2.2 KAPALI KÜMELER

2.2.1 PROBLEMLER

1. Bir topolojik uzayda kapalı kümelerden oluşan bir ailenin bileşiminin kapalı bir küme olmayabileceğini, bir örnek ile gösteriniz.

Çözüm: $\mathbb{R}$ üzerinde, açık kümeleri, açık aralıkların bir bileşimi olarak yazılabilen topolojiyi (salt topoloji)[bkz. 2.5.1.Kesimdeki 10.Problem] düşünelim. Her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısına karşılık

(a)
$$A_n = [0 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$$
kümelerini tanımlayalım. Bu kümelerin her biri salt topolojiye göre kapalıdır. Ancak bunların bileşimi olan
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$$
kümesi açıktır.

(b)
$$B_n = [0, 1 - \frac{1}{n}]$$
kümelerini tanımlayalım. Bu kümelerin her biri salt topolojiye göre kapalıdır. Ancak bunların bileşimi olan
$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1)$$
kümesi ne açık ne de kapalıdır.

(c)
$$C_n = [0 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$$
kümelerini tanımlayalım. Bu kümelerin her biri salt topolojiye göre kapalıdır. Bunların bileşimi olan
$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1)$$
kümesi de kapalıdır.

(d)

$$D_n = [-n, +n]$$

kümelerini tanımlayalım. Bu kümelerin her biri salt topolojiye göre kapalıdır. Bunların bileşimi olan

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, +n] = (-\infty, +\infty)$$

kümesi hem açık hem kapalıdır.

Bu dört örnek gösteriyor ki, kapalı kümelerden oluşan sonsuz bir ailenin bileşimi kapalı olmayabilir. Bu bileşim açık, kapalı ya da ne açık ne de kapalı bir küme olabilir.

Benzer işi açık kümeler için de söyleyebiliriz. Aşağıdaki örnek, açık kümelerin sonsuz sayıdasının arakesitinin açık olmayabileceğini göstermektedir.

(e)

$$E_n = (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n})$$

kümelerini tanımlayalım. Bu kümelerin her biri salt topolojiye göre açıktır. Bunların arakesiti olan tek öğeli

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}) = \{0\}$$

kümesi kapalıdır.

2. `Örnek 2.1.3` ile verilen üç topolojiye ait kapalı kümeleri ayrı ayrı saptayınız.

Çözüm: Söz konusu örnek üç öğeli bir $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde kurulan

(a) $\mathscr{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$

(b) $\mathscr{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{c, b\}, X\}$

(c) $\mathscr{T}_3 = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

topolojilerdir.

Her bir topoloji için açık kümelerin tümleyenleri o topolojinin kapalı kümeleridir. O halde, aradığımız kapalı kümeler şunlar olacaktır:

(a) $\mathscr{T}_1' = \{X, \{b, c\}, \{c\}, \emptyset\}$

(b) $\mathscr{T}_2' = \{X, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}, \emptyset\}$

(c) $\mathscr{T}_3' = \{X, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset\}$

3. Ayrık bir topolojik uzayın kapalı kümelerini belirleyiniz.

Çözüm: $(X, \mathscr{P})$ ayrık topolojik uzay olsun. Bu topolojiye göre X kümesinin her alt kümesi açıktır. Herhangi bir $K \subset X$ alt kümesini düşünelim. Bunun K' tümleyeni ayrık topolojiye göre açıktır. O halde K kümesi kapalıdır. Bu demektir ki, ayrık topolojide her alt küme hem açık hem kapalıdır.

4. Sonlu bir küme üzerinde tanımlı bir topolojiye göre, tek öğeli her küme kapalı bir alt küme oluyorsa, gösteriniz ki bu topoloji ayrık topolojidir.

Çözüm: $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sonlu bir küme olmak üzere, $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında tek öğeli her $\{a_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, kümesi kapalı olsun. Şimdi herhangi bir $a_i \in X$ öğesinin tümleyen kümesini düşünelim.

$$\{a_i\}' = \bigcup \{a_j : j \neq i\}$$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin sağ yanı sonlu tane kapalı kümenin bileşimi olduğundan kapalıdır. Dolayısıyla, $\{a\}'$ kapalıdır. Öyleyse, $\{a_i\}$ açıktır. Demek ki $(X, \mathscr{T})$ topolojik uzayında tek öğeli her küme hem açık hem kapalıdır. Oysa, bu nitelik ancak ayrık topolojik uzayda vardır.

5. Bir topolojik uzayda açık bir A kümesi ile kapalı bir K kümesi veriliyor. Gösteriniz ki

(i) $A - K$ kümesi açıktır;

(ii) $K - A$ kümesi kapalıdır.

Çözüm:

(i) $A - K = A \cap K'$ kümesi, açık iki kümenin arakesiti olduğu için açıktır.[bkz. 2.1.1.Tanım]

(ii) $K - A = K \cap A'$ kümesi, kapalı iki kümenin arakesiti olduğu için kapalıdır.[bkz. Önerme 2.2.1]