Bölüm 3

KURATOWSKİ YÖNTEMİ

3.1 KURATOWSKİ YÖNTEMİ

3.1.1 PROBLEMLER

1. Boş olmayan bir X kümesi verilsin. X kümesinin her A alt-kümesine karşılık aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\beta(A)$ alt-kümesi belirlenmiş olsun:

   B1: $\beta(X) = X$

   B2: $\beta(A) \subset A$

   B3: $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$

   B4: $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$

   Bu durumda,

   $$\mathscr{T} = \{A \subset X : \beta(A) = A\}$$

   ailesi X kümesi üzerinde bir topolojik yapı oluşturur. Bu yapıya göre her A kümesinin A^o içi $\beta(A)$ kümesinden başka birşey değildir. Gösteriniz.

   Çözüm: Problemin çözümü için önce aşağıdaki özeliği göstermeliyiz:

   $$A \subset B \Rightarrow \beta(A) \subset \beta(B) \tag{3.1}$$

   Bunun ispatı aşağıdaki bağıntıdan çıkar:

   $$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow A = A \cap B \\ &\Rightarrow \beta(A) = \beta(A \cap B) \\ &\Rightarrow \beta(A) = \beta(A) \cap \beta(B) \\ &\Rightarrow \beta(A) \subset \beta(B) \end{aligned}$$

   Şimdi $\mathscr{T}$ nun [T1]-[T3] topoloji aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

T1. [B1] gereğince,

$$\beta(X) = X \Longrightarrow X \in \mathscr{T}$$

[B2] gereğince,

$$\beta(\emptyset) \subset \emptyset \Rightarrow \beta(\emptyset) = \emptyset \Longrightarrow \emptyset \in \mathscr{T}$$

T2. $\mathscr{T}$ nun tanımı uyarınca $A, B \in \mathscr{T} \Rightarrow [\beta(A) = A \wedge \beta(B) = B]$ olur. [B4] gereğince,

$$A \cap B = \beta(A) \cap \beta(B) = \beta(A \cap B) \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{T}$$

T3. I herhangi bir damga (index) kümesi olsun. her $i \in I$ için bir $A_i \in \mathscr{T}$ verilmiş olsun.

$$\beta(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} A_i \tag{3.2}$$

olduğunu göstermeliyiz.
[B2] uyarınca

$$\beta(\bigcup_{i \in I} A_i) \subset \bigcup_{i \in I} A_i \tag{3.3}$$

olduğu açıktır. Ters kapsamayı göstermek için 6.4 bağıntısı ile $\beta(A_i) = A_i$ eşitliğini kullanacağız.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \supset A_i$$

$$\beta(\bigcup_{i \in I} A_i) \supset \beta(A_i)$$

$$\beta(\bigcup_{i \in I} A_i) \supset \bigcup_{i \in I} \beta(A_i) = \bigcup_{i \in I} A_i \tag{3.4}$$

yazabiliriz. 3.3 ve 3.4 den istenen 6.5 eşitliği çıkar. O halde,

$$\beta(\bigcup_{i \in I} A_i) \in \mathscr{T}$$

olur.

Son olarak $(X, \mathscr{T})$ uzayında her $A \subset X$ için $\beta(A) = A^o$ olduğunu göstermeliyiz. Tanımımız uyarınca $A \in \mathscr{N} \Leftrightarrow \beta(A) = A$ dır. Oysa açık küme tanımı uyarınca $A \in \mathscr{T} \Leftrightarrow A = A^o$ dır. O halde her $A \subset X$ için $\beta(A) = A^o$ olur.

2. $X = \mathbb{N}$ olmak üzere $\gamma : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ dönüşümü

$$\gamma(A) = \begin{cases} A, & A \text{ sonlu ise} \\ X, & A \text{ sonsuz ise} \end{cases} \tag{3.5}$$

olarak tanımlanıyor. Bu dönüşümün bir Kuratowski kaplama dönüşümü olduğunu gösteriniz. Bu topolojinin açık ve kapalı kümelerini belirleyiniz.

Çözüm: [K1]-[K4] Kuratowski aksiyomlarının sağlandığını göstermeliyiz.

- [K1] $\emptyset$ sonlu olduğu için $\gamma(\emptyset) = \emptyset$ dir. $\mathbb{N}$ sonsuz olduğu için $\gamma(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ dir.
- [K2] A sonlu ise $\gamma(A) = A \Rightarrow A \subset \gamma(A)$ dır.
  A sonsuz ise $\gamma(A) = \mathbb{N} \Rightarrow A \subset \gamma(A)$ dir.
- [K3]

$$\begin{aligned} A \quad \text{ve} B \quad \text{sonlu} &\Rightarrow A \cup B \quad \text{sonlu} \\ &\Rightarrow \gamma(A \cup B) = (A \cup B) \\ &\Rightarrow (A \cup B) \subset \gamma(A \cup B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \quad \text{veya} B \quad \text{sonsuz} &\Rightarrow A \cup B \quad \text{sonsuz} \\ &\Rightarrow \gamma(A \cup B) = \mathbb{N} \\ &\Rightarrow (A \cup B) \subset \gamma(A \cup B) \end{aligned}$$

- [K4]

$$\begin{aligned} (A \quad \text{sonlu}) &\Rightarrow (\gamma(A) = A) \Rightarrow (\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)) \\ (A \quad \text{sonsuz}) &\Rightarrow (\gamma(A) = \mathbb{N}) \Rightarrow (\gamma(\gamma(A)) = \gamma(\mathbb{N})) \\ &\Rightarrow (\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)) \end{aligned}$$

Her $A \subset \mathbb{N}$ için $A \longmapsto \gamma(A)$ dönüşümü Kuratowski aksiyomlarını sağlar. O halde bu dönüşüm $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji kurar. Bu topolojinin kapalı kümeleri her $A \subset \mathbb{N}$ için $\gamma(A) = \bar{A}$ kaplamlarıdır. 3.5 uyarınca kapalı kümeler

$$\mathscr{K} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \quad \text{sonlu kümeler}\}$$

dir. Açık kümeler ise, $\mathscr{K}$ ailesine ait olan kümelerin tümleyenleridir. Bunlar

$$\mathscr{T} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \quad \text{tümleyenleri sonlu olan kümeler}\}$$

dir.

3. (3.5) dönüşümünün belirlediği topolojiyi $\mathbb{N}$ üzerinde, kapalı kümeleri, yalnızca, sonlu kümelerden oluşan topoloji (sonlu tümleyenler topolojisi) ile karşılaştırınız.

Çözüm: Yukarıda söylenenlerden anlaşılacağı üzere, $\mathbb{N}$ üzerinde, kapalı kümeleri 3.5 ile tanımlanan topoloji sonlu tümleyenler topolojisidir. $\mathbb{N}$ den farklı kapalı kümeleri sonlu kümelerdir; $\mathbb{N}$ istisnai olarak kapalıdır.