Bölüm 4

TOPOLOJİ TABANI

4.1 TOPOLOJİ TABANI

4.2 KARMA PROBLEMLER

1. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathscr{T}^*$ nedir? $\mathscr{T}$ ailesi $\mathscr{T}$ topolojisi için bir taban mıdır?

   Çözüm: $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}$ olduğundan her topoloji kendisi için bir tabandır.

2. Bir Lindelöf uzayında kapalı bir kümenin her açık örtüsünün, sayılabilir bir alt örtüsü olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ bir Lindelöf uzayı ve $K \subset X$ kapalı bir alt kümesi olsun. Eğer $\mathscr{A}$ ailesi K nın açık bir örtüsü ise $\mathscr{A} \cup \{X'\}$ ailesi X in açık bir örtüsü olur. Önerme 4.1.5 uyarınca bu ailenin sayılabilir bir alt örtüsü vardır. Bu alt örtüden X' atılırsa, geri kalan aile K nın sayılabilir bir açık örtüsüdür ve bu örtü $\mathscr{A}$ ailesinin bir alt örtüsüdür.

3. Ayrılabilir bir uzayın ikinci sayılabilme aksiyomunu sağlamasının gerekmediğini bir örnekle gösteriniz.

   Çözüm: Sonlu ya da sayılabilir bir küme üzerindeki her topolojik uzay ayrılabilir bir uzaydır. Gerçel eksen üzerindeki salt topoloji ayrılabilir; çünkü rasyonel sayılar sayılabilir yoğun bir alt kümedir. Sayılamayan sonsuz bir küme üzerindeki ayrık topoloji ayrılabilir bir topoloji değildir. Tanım 4.1.8 ve 4.1.9 ile verilen üst-limit ve alt-limit topolojileri ayrılabilir birer uzaydır ama ikinci sayılabilme aksiyomunu sağlamazlar.

4. Mutlak topolojiye göre $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin içini ve kaplamını bulunuz $\mathbb{Z}$ kümesi $\mathbb{R}$ uzayının hiç bir yerinde yoğun olabilir mi?

   Çözüm: Önerme 4.1.8 uyarınca, $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayında her açık küme bir aralık kapsar. Her açık aralık sonsuz sayıda rasyonel ve irrasyonel sayılar içerir [bkz. Önerme 4.1.9]. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı ve her $T \in \mathscr{R}$ açık kümesi için

   $$n \in T \Rightarrow T \cap \mathbb{Z}' \neq \emptyset$$

   olur. O halde, $\mathbb{Z}$ nin her öğesi bir kenar noktadır; yani $\mathbb{Z}^o = \emptyset$ dir. Öyleyse,

   $$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

   yazılabilir; yani tamsayılar kümesinin salt topolojideki kaplamı kendisidir. $(\overline{\mathbb{Z}})^o = \emptyset$ olduğu için, Tanım 2.5.4 uyarınca, $\mathbb{Z}$ kümesi $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayının hiç bir yerinde yoğun değildir.

5. $\mathbb{R}$ üzerinde $\sigma = \{(p,q) : p,q \in \mathbb{Q}\}$ ailesini, yani her iki ucu rasyonel olan bütün açık aralıkların ailesini düşünelim. $\sigma \subset \mathcal{R} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ dır. Acaba $\sigma^* = \mathcal{R}^* = \mathscr{R}$ midir?

   Çözüm: $\sigma \subset \mathcal{R}$ olduğu için $\sigma^* \subset \mathcal{R}^*$ dır. Eşitliği göstermek için, ters kapsamanın varlığını; yani $\sigma^* \supset \mathcal{R}^*$ olduğunu göstermeliyiz. Önerme 4.1.2 yi kullanacağız.

   $(a,b) \in \mathcal{R}$ ve $x \in (a,b)$ olsun. Rasyonel sayılar $\mathbb{R}$ içinde yoğun olduğundan $x \in (p,q) \subset (a,b)$ olacak biçimde $(p,q) \in \sigma$ vardır. O halde $\mathcal{R}^* \subset \sigma^*$ dir.

   Bu problem, $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayının (salt topoloji) ikinci sayılabilme aksiyomunu sağlayan ayrılabilir bir uzay olduğunu göstermektedir.

6. $\xi = \{[p,q] \,:\, p,q \in \mathbb{Q}, \quad p < q\}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanı olmadığını gösteriniz.

Çözüm: ξ ailesinin Önerme 4.1.3(b) koşulunu sağlamadığını göstereceğiz. $[p_1, q_1], [p_2, q_2] \in \xi$ kümelerinin arakesitini düşünelim. $q_1 = q_2 = q$ olduğu zaman $C = [p_1, q] \cap [p_2, q] = \{q\}$ olacaktır. ξ ye ait hiç bir aralık $C = \{q\}$ arakesiti tarafından kapsanamaz. O halde ξ bir topoloji tabanı olamaz.

7. $\Phi = \{[a, b] : a \in \mathbb{Q}, \quad b \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a ucu rasyonel, b ucu irrasyonel sayı olan iki aralığın arakesiti boş değilse $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = [a_2, b_1]$ aralığıdır. Her $x \in [a_2, b_1]$ için $x \in [a_2, b] \subset [a_2, b_1]$ olacak biçimde $[a_2, b] \in \Phi$ aralığı vardır. Öyleyse Φ bir topoloji tabanıdır.

8. $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, \ c \leq y < d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ailesinin $\mathbb{R}^2$ düzleminde bir topoloji tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Basit şekiller çizilerek hemen görülebileceği gibi, $\mathcal{D}$ ailesine ait iki dikdörtgenin arakesiti gene $\mathcal{D}$ ye ait bir dikdörtgendir. Arakesite ait bir (x, y) noktası seçildiğinde bu noktayı içeren ve arakesit tarafından kapsanan bir $D \in \mathcal{D}$ dikdörtgeni daima vardır. Dolayısyla, Önerme 4.1.3 uyarınca istenen sonuca varılmış olur.

9. $\mathcal{V} = \{[p, q] : p, q \in \mathbb{Q}, \ p \leq q\}$ ailesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanı olduğunu ve (6) ile tanımlanan ξ ailesinin bu topoloji için bir alt taban olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (6) bağıntısındaki $p < q$ koşulu yerine $p \leq q$ koşulu konduğu için, $\mathcal{V}$ ailesi $C = [p_1, q] \cap [p_2, q] = \{q\}$ gibi tek öğeli noktaları içermektedir. Dolayısyla 6.Problemdeki sorun doğmaz; yani $\mathcal{V}$ ailesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tabanıdır. Ayrıca, ξ ailesinin sonlu arakesitlerinden oluşan aile $\mathcal{V}$ ailesidir. O halde onun bir alt-tabanıdır.

10. Açık kümelerden oluşan ve topolojik uzayın bir tabanını kapsayan her aile yine bu topolojinin bir tabanıdır. Gösteriniz.

Çözüm: $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathscr{T} \subset \mathscr{A}$ olsun. $\mathscr{A}$ ailesinin her öğesi $\mathscr{T}$ topolojisine ait olduğu ve $\mathscr{T}$ kendi kendisine bir taban olduğu için,

$$\mathscr{A}^* = \mathscr{T}^* = \mathscr{T}$$

olur.

11. Bir ailenin farklı iki topolojiye alt taban olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: Bir $\mathcal{A}$ ailesi iki topoloji için alt-taban olsun. $\mathcal{A}$ ailesinin sonlu arakesitlerinden oluşan aile $\mathcal{S}$ olsun. $\mathcal{S}^* = \mathscr{T}_1$ ve $\mathcal{S}^* = \mathscr{T}_2$ olacaktır. Her topoloji kendi kendisine taban olduğu için

$$\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_1^* = \mathcal{S}^* = \mathscr{T}_2^* = \mathscr{T}_2$$

olur. Farklı bir yöntem istenirse, Önerme 4.1.2 kullanılarak problem ispatlanabilir.