $N = (0,2]$ dir. Ohalde verilen dört küme arasında yalnızca $(0,2] \in \mathscr{B}(1)$ olur.

8. Sonlu tümleyenler topolojisinde bir noktanın bütün komşuluklarının açık kümeler olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ sonlu tümleyenler topolojisi ise, her

$$A \in \mathscr{T} \Leftrightarrow A' \quad \text{soludur}$$

Bir $x \in X$ verilsin.

$$\begin{aligned} N \in \mathscr{B}(x) &\Leftrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \subset N) \\ &\Leftrightarrow T' \supset N' \\ &\Leftrightarrow N' \quad \text{sonludur} \\ &\Leftrightarrow N \in \mathscr{T} \end{aligned}$$

9. N kümesi A kümesinin bir komşuluğu ise, N nin her $B \subset A$ alt kümesinin de bir komşuluğu olacağını gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (N \in \mathscr{B}(A)) \wedge (B \subset A) &\Longrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(A \subset T \subset N) \\ &\Longrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(B \subset A \subset T \subset N) \\ &\Longrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(B \subset T \subset N) \\ &\Longrightarrow N \in \mathscr{B}(B) \end{aligned}$$

10. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde

$$\mathscr{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

ailesi veriliyor.

(a) $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzaydır. Gösteriniz.
(b) e noktasının komşuluklarını bulunuz.
(c) c noktasının komşuluklarını bulunuz.
(d) $\{c, e\}$ kümesinin komşuluklarını bulunuz.

Çözüm:

(a) $\mathscr{T}$ nun [T1]-[T3] topoloji aksiyomlarını sağladığı kolayca görülüyor.

(b) e noktasını içeren tek açık küme $\{a, b, e\}$ kümesidir. Bu kümeyi kapsayan her küme e nin bir komşuluğudur. O halde

$$\{a, b, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d, e\} \in \mathscr{B}(e)$$

dir.

(c) c noktasını içeren iki açık küme vardır: $\{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$ Bu kümelerden birini içeren her küme c noktasının bir komşuluğudur. O halde,

$$\{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d, e\} \in \mathscr{B}(c)$$

olur.

(d) $\{c, e\}$ kümesini kapsayan bir açık kümeyi kapsayan her küme $\{c, e\}$ kümesinin bir komşuluğudur. Bunu kapsayan açık küme yalnızca X kümesidir. O halde $X \in \mathscr{B}(\{c, e\})$ dir.

11. Bir p öğesinin bir A kümesinin bir kenar noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, p öğesinin her komşuluğunun hem A ile hem A' ile kesişmesidir. Gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} p \in \partial A &\Longleftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})[x \in T \Rightarrow (T \cap A \neq \emptyset) \wedge (T \cap A' \neq \emptyset)] \\ &\Longleftrightarrow [\forall T \forall N (x \in T \subset N) \Rightarrow (N \cap A \neq \emptyset) \wedge (N \cap A' \neq \emptyset)] \end{aligned}$$