2.3 İÇ, DIŞ, KENAR NOKTALARI

2.3.1 PROBLEMLER

1. Bir topolojik uzayda A açık bir küme B her hangi bir küme olsun. Eğer $A \subset B^0$ ise $A \subset B$ olacağını gösteriniz.

   Çözüm: İstenen kapsama bağıntısı $A \subset B^0 \subset B$ bağıntısından apaçıktır.

2. Bir $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında A her hangi bir küme ve K kapalı bir küme olsun. Eğer $A \cup K = X$ ise $A^o \cup K =$ X olacağını gösteriniz.

   Çözüm: $A \cup K = X$ ve $A^o \cup K \neq X$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in A - A^o$ ve $x \notin K$ olacak biçimde bir $x \in X$ öğesi var olmalıdır; yani $x \in A - A^o$ ve $x \in K'$ olacak biçimde bir $x \in X$ öğesi var olmalıdır. K' kümesi açık olduğundan $x \in T \subset K'$ olacak biçimde açık bir T kümesi var olmalıdır. Öte yandan

$$\begin{aligned} A \cup K = X &\Rightarrow A' \cap K' = \emptyset \\ &\Rightarrow K' \subset (A')' \\ &\Rightarrow K' \subset A \\ &\Rightarrow x \in T \subset K' \subset A \\ &\Rightarrow x \in A^o \end{aligned}$$

   olur. O halde $x \in A^o \cup K$ olacaktır. Öyleyse $A^o \cup K = X$ dir.

3. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay $A, B \subset X$ olsun. Aşağıdaki özelliklerin sağlandığını gösteriniz.

   (a) $A^o \cup B^o \subset (A \cup B)^o$ dir.

   (b) $\partial(A^o) \subset \partial A$

   (c) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

   (d) dış $(A \cup B)$ =dış$(A)\cap$dış(B)

   (e) $A^o = A - (A \cap \partial A)$

   (f) $\partial A \cap A = \emptyset \Leftrightarrow A \in \mathscr{T}$ dur.

   (g) $\partial A \subset A \Leftrightarrow A$ kapalıdır.

Çözüm:

(a)

$$\begin{aligned} x \in (A^o \cup B^o) &\Rightarrow (x \in A^o) \wedge (x \in B^o) \\ &\Rightarrow \exists T_1, T_2 \in \mathscr{T}[(x \in T_1 \subset A) \wedge (x \in T_2 \subset B)] \\ &\Rightarrow (x \in T_1 \cap T_2 \subset A \cap B) \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B)^o \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x \in \partial(A^o) &\Rightarrow (x \notin ((A^o))^o) \wedge (x \notin ((A^o)')^o) \\ &\Rightarrow (x \notin A^o \wedge (x \notin ((A')^o))^o) \\ &\Rightarrow (x \notin A^o \wedge (x \notin (A')^o) \; (A^o)' \supset (A')^o \\ &\Rightarrow x \in \partial A \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x \in \partial(A \cup B) &\Rightarrow (x \notin (A \cup B)^o) \wedge (x \notin ((A \cup B)')^o) \\ &\Rightarrow (x \notin A^o \cup B^o) \wedge (x \notin (A' \cap B')^o) \\ &\Rightarrow (x \notin A^o \wedge (x \notin B^o) \wedge (x \notin [(A')^o \cap (B')^o]) \\ &\Rightarrow (x \notin A^o \wedge (x \notin A^o) \wedge [(x \notin (A')^o) \wedge (x \notin (B')^o)] \\ &\Rightarrow [(x \notin A^o \wedge (x \notin (A')^o)] \wedge [(x \notin B^o) \wedge (x \notin (B')^o)] \\ &\Rightarrow [(x \in \partial A] \vee [(x \in \partial B] \\ &\Rightarrow x \in \partial A \cup \partial B \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x \in ext(A \cup B) &\Rightarrow x \in ((A \cup B)')^o \\ &\Rightarrow x \in (A' \cap B')^o \\ &\Rightarrow x \in (A')^o \cap (B')^o \\ &\Rightarrow (x \in (A')^o) \wedge (x \in (B')^o) \\ &\Rightarrow (x \in ext(A)) \wedge (x \in ext(B)) \\ &\Rightarrow x \in ext(A) \cap ext(B) \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} x \in A^o &\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin \partial(A)) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A \cap \partial(A)) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A - (A \cap \partial(A)) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} A \cap \partial A = \emptyset &\iff (x \in A \wedge x \notin \partial A) \\ &\iff x \in A^o \end{aligned}$$

Bu bağıntı, bir kümenin açık olması için hiç bir kenar noktasını içermemesinin gerekli ve yeterli koşul olduğunu söyler.

(g)

$$\begin{aligned} \partial A \subset A &\iff (x \in \partial A \Rightarrow x \in A) \\ &\iff (x \in A' \Rightarrow x \notin \partial A) \end{aligned}$$

Bu koşul altında

$$\begin{aligned} x \in A' &\iff \exists T \in \mathscr{T}[(x \in T \subset A') \wedge (T \cap A = \emptyset)] \\ &\iff x \in (A')^o \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu bağıntı, bir kümenin kapalı olması için bütün kenar noktalarını içermesinin gerekli ve yeterli koşul olduğunu söyler.

4. Her kümenin kenar kümesi kapalıdır. Gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x \in (\partial A)' &\iff x \notin \partial A \\ &\iff (x \in A^o) \vee (x \in (A')^o) \\ &\iff x \in A^o \cup (A')^o \end{aligned}$$

Buradan

$$(\partial A)' = A^o \cup (A')^o$$

eşitliği çıkar. İki açık kümenin bileşimi olduğu için, eşitliğin sağ yanı açık bir kümedir. O halde ∂A kapalıdır. Önceki problemin (g) önermesi gereğince

$$\partial(\partial A) \subset \partial A$$

bağıntısını yazabiliriz.

5. Kapalı bir küme iç noktaları ile kenar noktalarının bileşimine eşittir. Gösteriniz.

Çözüm: Problem 3(g) gereğince

$$\begin{aligned} K \quad \text{kapalı} &\Longleftrightarrow \partial K \subset K \\ &\Longleftrightarrow (\partial K \subset K) \wedge (K^o \subset K) \\ &\Longleftrightarrow (\partial K \cup K^o) \subset K \end{aligned}$$

yazılabilir, ki bu isteneni verir.

6. Bir kümenin hem açık hem kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul hiçbir kenar noktasının olmamasıdır. İspatlayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \partial A = \emptyset &\Longleftrightarrow [(\partial A \subset A) \Rightarrow A \quad \text{kapalı} \\ &\Longleftrightarrow (A^o = A) \Rightarrow A \quad \text{açık} \end{aligned}$$

7.

$$\partial(\partial A) = \partial A$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(x \in \partial A) \wedge (x \notin \partial(\partial A))$ olacak biçimde bir x öğesi varolsaydı

$$\begin{aligned} x \notin \partial(\partial A) &\Longleftrightarrow [(x \in (\partial A)^o] \vee [x \in ((\partial A)')^o] \\ &\Longleftrightarrow \exists T_1, T_2 \in \mathscr{T}[(x \in T_1 \subset \partial A) \vee (x \in T_2 \subset (\partial A)'] \\ &\Longleftrightarrow [(x \in T_1 \cap T_2 \subset \partial A) \vee (x \in T_1 \cap T_2 \subset (\partial A)'] \end{aligned}$$

olurdu. Bu çelişki olamayacağından, seçilen biçimde bir x öğesi yoktur. O halde $\partial(\partial A) = \partial A$ dir.