2.5 KAPLAMA

2.5.1 PROBLEMLER

1. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olduğuna göre aşağıdaki özeliklerin varlığını gösteriniz:

   (a) $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

   Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in \overline{(A \cap B)} &\Rightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow T \cap (A \cap B) \neq \emptyset) \\ &\Rightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow [(T \cap A \neq \emptyset) \wedge (T \cap B \neq \emptyset)] \\ &\Rightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B}) \\ &\Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B} \end{aligned}$$

   (b) $(\bar{A})' = (A')^o$ ve $(A^o)' = (A')^-$

   Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in (\bar{A})' &\Longleftrightarrow x \notin \bar{A} \\ &\Longleftrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \wedge (T \cap A \neq \emptyset) \\ &\Longleftrightarrow (\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \wedge (T \subset A') \\ &\Longleftrightarrow x \in (A')^o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in (A^o)' &\Longleftrightarrow (x \notin A^o) \\ &\Longleftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow (T \cap A' \neq \emptyset) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A')^- \end{aligned}$$

   (c) $\bar{A} = A^o \cup \partial A$

   Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\Longleftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow (T \cap A \neq \emptyset) \\ &\Longleftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow [(T \subset A^o) \vee [(T \cap A \neq \emptyset) \wedge (T \cap A' \neq \emptyset)]] \\ &\Longleftrightarrow (x \in A^o) \vee (x \in \partial A) \end{aligned}$$

   (d) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow \partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

Çözüm:

$$BarA \cap \bar{B} = \emptyset \Rightarrow \partial(A \cap \partial B = \emptyset$$

dir. Ayrıca Problem 2.3.1-3(c) uyarınca $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ olduğunu biliyoruz. O halde $\partial(A \cup B) \supset \partial A \cup \partial B$ olduğunu göstermek yetecektir.

$$\begin{aligned} x \in \partial A \cup \partial B &\Longleftrightarrow [(\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow (T \cap (A \cup B) \neq \emptyset)] \\ &\Longleftrightarrow x \in \partial(A \cup B) \end{aligned}$$

çıkar

(e) $x \in \partial A \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap (A')^-$

Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in \partial A &\Longleftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow [(T \cap A \neq \emptyset) \wedge (T \cap A' \neq \emptyset)] \\ &\Longleftrightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (x \in (A')^-) \\ &\Longleftrightarrow (x \in \bar{A} \cap (A')^-) \end{aligned}$$

(f) $\partial A = \bar{A} - A^o = \bar{A} \cap (A')^-$

Çözüm:

$$(x \in \partial A) \Leftrightarrow (\forall T \in \mathscr{T})(x \in T \Rightarrow [(T \cap A \neq \emptyset) \vee (T \cap A' \neq \emptyset)$$

olduğunu biliyoruz. $x \notin A^o$ olduğunu göstermek için Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. Eğer $(x \in \partial A) \wedge (x \in A^o)$ olsaydı

$$(\exists T \in \mathscr{T})(x \in T \wedge T \subset A)$$

olurdu. Bu durumda $x \notin \partial A$ olması gerekirdi. Demek ki $x \in A^o$ olamaz. O halde $x \in \bar{A} - A^o$ dır.

(g) $A \subset B \Rightarrow (\bar{A})^o \subset (\bar{B})^o$

Çözüm:

$$A \subset B \Rightarrow (\bar{A} \subset \bar{B}) \Rightarrow (\bar{A})^o \subset (\bar{B})^o$$

olur.

(h) $A \subset B \Rightarrow (A^o)^- \subset (B^o)^-$

Çözüm:

$$A \subset B \Rightarrow (A^o \subset B^o) \Rightarrow (A^o)^- \subset (B^o)^-$$

olur.

(i) A açık ise $A \subset (\bar{A})^o$ dir.

Çözüm: $A \in \mathscr{T} \Rightarrow A = A^o$ olduğundan

$$A \in \mathscr{T} \Rightarrow A \subset \bar{A} \Rightarrow A^o \subset (\bar{A})^o \Rightarrow A \subset (\bar{A})^o$$

çıkar.

(j) A kapalı ise $(A^o)^- \subset A$ dır.

Çözüm: $A \in \mathscr{T}' \Rightarrow A = \bar{A}$ olduğundan

$$A \in \mathscr{T}' \Rightarrow A^o \subset A \Rightarrow (A^o)^- \subset \bar{A} \Rightarrow (A^o)^- \subset A$$

çıkar.

2. Bir topolojik uzayda sonlu tane kümenin bileşiminin kaplamı, bu kümelerin kaplamlarının bileşimine eşittir. Gösteriniz *([W3] özeliğinin genelleşmesi)*. Arakesit işlemi için nasıl bir özelik vardır? *(1(a) sorusunun genelleşmesi.)*

Çözüm: [W3] özeliğinden $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$ olduğu biliniyor. Tümevarım ilkesini kullanarak bunu herhangi $n \in \mathbb{N}$ sayıda kümeye genelleştirebiliriz.

$$\overline{A_1 \cup (A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{n-1})} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \ldots \cup \overline{A_{n-1}}$$

olduğunu varsayarak

$$\overline{A_1 \cup (A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n)} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \ldots \cup \bar{A}_n)$$

olduğunu göstermeliyiz. Aşağıdaki prosedür, tümevarım ilkesiyle her n tane kümeye uygulanabilir:

$$\begin{aligned}
\overline{A_1 \cup (A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)} &= \bar{A}_1 \cup \overline{(A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)} \\
&= \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \overline{(A_3 \cup A_4 \cup \ldots \cup A_n)} \\
&= \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 \cup \overline{(A_4 \cup A_5 \cup \ldots \cup A_n)} \\
&= \cdots \\
&= \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{(A_{n-1} \cup A_n)} \\
&= \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}} \cup \bar{A}_n
\end{aligned}$$

Arakesit işlemi için, $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ bağıntısı kullanılarak, $=$ yerine $\subset$ konulmak koşuluyla, yukarıdaki işlemler aynen tekrarlanabilir ve

$$\overline{A_1 \cap (A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n)} \subset \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n\right)$$

bağıntısı elde edilir.

3. `Örnek 2.1.3` 'teki üç topolojiye göre $L = \{a, b\}$ ve $M = \{a, c\}$ kümelerinin kaplamlarını bulunuz.

Çözüm: Her bir topoloji için açık kümelerin tümleyenleri o topolojinin kapalı kümeleridir. O halde, sözkonusu topolojilerin kapalı kümeleri, sırasıyla, şunlar olacaktır:

(a) $\mathscr{T}_1' = \{X, \{b, c\}, \{c\}, \emptyset\}$

(b) $\mathscr{T}_2' = \{X, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset\}$

(c) $\mathscr{T}_3' = \{X, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset\}$

$\bar{L}$ ve $\bar{M}$ kümeleri, bu kümeleri kapsayan kapalı kümelerin en küçüğüdürler. O halde,her bir topoloji için, sırasıyla, şu kümelerdir:

(a) $\mathscr{T}_1$ için $\bar{L} = X$ ve $\bar{M} = M$

(b) $\mathscr{T}_2$ için $\bar{L} = X$ ve $\bar{M} = M$

(c) $\mathscr{T}_3$ için $\bar{L} = L$ ve $\bar{M} = X$

4. Bir X kümesi üzerindeki ayrık topolojiye göre, her $A \subset X$ alt kümesi için $A = \bar{A}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Ayrık topolojide her küme hem açık hem kapalıdır. Dolayısıyla bir A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme A nın kendisidir; yani $\bar{A} = A$ dır.

5. Sonsuz bir X kümesi üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisine göre, her sonsuz $A \subset X$ alt-kümesi için $\bar{A} = X$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Sonlu tümleyenler topolojisinde kapalı kümeler sonludur. Bunun tek istisnası hem açık hem kapalı olan X kümesidir. Sonsuz A kümesini kapsayan tek bir kapalı küme vardır; o da X dir. O halde $\bar{A} = X$ olmalıdır.

6. Bir A kümesinin bir topolojik uzayın hiçbir yerinde yoğun olmaması için gerekli ve yeterli koşul, her açık kümenin A ile kesişmeyen ve boş olmayan açık bir alt-kümesinin varlığıdır. Gösteriniz.

Çözüm: A kümesi $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayının hiçbir yerinde yoğun değilse, $\bar{A}^o = \emptyset$ olur. Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. Eğer her $(T \in \mathscr{T})$ ve her $(T_1 \in \mathscr{T},\ T_1 \subset T)$ için $T_1 \cap A \neq \emptyset$ olsaydı, $T = T_1$ alınarak, her $(T \in \mathscr{T})$ için $T \cap A \neq \emptyset$ olurdu. Bu durumda $\bar{A}^o = X$ olurdu, ki bu $\bar{A}^o \neq \emptyset$ olmasını gerektirirdi. Bu çatışkı olamayacağından, kabulümüz yanlıştır; yani her $(T \in \mathscr{T})$ için $T_1 \cap A = \emptyset$ olacak biçimde bir $(T_1 \in \mathscr{T},\ T_1 \subset T)$ vardır.

Tersine olarak, her açık T kümesinin A ile kesişmeyen ve boş olmayan açık bir T_1 alt-kümesi varolsun. $\bar{A}^o = \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz. Gene Olmayana Ergi Yöntemini kullanalım. $\bar{A}^o \neq \emptyset$ olsaydı, varsayım uyarınca öyle bir $T_1 \subset \bar{A}^o$ açık alt kümesi var ki $T_1 \cap A = \emptyset$ olurdu. Bu durumda, A kümesi uzayda yoğun olamaz ve $T_1 \subset \bar{A}'$ olur. Bu bir çatışkıdır. O halde $\bar{A}^o = \emptyset$

7. Kapalı bir kümenin hiçbir yerde yoğun olmaması için gerekli ve yeterli koşul, tümleyeninin her yerde yoğun olmasıdır. Gösteriniz. Her hangi bir küme için de bu özelik var mıdır?

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
(\bar{K})^o = \emptyset &\Longleftrightarrow (K^o = \emptyset) \\
&\Longleftrightarrow ((K^o)' = X) \\
&\Longleftrightarrow \overline{K'} = X \\
&\Longleftrightarrow \quad K' \text{kümesi yoğundur}
\end{aligned}
$$

Herhangi bir küme için bu özelik yoktur. Örneğin, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin tümleyeni olan $\mathbb{Q}'$ irrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ içinde yoğundur. Buna karşın $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi de $\mathbb{R}$ içinde yoğundur.

8. Kapalı bir kümenin kenarı hiçbir yerde yoğun değildir. Gösteriniz. Her hangi bir küme için de bu özelik söylenebilir mi?

Çözüm: K kapalı bir küme olsun. Her kümenin kenarı kapalıdır. O halde $\overline{(\partial K)}^o = (\partial K)^o = \emptyset$ olduğunu göstermek yetecektir. Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Bir T açık kümesi için $T \subset (\partial K)^o$ olduğunu varsayalım. $T \subset (\partial K)^o \subset \bar{K} = K$ yazabiliriz. K^o kümesi K nın kapsadığı en büyük açık küme olduğundan $T \subset K^o$ yazabiliriz. Öyleyse

$$T \subset (\partial A)^o \cap A^o = (\bar{A} - A^o) \cap A^o = \emptyset$$

olacaktır. Buradan $T = \emptyset$ sonucu çıkar, ki bu istediğimiz sonuçtur.

Herhangi bir kümenin kenar kümesi için bu özelik var olmayabilir. Örneğin, salt topolojiye göre $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin kenar kümesi bütün gerçel eksendir; yani $\partial Q = \mathbb{R}$ dır ve $\overline{\mathbb{R}} \supset \mathbb{R}$ olur.

9. $\mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki topolojilerin her birisi için $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin iç noktaları kümesini, yığılma noktaları kümesini ve kaplamını bulunuz.($*$)

   (a) Açık kümeleri, açık aralıkların bir bileşimi olarak yazılabilen topoloji (salt topoloji).

   (b) Kapalı kümeleri, yalnızca, sonlu alt kümelerden oluşan topoloji (sonlu tümleyenler topolojisi).

   (c) Kapalı kümeleri, yalnızca, sayılabilir alt kümelerden oluşan topoloji (sayılabilir tümleyenler topolojisi).

Çözüm:

(a) i. $\mathbb{Q}^o = \emptyset$ dir. Çünkü, salt topolojide hiç bir açık aralık (dolayısıyla hiç bir açık küme) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesince kapsanamaz; her açık küme mutlaka irrasyonel sayılar içerir; yani her açık T kümesi için $T \cap \mathbb{Q}' \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla, $\mathbb{Q}$ hiç bir açık küme içeremez. Öyleyse, $\mathbb{Q}^o = \emptyset$ dir.

ii. $\mathbb{Q}^{\sim} = \mathbb{R}$ dir. Çünkü her açık aralık (dolayısıyla her açık küme) sonsuz sayıda rasyonel sayı içerir. O halde, her $x \in \mathbb{R}$ ve her açık T kümesi için

$$x \in T \Rightarrow (T - \{x\}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

olur.

iii. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir. Çünkü, yukarıdaki düşünüşle, her $x \in \mathbb{R}$ ve her açık T kümesi için

$$x \in T \Rightarrow T \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

yazılabilir. Aynı sonucu $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^{\sim}$ eşitliğinden de çıkarabiliriz.

(b) Sonlu tümleyenler topolojisinin kapalı kümeleri $\{\emptyset, \mathbb{R}, \quad$ sonlu altkümeler$\}$ dir. Açık kümeler ise $\{\emptyset, \mathbb{R}, \quad$ tümleyenleri sonlu olan altkümeler$\}$ dir. Buna göre,

i. $\mathbb{Q}^o = \emptyset$ dir. Çünkü, $\mathbb{Q}^o$ kümesi $\mathbb{Q}$ nun kapsadığı en büyük açık kümedir. Oysa $\mathbb{Q}$ içinde, tümleyeni sonlu olan hiç bir altküme yoktur.

ii. $\mathbb{Q}^{\sim} = \mathbb{R}$ dir. Çünkü, tümleyeni sonlu olan her küme rasyonel sayılar içerir. Başka bir deyişle, her $x \in \mathbb{R}$ ve her açık T kümesi için

$$x \in T \Rightarrow (T - \{x\}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

olur.

iii. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir. Yukarıdaki düşünüşle, her $x \in \mathbb{R}$ ve her açık T kümesi için

$$x \in T \Rightarrow T \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

olur. Aynı sonucu $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^{\sim}$ eşitliğinden de çıkarabiliriz.

(c) Sayılabilir tümleyenler topolojisinin kapalı kümeleri $\{\emptyset, \mathbb{R}, \quad$ sayılabilir altkümeler$\}$ dir. Açık kümeler ise $\{\emptyset, \mathbb{R}, \quad$ tümleyenleri sayılabilir olan altkümeler$\}$ dir. Buna göre,

i. $\mathbb{Q}^o = \emptyset$ dir. Çünkü, $\mathbb{Q}^o$ kümesi $\mathbb{Q}$ nun kapsadığı en büyük açık kümedir. Oysa $\mathbb{Q}$ içinde, tümleyeni sayılabilir olan hiç bir altküme yoktur.

ii. $\mathbb{Q}^{\sim} = \mathbb{R}$ dir. Çünkü, tümleyeni sayılabilir olan her küme rasyonel sayılar içerir. Başka bir deyişle, her $x \in \mathbb{R}$ ve her açık T kümesi için

$$x \in T \Rightarrow (T - \{x\}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

olur.

iii. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir. Yukarıdaki düşünüşle, her $x \in \mathbb{R}$ ve her açık T kümesi için

$$x \in T \Rightarrow T \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

olur. Aynı sonucu $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^{\sim}$ eşitliğinden de çıkarabiliriz.

10. $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathscr{R}$ ailesine ait T kümeleri aşağıdaki özeliğe sahip iseler, $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ nun bir topolojik uzay olduğunu gösteriniz:

$$T \in \mathscr{R} \Longleftrightarrow (\forall x \in T)(\exists (a,b) \subset T : x \in (a,b)$$

Bu uzayda bir T kümesinin açık olması için gerekli ve yeterli koşul, T ye ait her noktayı içeren açık bir aralık kapsamasıdır. Bu uzaya $\mathbb{R}$ üzerindeki *salt (mutlak) topoloji* denilir. Bu topoloji, yukarıda Problem 9-a ile tanımlanan salt topolojidir. Bu topolojiyi ileride başka yöntemlerle de kuracağız. Bu, gösteriyor ki, bir küme üzerinde aynı topoloji farklı yöntemlerle kurulabilir.

Çözüm: Topolojinin [T1]- [T2], [T3] aksiyomlarının sağlandığını göstermeliyiz.

(a)

$$x \in \emptyset \Rightarrow \forall a[a \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (a,a)] \Rightarrow \emptyset \in \mathscr{R}$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists(\epsilon > 0)[x \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset \mathbb{R}] \Rightarrow mathbbR \in \mathscr{R}$$

(b) $T_1, T_2 \in \mathscr{R}$ olsun. $x \in T = T_1 \cap T_2$ ise

$$x \in T_1 \Rightarrow \exists a_1, b_1 : x \in (a_1, b_1)$$

$$x \in T_2 \Rightarrow \exists a_2, b_2 : x \in (a_2, b_2)$$

dır. $a = max\{a_1, a_2\}$ ve $b = min\{a_2, b_2\}$ dersek,

$$x \in T \Rightarrow x \in (a, b) \Rightarrow T \in \mathscr{R}$$

olur.

(c)

$$x \in T = \bigcup_{i \in I} T_i \Rightarrow \exists (i \in I)[x \in T_i] \Rightarrow \exists (a, b \in \mathbb{R})[x \in (a, b) \subset T_i] \Rightarrow T \in \mathscr{R}$$

11. $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak topolojiye göre $\mathbb{R}$ nin açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bunu çok farklı yollarla çözebiliriz.

(a) $\mathscr{R}$) salt topoloji olmak üzere, 10.Problemde $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ nin bir topolojik uzay olduğu gösterildi. O halde [T1] aksiyomu gereğince $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathscr{R}$ dir.

(b) Bir topolojik uzayda, kapalı kümelerin tümleyenleri açıktır. $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayında $\emptyset$ kapalıdır (ve aynı zamanda açıktır). $\emptyset' = \mathbb{R}$ olduğundan ($\mathbb{R}$ açıktır. Aynı düşünüşle, ($\mathbb{R}$ kapalıdır.

(c) Her $x \in \mathbb{R}$ noktasını içeren bir açık aralık vardır. Dolayısıyla, $\mathbb{R}$ kümesi açık aralıkların bileşimi olarak yazılabilir. Bu durumda, [T3] aksiyomu gereğince, $\mathbb{R}$ açık bir küme olur.

(d) Her $x \in \mathbb{R}$ noktası $\mathbb{R}$ nin bir iç noktasıdır. Çünkü her $x \in \mathbb{R}$ noktası için $x \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset \mathbb{R}$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır.Her noktası bir iç nokta olan küme açıktır.

12. $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak topolojiye göre, her b gerçel sayısı için, $(-\infty, b)$ biçimindeki aralıkların açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Çözümü farklı yollarla yapabiliriz.

(a)

$$(-\infty, b) = \bigcup_{\alpha < b} (\alpha, b)$$

dir. (α, b) açık aralıkları salt topolojiye göre açık kümelerdir. Açık kümelerin bileşimi olan $(-\infty, b)$ kümesi açık olur.

(b) $(-\infty, b)$ nin her noktası bir iç noktadır. Çünkü her $x \in (-\infty, b)$ noktası için $x \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset (-\infty, b)$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır.

13. $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak topolojiye göre, her a gerçel sayısı için, $(a, +\infty)$ biçimindeki aralıkların açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Önceki probleme benzer olarak çözülebilir.

14. $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayında bir (a, b) aralığı içinde kalan rasyonel sayılar kümesinin; yani $\mathbb{Q} \cap (a, b)$ kümesinin kenar noktaları kümesi $\partial\mathbb{Q} = [a, b]$ dir. Gösteriniz.

Çözüm: Simgelerde basitliği sağlamak için $A = \mathbb{Q} \cap (a, b)$ diyelim. Açık her T kümesi ve her $x \in [a, b]$ için

$$x \in T \Rightarrow [T \cap A \neq \emptyset \wedge T \cap A^{'} \neq \emptyset]$$

olduğundan $x \in \partial A$ dır.

Benzer olarak, $y \notin [a, b]$ ise, $\epsilon < min\{|y-a|, |y-b|\}$ olmak üzere $T = \{t : |t-y| < \epsilon\}$ açık kümesini düşünelim.

$$y \in T \Rightarrow (T \cap A) = \emptyset$$

olur. O halde $y \notin \partial A$ dır.

15. $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ içindeki rasynel sayılar kümesinin kenar noktaları kümesi $\mathbb{R}$ dir. Gösteriniz.

Çözüm: $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ olduğunu göstereceğiz. Her açık T kümesi ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x \in T \Rightarrow (T \cap \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

olduğundan $x \in \partial\mathbb{Q}$ dir. Benzer olarak, $\mathbb{Q}'$ irrasyonel sayılar kümesinin kenar noktaları kümesinin de $\mathbb{R}$ olduğu gösterilebilir.

16. $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ uzayı içinde bileşimleri kapalı olmayan bir kapalı kümeler dizisi kurunuz.

Çözüm: Bunun için 2.2.1-1 Problemin çözümünde örnekler verildi.