## 2.4 YIĞILMA NOKTALARI

### 2.4.1 PROBLEMLER

1. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay $A, B, K \subset X$ olduğuna göre aşağıdaki özelliklerin varlığını gösteriniz.

   (a) $(A \cap B)^{\sim} \subset \tilde{A} \cap \tilde{B}$ dır,

   (b) $A \subset K$ ve $K$ kapalı ise $\tilde{A} \subset K$ dır.

   **Çözüm:**

   (a)

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^{\sim} &\Longleftrightarrow \forall T \in \mathscr{T}\ [(T - x) \cap (A \cap B) \neq \emptyset] \\ &\Longrightarrow [(T - x) \cap A \neq \emptyset] \wedge [(T - x) \cap B \neq \emptyset] \\ &\Longrightarrow [x \in \tilde{A}] \wedge [x \in \tilde{B}] \\ &\Longrightarrow x \in \tilde{A} \cap \tilde{B} \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} A \subset K &\Longrightarrow \tilde{A} \subset \tilde{K} \\ &\Longrightarrow \tilde{A} \subset \tilde{K} = K \\ &\Longrightarrow \tilde{A} \subset K \end{aligned}$$

2. Ayrık bir topolojik uzayda hiçbir alt-kümenin hiçbir yığılma noktası yoktur. Neden? Ayrık olmayan bir uzayda bu özelik nasıldır?

   **Çözüm:**

   (a) $(X, \mathscr{T})$ ayrık uzayında bir $A \subset X$ altkümesi verilsin. $\tilde{A} = \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz. Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Bir $a \in \tilde{A}$ öğesinin olduğunu varsayalım. Her $T \in \mathscr{T}$ için

$$(T - \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

   olmalıdır. Bu uzayda tek öğeli her küme açık olduğundan, $T = \{a\}$ alabiliriz. Bu durumda yukarıdaki bağıntı

$$(\{a\} - \{a\}) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \emptyset \cap A \neq \emptyset$$

   biçimini alır, ki bu bir çelişkidir.

(b) $(X, \mathscr{T})$ ayrık olmayan bir uzay ise, yalnızca iki açık kümesi vardır: $\{\emptyset, X\}$. O halde boş olmayan her alt kümesinin yığılma noktaları kümesi $X$ kümesidir. Boş kümenin yığılma noktaları yoktur. Özetlersek,

$$\tilde{A} = \begin{cases} \emptyset, & A = \emptyset \quad \text{ise} \\ X, & A \neq \emptyset \quad \text{ise} \end{cases} \tag{2.3}$$

olur.

3. Kapalı bir küme kendisinin yığılma noktaları ile ayrık noktalarının bileşimine eşittir. Gösteriniz.

**Çözüm:** $K$ kapalı ise $\tilde{K} \subset K$ dır. Tanım 2.4.2 uyarınca, $x \in K$ bir yığılma noktası değilse, ayrık bir noktadır.

4. Bir $x \in A$ öğesinin $A$ kümesinin bir ayrık noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $A \cap T = \{x\}$ olacak şekilde açık bir $T$ kümesinin varlığıdır. Gösteriniz.

**Çözüm:** $x$ noktası $A$ kümesinin ayrık bir noktası olsun. Tanım 2.4.2 uyarınca, $x \in A - \tilde{A}$ dır. Bu durumda,

$$\exists T \in \mathscr{T} \; [(T - \{x\}) \cap A = \emptyset]$$

olacaktır. O halde,

$$\exists T \in \mathscr{T} \; [(T - \{x\}) \cap A = \{x\}]$$

olur.

5. $A = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a < x < b\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesinin $\tilde{A} = [a, b]$ kapalı aralığı olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$ salt topolojik uzayında, açık her $T$ kümesi açık aralıkların bileşimidir [bkz. Önerme 4.1.8]. $x \in (a, b)$ ise, öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı bulabiliriz ki, $x \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset T$ olacak biçimde bir $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$ aralığı kurulabilir. O halde, her $T$ açık kümesi için

$$(T - \{x\}) \cap (a, b) \supset (x - \epsilon, x + \epsilon) \neq \emptyset$$

olur. Demek ki $(a, b)$ açık aralığının her noktası $(a, b)$ nin bir yığılma noktasıdır.

Şimdi $a$ ve $b$ uç noktalarının da birer yığılma noktası olduğunu gösterelim. $a \in T$ ise $a \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \subset T$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı bulabiliriz. Bu durumda,

$$(T - \{a\}) \cap (a, b) \supset (a, \epsilon) \neq \emptyset$$

yazabiliriz. O halde $a$ noktası $(a, b)$ aralığının bir yığılma noktasıdır.

$b$ noktası için de benzer iş yapılabilir. Öyleyse

$$(a, b)^{\sim} = [a, b]$$

dir.

6. $B = (a, b) = \{q \in \mathbb{Q} \quad : \quad a < q < b\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesinin $\tilde{B} = [a, b]$ kapalı aralığı olduğunu gösteriniz.

   **Çözüm:** Her açık aralıkta bir tane (dolayısıyla sonsuz tane) rasyonel nokta vardır. Öyleyse, önceki problemde ele alınan aralıkların her birisi $B$ kümesi ile kesişeceklerdir. O halde,

   $$\tilde{B} = [a, b]$$

   dir.

7. $A = \mathbb{N}$ kümesinin hiç yığılma noktası olmadığını gösteriniz.

   **Çözüm:** Her $n \in \mathbb{N}$ için $n-1 < n-\epsilon < n+\epsilon < n+1$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır. $T = (n - \epsilon, n + \epsilon)$ diyelim. $(T - \{n\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ olduğundan, $n$ noktası $\mathbb{N}$ kümesinin yığılma noktası olamaz. Her $n \in \mathbb{N}$ için bu iş yapılabildiğine göre, $\mathbb{N}$ kümesinin hiç bir öğesi yığılma noktası olamaz.

8. $S = \{k - \frac{1}{n} \quad : k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesinin $\tilde{S} = \mathbb{Z}$ olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Her açık $T$ kümesi için $k \in T$ ise, yeterince büyük $n$ sayılarına karşılık, $k-1 < k-\epsilon_n < k-\frac{1}{n} < k+\epsilon_n < k+1$ ve $(k-\epsilon_n, k+\epsilon_n) \subset T$ olacak biçimde $\epsilon_n > 0$ sayıları vardır. Dolayısıyla,

$$(T - \{k\}) \cap S \neq \emptyset$$

olur. Demek ki $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \tilde{S}$ dir.

9. $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin tek yığılma noktasının $\tilde{D} = \{0\}$ olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Her açık $T$ kümesi için $0 \in T$ ise, yeterince büyük $n$ sayılarına karşılık, $-\epsilon_n < 0 < \frac{1}{n} < \epsilon_n$ ve $(k-\epsilon_n, k+\epsilon_n) \subset T$ olacak biçimde $\epsilon_n > 0$ sayıları vardır. Dolayısıyla,

$$(T - \{0\}) \cap D \neq \emptyset$$

olur. Demek ki $0 \in \tilde{D}$ dir.

Şimdi $D$ kümesinin 0 dan farklı hiç bir yığılma noktasının olamayacağını göstermeliyiz. Olmayana ergi yöntemini kullanacağız. $0 \neq p \in \tilde{D}$ olsun. $\frac{1}{n} < p$ olacak şekilde bir $n$ sayısı seçebiliriz. $p \in (p - \frac{1}{n^2}, p + \frac{1}{n^2})$ dir. $T = (p - \frac{1}{n^2}, p + \frac{1}{n^2})$ alınırsa, $(T - \{p\}) \cap D = \emptyset$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde, $p$ noktası $D$ kümesinin bir yığılma noktası olamaz.